Über die Nullstellen linearer Operationen

von

S. MAZUR (Lwów).

In der vorliegenden Note gebe ich einige Sätze an über den Zusammenhang zwischen den Nullstellen linearer Operationen einer gewissen Klasse und denen der zu ihnen konjugierten. Als eine Folgerung dieser Sätze ergibt sich ein Theorem über die Auflösungen der Integralgleichungen vom Fredholmschen Typus im Raume der quadratisch integrierbaren Funktionen. Bevor wir jedoch zur Besprechung dieser Resultate schreiten, müssen wir zuerst die Bedeutung einiger Begriffe präzisieren.

Definition 1. *Es sei X ein linearer und normierter Raum. Betrachten wir die Menge X^* aller in X erklärten linearen Funktionale $L(x)$. Diese Menge bildet, bei der gewöhnlichen Definition der Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen, einen linearen Raum. Wenn wir als Norm eines Elementes $L(x)$ aus X^* die Norm der Operation $L(x)$ im Raume X annehmen, so wird der Raum X^* auf diese Weise normiert; bei dieser Normierung ist er vollständig, wenn nur der Raum X diese Eigenschaft besitzt. Wir nennen den Raum X^* den zu X konjugierten Raum*[1].

Definition 2. *Es seien X, Y zwei lineare, normierte Räume und $F(x)$ eine lineare Operation, welche den Raum X auf einen*

[1]) Was die Bedeutung der Ausdrücke: linearer Raum (Vektorbereich), normierter Raum, vollständiger Raum, Operation, additive Operation, stetige Operation anbelangt, verweisen wir auf die Arbeit des Herrn W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen, Stud. Math. I (1928) p. 1—39, insb. p. 1—2. Eine Operation heißt linear, wenn sie additiv und stetig ist. Unter der Norm einer linearen Operation $U(x)$ verstehen wir die kleinste Zahl m, welche die Ungleichung $\| U(x) \| \leqslant m \| x \|$ für alle x erfüllt. Ein Funktional ist eine Operation mit reellem Wertbereich. Im übrigem vergl.: S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math. III (1922) p. 133—181.

Teil des Raumes Y abbildet. Bezeichnen wir mit X^*, Y^* die zu X bzw. Y konjugierten Räume. Wir erklären jetzt eine Operation $F^*(y^*)$, die den Raum Y^* auf einen Teil des Raumes X^* abbildet, folgenderweise: Wenn $y^* \equiv L(y)$ ein Element aus Y^* ist, so ordnen wir ihm das Element $L(F(x))$ des Raumes X^* zu. Diese lineare Operation $F^*(y^*)$ nennen wir die zu $F(x)$ konjugierte Operation[2]).

Im Folgenden tritt ausschließlich der Fall auf, wo $X=Y$ und daher auch $X^*=Y^*$ ist; die entsprechenden linearen Operationen $F(x)$ werden also den Raum X auf seinen Teil abbilden. Genauer: Sie werden der Form $x-U(x)$ sein, wo $U(x)$ eine lineare Operation ist, die den Raum X auf seinen Teil abbildet und die Norm gleich Eins besitzt. Die mit ihnen konjugierten Operationen $F^*(y^*)$ werden natürlich die Gestalt $x^*-U^*(x^*)$ haben, wo $U^*(x^*)$ die zu $U(x)$ konjugierte Operation bezeichnet, und folglich wieder eine solche, die den Raum X^* auf seinen Teil abbildet und deren Norm gleich Eins ist. Man kann nämlich leicht zeigen, daß allgemein die Norm der Operation $F^*(y^*)$ im Raume Y^* der Norm der Operation $F(x)$ im Raume X gleich ist[3]). Bei dem zweiten der weiter unten bewiesenen Sätze setzt man voraus, daß der Raum X einige spezielle Eigenschaften besitzt. Der Kürze folgender Aussagen halber führen wir noch eine Definition ein.

Definition 3. *Es bedeute X einen linearen und normierten Raum. Wenn $\{x_n\}$ eine Folge von Elementen (und x ein Element) dieses Raumes ist, und ferner für jedes lineare Funktional $L(x)$ im Raume X die Folge $\{L(x_n)\}$ (gegen $L(x)$) konvergiert, so sagen wir, daß die Folge $\{x_n\}$ (gegen x) schwachkonvergent ist. Wir sagen weiter, daß eine im Raume X gegebene Menge Z schwachkompakt ist, wenn jede Folge aus ihr herausgegriffener Elemente eine schwachkonvergente Teilfolge enthält. Wir nennen endlich den Raum X schwachvollständig, wenn jede schwachkonvergente Folge ihm angehöriger Elemente gegen ein gewisses Element dieses Raumes schwachkonvergent ist*[4]).

---

[2]) Siehe: S. Banach, Sur les fonctionnelles linéaires II, Stud. Math. I (1929) p. 223—239, insb. p. 235.

[3]) Dies folgt nämlich aus einem Satze des Herrn Banach: Sur les fonctionnelles linéaires, Stud. Math. I (1929) p. 211—216, insb. Théorème 2.

[4]) Vergl. auch: J. Schauder, Invarianz des Gebietes in Funktionalräumen, Stud. Math. I (1929) p. 123—139, insb. p. 123—124.

§ 1.

Satz 1. *Es bedeute X einen linearen, normierten Raum und $U(x)$ eine lineare Operation, die diesen Raum auf seinen Teil abbildet und die Norm Eins besitzt. Wenn p bzw. q die Anzahl der linear unabhängigen Nullstellen der Operation $x-U(x)$ bzw. der mit ihr konjugierten $x^*-U^*(x^*)$ bezeichnet, so ist $p \leqslant q$.*

Beweis. Es genügt offenbar zu zeigen, daß zu je m $(m=1, 2, \ldots)$ linear unabhängigen Lösungen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ der Gleichung $x-U(x)=0$ man m linear unabhängige lineare Funktionale $L_1(x), L_2(x), \ldots L_m(x)$ im Raume X so wählen kann, daß stets $L_n(x-U(x))=0$ für $x \varepsilon X$ wird. Zum Beweise bezeichnen wir mit R den kleinsten linearen Raum, der die Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ enthält und mit S die abgeschlossene Hülle der Menge aller Elemente des Raumes X, die die Form $x-U(x)$ haben. S bildet ersichtlich einen linearen Raum. Wir behaupten, daß *die Räume R, S außer Null kein gemeinsames Element besitzen.* In der Tat, es sei $x_0 \varepsilon RS$. Wir haben also

$$x_0 - U(x_0) = 0 \tag{1}$$

und es existiert außerdem im Raume X eine Elementfolge $\{x_n\}$ von dieser Eigenschaft, daß

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - U(x_n)) = x_0 \tag{2}$$

ist. Es bezeichne $\{\vartheta_n\}$ eine den folgenden Forderungen genügende, sonst aber beliebige reelle Zahlenfolge:

$$0 < \vartheta_n < 1 \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} (1-\vartheta_n)\, x_n = 0. \tag{4}$$

Wir setzen

$$y_n = x_n - \vartheta_n\, U(x_n) \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Da die Norm der Operation $U(x)$ gleich 1 ist und dabei die Bedingung (3) erfüllt ist, so erhalten wir aus (5)

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_n^k\, U^{(k)}(y_n) \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{6}$$

wenn mit $U^{(k)}(x)$ die k-te Iteration der Operation $U(x)$ bezeichnet wird [5]). Indem wir jetzt (1) und (3) berücksichtigen, bekommen wir sofort, wegen (6), die Relationen

$$(1-\vartheta_n)\, x_n = x_0 + (1-\vartheta_n) \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_n^k U^{(k)}(y_n - x_0) \qquad (n=1,2,\ldots);$$

aus ihnen folgt unmittelbar, da jede der Operationen $U^{(k)}(x)$ eine Norm nicht größer als 1 besitzt, daß stets

$$(7) \qquad \|(1-\vartheta_n)\, x_n - x_0\| \leqslant \|y_n - x_0\|$$

ist. Es bestehen ferner, nach (5), die Gleichungen

$$y_n - x_0 = [(x_n - U(x_n)) - x_0] + (1-\vartheta_n)\, U(x_n) \qquad (n=1,2,\ldots);$$

infolgedessen ist — wenn man (2), (4) und die Stetigkeit der Operation $U(x)$ beachtet —

$$\lim_{n\to\infty} (y_n - x_0) = 0,$$

was mit (7)

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} (1-\vartheta_n)\, x_n = x_0$$

ergibt. Es folgt nun aus (4) und (8) die Richtigkeit unserer Behauptung.

Es sei X_0 die Menge aller Elemente x des Raumes X, die man in der Form

$$(9) \qquad x = r + s, \qquad r \varepsilon R, \qquad s \varepsilon S$$

schreiben kann; nach dem vorigen Ergebnis gibt es für jedes Element des betrachteten Raumes höchstens eine Darstellung dieser Art. X_0 bildet offenbar einen linearen Raum. Da der Raum R m-dimensional ist, so gibt es in ihm m linear unabhängige lineare Funktionale $L_1(x), L_2(x), \ldots L_m(x)$. Erweitern wir die Definition dieser Funktionale auf den Raum X_0 folgenderweise: wenn x in der Form (9) geschrieben ist, so setzen wir

$$L_n(x) = L_n(r) \qquad (n=1,2,\ldots m).$$

Die auf diese Weise im Raume X_0 erklärten Funktionale sind linear. Ersichtlich sind sie additiv; es genügt also zu beweisen, daß sie stetig sind. Im Gegenfall existierte — wie leicht zu sehen ist — eine Elementfolge $\{x_n\}$ von dieser Eigenschaft, daß

[5]) Siehe Théorème 7 der unter [1]) zitierten Arbeit des Herrn Banach.

$x_n = r_n + s_n$, $r_n \varepsilon R$, $s_n \varepsilon S$ $(n=1,2,\ldots)$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und dabei stets $\|r_n\| = 1$ ist. Da aber jede beschränkte Menge im Raume R kompakt ist, so enthält die Folge $\{r_n\}$ eine Teilfolge $\{r_{k_n}\}$, die gegen ein gewisses Element r dieses Raumes konvergiert; es folgt daraus, daß die Folge $\{s_{k_n}\}$ auch gegen ein gewisses Element s des Raumes S konvergent ist. Wir haben $0 = r + s$, $r \varepsilon R$, $s \varepsilon S$, was, wegen der Eindeutigkeit der Darstellung in der Form (9), $r = 0$ ergibt; das ist aber mit den Gleichungen $\|r_n\| = 1$ $(n=1,2,\ldots)$ unvereinbar. Nach einem Satze des Herrn Banach kann man nun die Definition der Funktionale $L_1(x), L_2(x), \ldots L_m(x)$ auf den ganzen Raum X erweitern und zwar so, daß die erhaltenen Funktionale linear sind [6]). Es ist trivial, daß diese Funktionale allen Forderungen, die am Anfang formuliert worden sind, genügen. Sie sind im Raume X linear unabhängig, da sie diese Eigenschaft schon im Raume R besitzen. Andererseits ist stets $L_n(x - U(x)) = 0$ für $x \varepsilon X$; in der Tat gehören die Elemente der Form $x - U(x)$ der Menge S an und die betrachteten Funktionale haben, wie aus ihrer Definition sofort folgt, im ganzen Raume S den Wert Null.

Satz 2. *Es sei X ein linearer, normierter und schwachvollständiger Raum, in welchem jede beschränkte Menge schwachkompakt ist. Es bezeichne $U(x)$ eine lineare Operation, die diesen Raum auf seinen Teil abbildet und deren Norm gleich Eins ist. Wenn p bzw. q die Anzahl der linear unabhängigen Nullstellen der Operation $x - U(x)$ bzw. der mit ihr konjugierten $x^* - U^*(x^*)$ bezeichnet, so ist $p = q$.*

Beweis. Wegen des Satzes 1 handelt es sich nur darum, daß $p \geqslant q$ ist (dabei kann man natürlich voraussetzen, daß p endlich ist $(p = 0, 1, \ldots)$). Wäre dies falsch, so existierten im Raume X $p+1$ linear unabhängige lineare Funktionale $L_1(x)$, $L_2(x), \ldots L_{p+1}(x)$, so beschaffen, daß stets $L_n(x - U(x)) = 0$ für $x \varepsilon X$ ist. Es bezeichne R die Menge aller Nullstellen der Operation $x - U(x)$; diese Menge bildet einen linearen Raum. Wir werden jetzt zeigen, daß *es eine Operation $V(x)$ gibt, die den Raum X auf einen Teil des Raumes R abbildet und diese Eigenschaft besitzt, daß stets $L_n(x - V(x)) = 0$ für $x \varepsilon X$ ist.* In der Tat, es sei $x_0 \varepsilon X$. Da die Norm der Operation $U(x)$

[6]) Siehe den unter [3]) zitierten Satz.

gleich 1 ist, so besitzt die Gleichung

$$(1) \qquad x_0 = x_n - \left(1 - \frac{1}{n}\right) U(x_n)$$

bei jedem natürlichen n genau eine Lösung x_n und dabei ist

$$(2) \qquad x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k U^{(k)}(x_0),$$

wenn $U^{(k)}(x)$ die k-te Iteration der Operation $U(x)$ bezeichnet[6]). Da weiter die Norm einer jeden Operation $U^{(k)}(x)$ nicht größer als 1 ist, so folgern wir aus (2), daß

$$\left\| \frac{1}{n} x_n \right\| \leqslant \| x_0 \| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ist. Die Folge $\left\{ \frac{1}{n} x_n \right\}$ ist also beschränkt und daher enthält sie eine Teilfolge $\left\{ \frac{1}{k_n} x_{k_n} \right\}$ die gegen ein gewisses Element des Raumes X — wir bezeichnen es mit $V(x_0)$ — schwach konvergiert. Die so erklärte Operation $V(x)$ bildet den Raum X auf einen Teil des Raumes R ab. Es sei nämlich $x_0 \varepsilon X$ und behalten wir die vorigen Bezeichnungen bei. Wegen der Linearität der Operation $U(x)$ ist die Folge $\left\{ \frac{1}{k_n} U(x_{k_n}) \right\}$ gegen $U(V(x_0))$ schwachkonvergent. Da keine Elementfolge gegen zwei verschiedene Elemente schwachkonvergent sein kann[7]), so genügt es noch zu zeigen, daß die Folge $\left\{ \frac{1}{k_n} U(x_{k_n}) \right\}$ gegen $V(x_0)$ schwach konvergiert. Das folgt aber sofort aus den Relationen

$$\frac{1}{n} U(x_n) = \frac{1}{n} x_n + \frac{1}{n^2} U(x_n) - \frac{1}{n} x_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

die man, unter Bezugnahme auf (1), leicht verifiziert. Wir behaupten jetzt, daß die Operation $V(x)$ auch der weiteren Bedingung $L_n(x - V(x)) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots p+1)$ für $x \varepsilon X$ genügt. Zum Beweise bemerken wir, daß nach (1)

$$x_0 - [x_n - U(x_n)] = \frac{1}{n} U(x_n)$$

[7]) Das ist eine Folgerung aus dem unter [3]) zitierten Satze.

für $n = 1, 2, \ldots$ ist und daher die Folge $\{x_0 - [x_{k_n} - U(x_{k_n})]\}$ gegen $V(x_0)$ schwach konvergiert. Infolgedessen haben wir z. B.

$$\lim_{n \to \infty} L_1(x_0 - [x_{k_n} - U(x_{k_n})]) = L_1(V(x_0)),$$

was mit

$$L_1(x_0 - [x_n - U(x_n)]) = L_1(x_0) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

die Gleichung

$$L_1(x_0 - V(x_0)) = 0$$

ergibt. Analog offenbar für andere der betrachteten Funktionale. Betrachten wir die Funktionale $L_1(x), L_2(x), \ldots L_{p+1}(x)$ im Raume R. Da der Raum R p-dimensional ist, so können diese Funkionale in ihm nicht linear unabhängig sein. Es ist also

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{p+1} c_n L_n(x) = 0$$

für $x \varepsilon R$, wobei $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$ reelle Zahlen sind, die nicht alle verschwinden. Die Operation $V(x)$ bildet aber den ganzen Raum X auf einen Teil von R ab; daraus schließen wir, wegen (3), daß

$$\sum_{n=1}^{p+1} c_n L_n(V(x)) = 0$$

für $x \varepsilon X$ ist. Es genügt jetzt noch zu bemerken, daß stets $L_n(V(x)) = L_n(x)$ im Raume X ist, um sich davon zu überzeugen, daß die Relation (3) für alle x, die dem Raume X angehören, ihre Gültigkeit beibehält. Die Funktionale $L_1(x), L_2(x), \ldots L_{p+1}(x)$ sind also im Raume X linear abhängig, was der Voraussetzung widerspricht.

Bemerkung. Setzen wir voraus, daß der Raum X und die in ihm erklärte Operation $U(x)$ den Bedingungen des Satzes 1 genügen; es sollen außerdem p, q die dortige Bedeutung haben. Es bezeichne R die Menge aller Nullstellen der Operation $x - U(x)$ und S die abgeschlossene Hülle der Menge aller Elemente des Raumes X der Form $x - U(x)$. Wie bei dem Beweise des Satzes 1 zeigt man, daß die linearen Räume R, S nur Null als gemeinsames Element besitzen d. h., daß jedes Element x des betrachteten Raumes höchstens auf eine Weise in der Form $x = r + s$, $r \varepsilon R$, $s \varepsilon S$ geschrieben werden kann. Es sei X_0 der lineare Raum, den die Elemente, die eine solche Darstellung zulassen, bilden. Es sind zwei Fälle möglich:

1. $X_0 = X$. *Dann ist auch* $p = q$. Im Gegenfall nämlich wäre, wegen des Satzes 1, $p < q$. Es existieren im Raume X $p+1$ linear unabhängige lineare Funktionale $L_1(x), L_2(x), \dots L_{p+1}(x)$ so beschaffen, daß stets $L_n(x - U(x)) = 0$ für $x \varepsilon X$ ist. Da der Raum R p-dimensional ist, so sind diese Funktionale in ihm linear abhängig. Es ist also

$$\sum_{n=1}^{p+1} c_n L_n(x) = 0$$

für $x \varepsilon R$, wobei $c_1, c_2, \dots c_{p+1}$ reelle Zahlen sind, die nicht alle verschwinden. Wenn $x \varepsilon X$ und $x = r + s$, $r \varepsilon R$, $s \varepsilon S$, so ist stets $L_n(x) = L_n(r)$; daraus folgern wir sofort, daß die Gleichung (1) im Raume X erfüllt ist. Das widerspricht aber der Voraussetzung, nach der die betrachteten Funktionale im Raume R linear unabhängig sind.

2. $X_0 \neq X$. *Dann ist* $p < q$, *wenn nur* p *endlich ist.* Man kann nämlich, wie aus dem Beweise des Satzes 1 folgt, im Raume X p lineare Funktionale so wählen, daß sie schon im Raume R linear unabhängig sind und dabei stets $L_n(x - U(x)) = 0$ für $x \varepsilon X$ ist. Da der Raum X_0 in X abgeschlossen ist, so kann man weiter, nach einem Satze des Herrn Banach, im Raume X ein lineares Funktional $L_{p+1}(x) \not\equiv 0$ erklären, welches im Raume X_0 gleich Null ist[8]). Die Funktionale $L_1(x), L_2(x), \dots L_{p+1}(x)$ sind nun im Raume X linear unabhängig und es ist stets $L_n(x - U(x)) = 0$ für $x \varepsilon X$. Es muß also $q \geqslant p + 1$ sein.

Wenn der Raum X außerdem schwachvollständig und jede beschränkte Menge in ihm schwachkompakt ist, so findet der Fall 1 statt. Man kann nämlich bei diesen Voraussetzungen, nach dem Beweise des Satzes 2, eine Operation $V(x)$ im Raume X erklären, die den Raum X auf einen Teil von R abbildet und dabei die folgende Eigenschaft besitzt: wenn $L(x)$ ein lineares Funktional im Raume X ist und $L(x - U(x)) = 0$ für $x \varepsilon X$ gilt, so haben wir auch $L(x - V(x)) = 0$ im ganzen Raume X. Infolgedessen verschwindet jedes im Raume X erklärte lineare Funktional, das im Raume X_0 den Wert Null besitzt, identisch. Nach dem Vorigen muß also $X_0 = X$ sein.

[8]) Siehe die unter [3]) zitierte Arbeit, Théorème 4.

§ 2.

Wie wir am Anfang dieser Note angekündigt haben, bringen wir jetzt eine Anwendung der vorigen Sätze auf die Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen im Raume der quadratisch integrierbaren Funktionen.

Satz 3. *Es sei* X *der Raum der in* $\langle 0, 1 \rangle$ *erklärten, reellen und quadratisch integrierbaren Funktionen* $f(t)$. *Es bezeichne* $K(t, s)$ *eine in* $\langle 0, 1; 0, 1 \rangle$ *definierte, reelle und quadratisch integrierbare Funktion, für die*

$$\iint\limits_{\langle 0,1;\, 0,1 \rangle} K^2(t, s)\, dt\, ds \leqslant 1$$

ist. Dann besitzt die Gleichung

$$f(t) - \int_0^1 K(t, s) f(s)\, ds = 0$$

genau so viele linear unabhängige Lösungen, wie die Gleichung

$$f(t) - \int_0^1 K(s, t) f(s)\, ds = 0.$$

Beweis. Der betrachtete Raum X besitzt, wie bekannt, die im Satze 2 verlangten Eigenschaften. Setzen wir in ihm

$$U(x) = \int_0^1 K(t, s) f(s)\, ds,$$

wenn $x \equiv f(t)$ ist. Die lineare Operation $U(x)$ bildet den Raum X auf seinen Teil ab und besitzt dabei, wie aus (1) und der Schwarzschen Ungleichung sofort folgt, eine Norm nicht größer als 1. Es genügt nun die bestehenden Tatsachen über die Gestalt der zu $U(x)$ konjugierten Operation zu berücksichtigen und den Satz 2 anzuwenden, um den Beweis zu Ende zu führen.

§ 3.

Wir fügen hier noch einige Bemerkungen an über die Wesentlichkeit der in den Sätzen 1 und 2 angegebenen Bedingungen. Vor allem wollen wir bemerken, daß Herr F. Riesz den folgenden Satz bewiesen hat: Wenn $U(x)$ eine im Raume der stetigen Funktionen erklärte, lineare und vollstetige Operation ist, die ihn auf seinen Teil abbildet, so besitzt die Operation $x-U(x)$ so viele linear unabhängige Nullstellen, wie die zu ihr konjugierte Operation $x^*-U^*(x^*)$.[8])

Gleichzeitig erwähnt Herr Riesz, daß dieser Satz auch in vielen anderen linearen, normierten und vollständigen Räumen seine Gültigkeit behält. Nun hat Herr J. Schauder in einer in dieser Zeitschrift zu erscheinenden Arbeit den Beweis des Satzes des Herrn Riesz in ganz allgemeinen Räumen der zitierten Art erbracht.

Wenn wir aber die Voraussetzung der Vollstetigkeit der Operation $U(x)$ weglassen, so ist der Satz falsch. Man kann nämlich beweisen:

1. Wenn r eine reelle Zahl ist und $r>1$, ferner p, q zwei beliebige aus der Folge $\infty, 0, 1, \dots$ herausgegriffene Werte sind, dann gibt es eine im Hilbertschen Raume erklärte lineare Operation $U(x)$, die ihn auf seinen Teil abbildet, die Norm gleich r besitzt und dabei haben die Operationen $x-U(x)$ bzw. $x^*-U^*(x^*)$ p bzw. q linear unabhängige Nullstellen.

2. Im Raume der konvergenten Zahlenfolgen ist jede beschränke Menge schwachkompakt; dieser Raum ist aber nicht schwachvollständig. Im Raume der absolut konvergenten Zahlenreihen findet der umgekehrte Sachverhalt statt. Wenn nun p, q zwei beliebige aus der Folge $\infty, 0, 1, \dots$ herausgegriffene Werte sind und $p \leqslant q$ ist, so existiert in jedem der angegebenen Räume je eine lineare Operation $U(x)$, die diesen Raum auf seinen Teil abbildet, die Norm 1 besitzt und dabei ist die Anzahl der linear unabhängigen Nullstellen der Operation $x-U(x)$ bzw. $x^*-U^*(x^*)$ gleich p bzw. q.

Wir bemerken endlich, daß die Sätze 1 und 2 unter der zusätzlichen Bedingung, daß der Raum X *separabel* ist, wie auch der aus ihnen folgende Satz 3, unabhängig auf ganz anderem Wege früher von Herrn S. Banach bewiesen worden sind; diese Resultate sind noch nicht veröffentlicht.

[8]) F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Math. XLI (1918) p. 71—98, insb. p. 96—98.

(Reçu par la Rédaction le 11. 10. 1929).

Sur la probabilité de la convergence de séries.

par

H. STEINHAUS (Lwów).

Première communication.

Il s'agit du problème suivant:

Étant donnée une suite de nombres complexes $\{a_n\}$, on demande quelle est la probabilité, que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\varphi_n} \qquad (i=\sqrt{-1})$$

soit convergente, quand l'argument réel φ_n est déterminé par l'hasard; on suppose que la probabilité que φ_n appartienne à un ensemble (mesurable „L") situé dans $\langle 0, 2\pi\rangle$ est égale à la mesure de cet ensemble divisée par 2π et que le choix de chacune des phases φ_n est indépendant du résultat des choix portant sur les autres phases φ_m $(m \neq n)$.

Le théorème qui résout la question, dit que *la probabilité cherchée est égale à l'unité, si la somme* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^2|$ *est finie, et qu'elle est zéro, au cas contraire.* Ce théorème — que nous voulons établir dans cette Note — est analogue au résultat d'un travail antérieur[1]); là il était question d'une série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ à termes réels donnés et on cherchait la probabilité de la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n$, en supposant que l'hasard fournit les signes $\pm$

[1]) Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure, Fund. Math. 4 (1923) p. 286—310.