Bemerkung zu meiner Arbeit „Über die Nullstellen linearer Operationen" [1]

von

S. MAZUR (Lwów).

In meinen oben zitierten Arbeit beweise ich den folgenden Satz. *Es sei X ein linearer, normierter und schwachvollständiger Raum, in welchem jede beschränkte Menge schwachkompakt ist. Es bezeichne $U(x)$ eine lineare Operation, die diesen Raum auf seinen Teil abbildet und deren Norm gleich Eins ist. Wenn p bzw. q die Anzahl der linear unabhängigen Nullstellen der Operation $x - U(x)$ bzw. der mit ihr konjugierten $x^* - U^*(x^*)$ bezeichnet, so ist $p = q$* [2].

Als eine Anwendung dieses Satzes bekomme ich weiter das folgende Resultat: *Es sei X der Raum der in $<0,1>$ erklärten, reellen und quadratisch integrierbaren Funktionen $f(t)$. Es bezeichne $K(t,s)$ eine in $<0,1;0,1>$ definierte, reelle und quadratisch integrierbare Funktion, für die*

$$\iint\limits_{<0,1;\,0,1>} K^2(t,s)\,dt\,ds \leqslant 1$$

ist. Dann besitzt die Gleichung

$$f(t) - \int_0^1 K(t,s) f(s)\,ds = 0 \tag{1}$$

genau so viele linear unabhängige Lösungen, wie die Gleichung

$$f(t) - \int_0^1 K(s,t) f(s)\,ds = 0 \tag{2}$$ [3].

[1]) Stud. Math. 2 (1930) p. 11—20.
[2]) Satz 2., p. 15.
[3]) Satz 3., p. 19.

In dieser Fassung ist aber (wie mich Herr Z. W. Birnbaum aufmerksam machte) dieses Resultat bekannt; die Operation

$$U(x) = \int_0^1 K(t,s) f(s)\, ds \qquad (x \equiv f(t)) \tag{3}$$

ist nämlich unter der Voraussetzung der Existenz des Integrals $\iint\limits_{\langle 0,1;0,1\rangle} K^2(t,s) f(s)\, dt\, ds$ vollstetig. Wir wollen daher darauf hinweisen, daß die Gleichung (3) im betrachteten Raume dann und nur dann ein lineares Funktional mit einer Norm $\leqslant 1$ definiert, wenn für jeden Punkt dieses Raumes $x \equiv f(t)$ die Relation

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 K(t,s) f(s)\, ds \right)^2 dt \leqslant \int_0^1 f^2(t)\, dt \tag{4}$$

stattfindet. Nach meinem Satz haben also die Gleichungen (1) und (2) die gleiche Anzahl linear unabhängiger Lösungen auch dann, wenn bloß die Ungleichung (4) stets erfüllt ist. Wenn aber die Funktion $K(t,s)$ der letztgenannten Bedingung genügt, so muß sie nicht quadratisch integrierbar sein. Ein Beispiel dafür bietet die folgende Funktion:

$$K(t,s) = \begin{cases} 2^n & \text{für } 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < t, s < 1 - \frac{1}{2^n}, \\ 0 & \text{„ alle anderen } t, s. \end{cases}$$

(Reçu par la Rédaction le 16. 10. 1930).