Nullen ersetzt und definieren zunächst eine gleichmäßige Vorzeichenverteilung $\{\bar{\varepsilon}_\nu\}$, für welche $\sum \bar{\varepsilon}_\nu \bar{d}_\nu$ konvergiert.

Um eine derartige Vorzeichenverteilung zu erhalten, genügt es sich auf diejenigen Verteilungen zu beschränken, in welchen $\varepsilon_{2\nu-1}$ und $\varepsilon_{2\nu}$ stets verschieden sind. Jede derartige Verteilung ist offenbar gleichmäßig und man hat

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \bar{\varepsilon}_\nu \bar{d}_\nu = \pm (\bar{d}_1 - \bar{d}_2) \pm (\bar{d}_3 - \bar{d}_4) \pm \ldots \pm (\bar{d}_{2n-1} - \bar{d}_{2n}),$$

wobei die vor den Klammern stehenden Vorzeichen noch beliebig sind. Durch passende Wahl dieser Vorzeichen kann man offenbar erreichen, daß die Folge der Teilsummen gerader Ordnung und daher auch (wegen $d_n \to 0$) die Folge aller Teilsummen von $\sum \bar{\varepsilon}_\nu \bar{d}_\nu$ konvergent ist.

Wie leicht ersichtlich, lassen sich die Vorzeichen $\bar{\varepsilon}_{k_\nu}$ in beliebiger Weise durch andere ersetzen, ohne daß dadurch die Gleichmäßigkeit der Verteilung gestört wird.

Wir versehen die Glieder der divergenten Reihe $\sum d_{k_\nu}$ mit Vorzeichen ε_{k_ν} derart, daß

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_{k_\nu} d_{k_\nu} = l - s, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_{k_\nu} d_{k_\nu} = L - s$$

ist, wo l, L die vorgegebenen Hauptlimites und s die Summe der konvergenten Reihe $\sum \bar{\varepsilon}_\nu \bar{d}_\nu$ bedeuten.

Es bezeichne $\{\varepsilon_\nu\}$ diejenige Vorzeichenverteilung, welche aus $\{\bar{\varepsilon}_\nu\}$ entsteht, indem man jedes $\bar{\varepsilon}_{k_\nu}$ durch ε_{k_ν} ersetzt. Diese Verteilung ist nach einer soeben gemachten Bemerkung gleichmäßig. Ferner ist $\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu d_\nu$ immer die Summe einer Partialsumme von $\sum \bar{\varepsilon}_\nu \bar{d}_\nu$ und einer Partialsumme von $\sum \varepsilon_{k_\nu} d_{k_\nu}$, woraus leicht

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu d_\nu = l, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu d_\nu = L$$

folgt.

(Reçu par la Rédaction le 11. 10. 1930).

Le système orthogonal de M. Rademacher

par

S. KACZMARZ et H. STEINHAUS (Lwów).

Cet article est un produit d'une collaboration de plusieurs personnes qui ont contribué par leurs travaux récents à élucider les propriétés de séries dites de M. Rademacher. Nos propres recherches ont été parallèles et contemporaines à celles enterprises sur des sujets analogues par MM. Paley et Zygmund à Cambridge. Par des lettres de M. Zygmund, nous avons été tenu au courant de leurs résultats publiés en partie dans les Proceedings of the Cambridge Philosophical Society [1]). Il s'agit là de l'influence qu'un facteur, de module unité, dont le signe dépend de l'hasard, exerce sur la convergence de séries. Les recherches de MM. Rademacher [2]), Khintchine et Kolmogoroff [3]) sur ces problèmes, ainsi que les travaux de M. Zygmund [4]) et M. Kolmogoroff [5]) sur les séries trigonométriques lacunaires doivent être rappelés ici; la notion de la mesure dans l'espace à une infinité des dimensions et les fonctions orthogonales, introduites par M. Steinhaus [6]) tout récemment, ont servi à leur

---

[1]) R. E. A. C. Paley B. A. and A. Zygmund, On some series of functions (1), Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 26 (1930) p. 337—357.

[2]) Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Math. Ann. 87 (1922) p. 112—138.

[3]) Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, Recueil Math. de Moscou 32 (1925) p. 668—677.

[4]) Sur les séries trigonométriques lacunaires, Journal of the Lond. Math. Soc. 5 (1930) p. 138—145; On the convergence of lacunary trigonometric series, Fund. Math. 16 (1930) p. 90—107.

[5]) Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, Fund. Math. 5 (1924) p. 96—97.

[6]) Sur la probabilité de la convergence de séries, première communication, Stud. Math. 2 (1930) p. 21—39.

tour à MM. Paley et Zygmund dans leurs recherches ultérieures de ce genre [7]).

Les résultats de M. Zygmund [8]) ont donné à M. Banach [9]) l'occasion de montrer encore une fois l'éfficacité de l'analyse fonctionnelle appliquée au problème de séries orthogonales lacunaires et nous avons — à notre tour — vérifié que les résultats de M. Banach s'appliquent bien au système que nous considérons ici. Le système orthogonal de M. Walsh [10]) étudié de plus près par M. Kaczmarz [11]) (qui a remarqué que l'on peut s'en servir pour complèter le système de M. Rademacher) a rendu cette vérification presque immédiate.

Nous appellons *système de M. Rademacher* le système orthogonal et normé $\{\varphi_n\}$

$$\varphi_n(x) = \text{sign } (\sin\, 2^n \pi x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Nous résumons les propriétés principales de ce système dans une série de théorèmes; parmi ceux-là les théorèmes 1, 2, et 4 sont dûs à M. Steinhaus, le théorème 3 est connu; sa première partie a été trouvée par M. Rademacher [12]), la deuxième par M. Kolmogoroff [13]); la démonstration que nous en donnons içi est due à M. Kolmogoroff [14]) pour la première et à M. Zygmund [15]) pour la deuxième partie. Le théorème 5 a été suggéré par les travaux de M. Zygmund sur les séries lacunaires; la démonstration (de M. Steinhaus) repose sur une inégalité de M. Khintchine [17]).

Le théorème 6 a été démontré par M. Kaczmarz; l'inégalité de M. Khintchine est utilisée encore une fois. Le théorème 7, qui établit une relation entre les sommes partielles des séries de Haar et des séries de Walsh, et le théorème 8 sont dûs à M. Kaczmarz. Ayant tout ce qui précède, il nous a été facile de déduire les théorèmes 9 et 10; les théorèmes 11 et 12, ajoutés par M. Steinhaus, sont une conclusion immédiate.

Dans tout ce qui suit, les coefficients sont réels et l'intégration est celle de Lebesgue; $|A|$ signifie toujours la mesure (L) de A.

Théorème 1. *La condition nécessaire et suffisante, pour que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

soit convergente dans l'intervalle entier $\langle 0,1 \rangle$, *est la convergence de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|.$$

Démonstration. Il n'ya qu'à démontrer la nécessité. Si la condition n'était pas remplie, on pourrait déterminer les signes $+\,-$ de manière que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n$$

soit divergente vers $+\infty$. Si ε_n est *zéro* ou *un*, suivant que c_n est muni du signe $+$ ou $-$ et si

$$0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots = \xi \tag{2}$$

est un développement dyadique (vraiment infini), alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(\xi) = +\infty. \tag{3}$$

Ce raisonnement est en défaut quand le développement fournit une fraction dyadique. On n'a alors qu'à changer certains ε du développement (2). Les indices n_j des ε_{n_j} qui auront à subir le changement, seront à déterminer de manière que la somme

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_{n_j}|$$

soit finie; on mettra une infinité des fois 1 pour ε_{n_j} et une infi-

---

[7]) On some series of functions (2), Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 26 (1930) p. 458—474.

[8]) Lus avec permission de l'envoyeur dans les séances de la section de Lwów de la Soc. Pol. Math.

[9]) Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen, Stud. Math. 2 (1930) p. 207—220.

[10]) A closed set of normal orthogonal functions, American Journ. of Math. 55 (1923) p. 5—24.

[11]) Über ein Orthogonalsystem, Comptes Rendus du I Congrès des mathématiciens des pays slaves 1929 (1930) p. 189—192.

[12]) loc. cit [2]).

[13]) loc. cit [8]).

[14]) loc. cit [3]).

[15]) loc. cit [8]). Voir aussi [7]), lemma 11.

[16]) loc. cit [4])

[17]) Über dyadische Brüche, Math. Zeitschr. 18 (1923) p. 109—116; à la p. 112, l'intégrale de la 4-ième ligne est majorée par l'expression de la 12-ième ligne: c'est l'inégalité en question.

nité des fois 0. On aura alors $\varphi_n(\xi) = \pm 1$ pour tous les n et (3) devient valide. Cet artifice ne réussit pas quand c_n ne tend pas vers zéro; en ce cas la série (1) est divergente sauf pour les fractions dyadiques x, ce qui achève la démonstration.

Théorème 2. *En désignant par $s_n(x)$ les sommes partielles de* (1) *et par a, b deux nombres (finis ou infinis), satisfaisant à l'inégalité $a \leqslant b$, et en supposant*

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 0,$$

on trouve dans tout sousintervalle de $\langle 0, 1 \rangle$ un ensemble de la puissance du continu de points ξ remplissant les relations

(5) $$\liminf_{n\to\infty} s_n(\xi) = a, \quad \limsup_{n\to\infty} s_n(\xi) = b.$$

Démonstration. Il y a $\mathfrak{c}$ possibilités différentes de choisir les signes $\pm$ de manière que l'on ait

$$\liminf_{\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pm c_k = a, \quad \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pm c_k = b;$$

on peut déterminer arbitrairement un nombre fini de ces signes. Quand on fait correspondre, comme auparavant, à cette suite de signes, un nombre (2), alors on aura (5), pour tout ξ ainsi défini, sauf pour les ξ qui sont des fractions dyadiques et qui, formant un ensemble dénombrable ou fini, ne diminuent pas la puissance.

Remarque. La série (1) possède, sous la condition (4), $\mathfrak{c}$ points de divergence (et $\mathfrak{c}$ points de divergence franche) dans tout sousintervalle de $\langle 0, 1 \rangle$; ceci est une conclusion immédiate du théorème précédent.

Théorème 3. *La série* (1) *est convergente ou divergente dans $\langle 0, 1 \rangle$ presque partout, suivant que la somme*

(6) $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

est finie ou infinie.

La première partie de cet important théorème est due à M. Rademacher, la deuxième à M. Kolmogoroff, à qui nous empruntons la démonstration de la première partie, en adoptant pour la deuxième la méthode de M. Zygmund. Il nous semble que l'on obtient ainsi une démonstration assez simple pour que sa reproduction en cet endroit soit justifiée.

Démonstration. a) Soit D l'ensemble de points de divergence de (1) et $|D| > 0$. Il existe alors un $\varepsilon > 0$ et un ensemble D_ε tel que $|D_\varepsilon| > 0$ et

$$\limsup_{p\to\infty} |s_p(x) - s_n(x)| > \varepsilon, \text{ pour } x \in D_\varepsilon,$$

quelque soit n. Soit $n = n_0$; à tout $x \in D_\varepsilon$, il correspond un $p(x)$, de manière que

$$|s_{p(x)}(x) - s_{n_0}(x)| > \varepsilon;$$

soit D^* l'ensemble de tous les x auxquels correspond un $p(x)$; on aura

$$|D^*| \geqslant |D_\varepsilon| > 0.$$

Définissons maintenant Z_1 par l'inégalité

$$|s_{n_0+1}(x) - s_{n_0}(x)| > \varepsilon, \text{ pour } x \in Z_1,$$

et Z_k $(k > 1)$ par les inégalités simultanées

$$|s_{n_0+k}(x) - s_{n_0}(x)| > \varepsilon, \ |s_{n_0+k-1}(x) - s_{n_0}(x)| \leqslant \varepsilon, \ \ldots$$
$$\ldots |s_{n_0+1}(x) - s_{n_0}(x)| \leqslant \varepsilon, \text{ pour } x \in Z_k,$$

et nous aurons

$$D^* = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k, \quad Z_i \times Z_k = 0, \text{ pour } i \neq k.$$

Pour un q assez grand, ceci implique

(7) $$|Z_1 + Z_2 + \ldots Z_q| > \frac{1}{2} |D^*| > 0.$$

Pour $k < q$, on aura

$$\int_{Z_k} [s_{n_0+q}(x) - s_{n_0}(x)]^2 dx = \int_{Z_k} [s_{n_0+q} - s_{n_0+k}]^2 dx + \int_{Z_k} [s_{n_0+k} - s_{n_0}]^2 dx$$

car l'intégrale

$$\int_{Z_k} [s_{n_0+q}(x) - s_{n_0+k}(x)] \ [s_{n_0+k}(x) - s_{n_0}(x)]\, dx$$

disparaît; pour s'en persuader, décomposons Z_k en intervalles partiels, de manière que $s_{n_0+k} - s_{n_0}$ soit constant dans chaque intervalle; l'intégrale en question devient une somme des intégrales toutes nulles, car l'intégrand $s_{n_0+q}(x) - s_{n_0+k}(x)$ ne contient que des termes $c_n \varphi_n(x)$ d'indice $n > n_0 + k$, qui donnent zéro quand on les intègre sur un intervalle de constance de $\varphi_{n_0+k}(x)$; or, nos intervalles partiels peuvent être décomposés en des tels intervalles. Il s'ensuit

$$\int_{Z_k}[s_{n_0+q}(x)-s_{n_0}(x)]^2\,dx \geqslant \int_{Z_k}[s_{n_0+k}(x)-s_{n_0}(x)]^2\,dx \geqslant \varepsilon^2\,|Z_k|,$$

$$\sum_{j=1}^{q} c^2_{n_0+j} = \int_0^1 [s_{n_0+q}(x)-s_{n_0}(x)]^2\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{q}\int_{Z_k}[s_{n_0+q}-s_{n_0}]^2\,dx$$

$$\geqslant \varepsilon^2\sum_{k=1}^{q}|Z_k| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2\,|D^*| > \frac{1}{2}\varepsilon^2\,|D_\varepsilon| > 0;$$

ε et D_ε étant indépendants de n_0, la série (6) est divergente, c. q. f. d.

b) Si (1) est convergente dans un ensemble de mesure positive, alors cette série est uniformement convergente dans un ensemble E de mesure positive et l'on a

$$|s_n(x)| < M,$$

pour tout $x \in E$ et tout n, donc

$$|s_{n+p}(x)-s_n(x)| < 2M, \tag{8}$$

pour tout $x \in E$ et tous les n et p. Remarquons maintenant que l'intégrale

$$\int_0^1 \varphi_j(x)\,\varphi_k(x)\,\varphi_l(x)\,\varphi_m(x)\,dx \qquad (j \leqslant k \leqslant l \leqslant m) \tag{9}$$

n'est différente de zéro que dans le cas

$$j=k,\ l=m$$

(et il est évident qu'elle est égale à l'unité dans ce cas). En effet, pour $j \neq k$, $l=m$, l'intégrale devient

$$\int_0^1 \varphi_j(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0$$

et de même dans les cas $j=k$, $l \neq m$, et $k=l \neq m$; dans le cas $j<k<l<m$, on introduit les intervalles $\Delta_r \equiv \langle \frac{r}{2^l}, \frac{r+1}{2^{l+1}} \rangle$ $(r=0,1\ldots 2^{l+1}-1)$ et on écrit l'intégrale (9) comme

$$\sum_r \int_{\Delta_r} \varphi_j(x)\,\varphi_k(x)\,\varphi_l(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \sum_r \delta_r \int_{\Delta_r}\varphi_m(x)\,dx,$$

car φ_j, φ_k et φ_l sont constantes dans chaque Δ_r; comme $\int_{\Delta_r}\varphi_m(x)\,dx = 0$, à cause de $m>l$, la remarque est justifiée.

(8) donne

$$\int_E [s_{n+p}(x)-s_n(x)]^2\,dx \leqslant 4M^2\,|E|,$$

$$4M^2|E| \geqslant \int_E\left(\sum_{n+1}^{n+p} c_i\varphi_i(x)\right)^2 dx = |E|\sum_{n+1}^{n+p} c_i^2 \tag{10}$$

$$+\ 2\sum_{n+1 \leqq i<k \leqq n+p} c_i c_k \int_E \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx.$$

Le système de tous les produits

$$\varphi_i(x)\,\varphi_k(x) \qquad (i<k)$$

est, d'après notre remarque, un système orthogonal et il est évident qu'il est normé; il s'ensuit que, pour $n>N(E)$,

$$\sum_{n+1 \leqq i<k \leqq n+p}\left[\int_E \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx\right]^2 < |E|^2/9,$$

ce qui implique, pour la somme double $\sum$ de (10),

$$\left|\sum\right| \leqslant \frac{|E|}{3}\cdot\sqrt{\sum c_i^2 c_k^2} \leqslant \frac{|E|}{3}\cdot\sum_{n+1}^{n+p} c_i^2$$

et, à cause de (10),

$$4M^2|E| \geqslant \frac{|E|}{3}\sum_{n+1}^{n+p} c_i^2,$$

$$\sum_{n+1}^{n+p} c_i^2 \leqslant 12M^2,$$

pour $n>N(E)$ et pour tous les p; ceci est équivalent à la convergence de (6).

Théorème 4. *Si*

$$\limsup_{n\to\infty} s_n(\xi) > a,$$

pour $\xi = \xi_0$, *alors la mesure, de l'ensemble des* ξ *vérifiant cette inégalité, est positive.* (Un théorème analogue pour la limite inférieure porte sur une inégalité contraire).

Démonstration. L'hypothèse fournit, pour un certain n_0,

$$\sum_{k=1}^{n_0} c_k \varphi_k(\xi_0) > a$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n_0} c_k \varphi_k(\xi) > a,$$

pour tous les ξ d'un intervalle de longueur $1/2^{n_0}$; désignons cet intervalle par

$$\left(\frac{h}{2^{n_0}}, \frac{h+1}{2^{n_0}}\right),$$

h étant un entier approprié. Soient ξ_1, ξ_2 deux points de cet intervalle, symmétriques par rapport à son milieu; les termes de la série

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} c_k \varphi_k(\xi_1)$$

changent de signe, sans changer de module, quand on y remplace ξ_1 par ξ_2. Il s'ensuit que l'on a, dans un au moins de deux points $\xi = \xi_1$, $\xi = \xi_2$, l'inégalité

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=n_0+1}^{n} c_k \varphi_k(\xi) \geqslant 0$$

et, par là,

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(\xi) > a. \tag{11}$$

L'ensemble des ξ, où (11) est vérifié, est donc d'une mesure qui est au moins $\dfrac{1}{2^{n_0+1}} > 0$.

Remarque. La démonstration permet de vérifier aussi que l'ensemble en question est de mesure positive dans tout intervalle avec lequel il a des points intérieurs en commun. Cette

remarque, et les théorèmes qui précèdent, suffisent à faire voir que, p. e., la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sign}(\sin 2^k \pi x)}{k} \tag{12}$$

est convergente presque partout dans $\langle 0,1 \rangle$. En admettant $+\infty$ et $-\infty$ comme des sommes possibles et en définissant arbitrairement cette somme aux autres points de divergence, on obtient une fonction qui prend dans tout intervalle[18]) toutes les valeurs finies et infinies et même toutes $\mathfrak{c}$ fois, et qui est essentiellement non-bornée dans tout intervalle. Les points, où les limites (inférieure et supérieure) de sommes partielles prennent deux valeurs différentes données d'avance ($a < b$), forment dans tout intervalle un ensemble de la puissance du continu. On peût affirmer la même chose de l'ensemble des points où la somme de la série est infinie. Quand on remplace k par $\sqrt{k}$ dans les dénominateurs de (12), on obtient une série presque partout divergente. En lui donnant la somme zéro dans les points de divergence, on obtient une fonction égalant zéro presque partout; néanmoins cette fonction prend toute valeur, dans tout sousintervalle de $\langle 0, 1 \rangle$, $\mathfrak{c}$ fois.

Il est bien probable que l'on pourrait obtenir ces résultats aussi en supprimant le symbole *sign* dans (12).

Théorème 5. *Soit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$$

et $f(x)$ *la somme de* (1) *d'après le théoreme* 3. *On aura*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{\lambda [f(x) - s_n(x)]^2} dx = 1 \tag{13}$$

quelque soit le nombre réel λ; (s'il est $\geqslant {}^1/_e$, l'existence de l'intégrale n'est assurée que pour des grands n).

Démonstration. L'égalité formelle

$$e^{\lambda [f(x) - s_n(x)]^2} = 1 + \lambda [f(x) - s_n(x)]^2 + \frac{\lambda^2}{2!} [f(x) - s_n(x)]^4 + \dots,$$

[18]) Nous nous dispensons de répéter qu'il ne s'agit que des intervalles situés dans $\langle 0,1 \rangle$. La même remarque est sousentendue dans l'expression *„presque partout"*.

intégrée, conduit à l'inégalité

$$\left|\int_0^1 e^{\lambda[f(x)-s_n(x)]^2}\,dx-1\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^k}{k!}\cdot\int_0^1\left[\sum_{p=n+1}^{\infty}c_p\,\varphi_p(x)\right]^{2k}dx\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^k(k+1)^k}{k!}\left(\sum_{p=n+1}^{\infty}c_p^2\right)^k,$$

en employant l'inégalité de M. Khintchine [19])

$$\int_0^1\left(\sum_p c_p\,\varphi_p(x)\right)^{2k}dx\leqslant\left(\sum_p c_p^2\right)^k\cdot(k+1)^k$$

(qui découle aisément de la remarque relative à (9)). Quand on désigne $\sum_{p=1}^{\infty}c_p^2$ par K, on obtient

$$\left|\int_0^1 e^{\lambda[f(x)-s_n(x)]^2}dx-1\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^k}{k!}|\lambda K|^k\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(eK|\lambda|)^k;$$

la série à droite converge pour

$$|K|<\frac{1}{e|\lambda|},$$

donc pour $n>N(\lambda)$, et sa somme

$$\frac{1-eK|\lambda|}{eK|\lambda|}$$

est plus petite que $\varepsilon>0$ pour des petits K, donc pour $n>\overline{N}(\varepsilon)$. L'intégration du développement de Taylor est donc permise et le théorème démontré. On voit aussi que, pour $\lambda<\frac{1}{e}$, la condition $n>N(\lambda)$ devient superflue; en ce cas les intégrales (13) existent pour tous les n.

Remarquons que la relation (13), pour $\lambda>0$, implique les relations

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|f(x)-s_n(x)|^p dx=0$$

pour tous les p positifs.

[19]) loc. cit [17]); pour la forme employée ici voir [1]), lemma 2.

Théorème 6. *Soit $f(x)$ une fonction intégrable ainsi que $|f(x)|^p$ $(p>1)$ et c_k les coefficients de $f(x)$ suivant le système de M. Rademacher; on aura*

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\leqslant\frac{3p-2}{2p-2}\left[\int_0^1|f(x)|^p dx\right]^{\frac{2}{p}}.$$

Démonstration. Désignons $\sqrt[p]{\int_0^1|f(x)|^p dx}$ par $\|f\|_p$ et introduisons le nombre q lié avec p par l'équation $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; l'inégalité de Hölder et Young donne immédiatement

$$|\sum_{k=1}^{n}c_k^2|=|\int_0^1 f(x)\,s_n(x)\,dx|\leqslant\|f\|_p\cdot\|s_n\|_q$$

ce qui conduit, par l'inégalité de Khintchine, à

$$|\sum_{k=1}^{n}c_k^2|\leqslant\|f\|_p\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1+\frac{q}{2}},$$

donc à

$$\left(\sum_{k=1}^{n}c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|f\|_p\cdot\sqrt{\frac{3p-2}{2p-2}},$$

(14) $$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\leqslant\|f\|_p^2\cdot\frac{3p-2}{2p-2},$$

c. q. f. d.

Il convient de remarquer ici, que MM. Paley et Zygmund ont démontré, en se servant de l'inégalité de M. Khintchine, une inégalité contraire à (14): en supposant que la somme $\sum_1^{\infty}c_k^2$ est finie et en désignant par $f(x)$ la somme de (1), on aura, pour tout p positif,

(15) $$\|f\|_p^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\left(1+\frac{p}{2}\right).$$

(Cette inégalité conduit à

$$\int_0^1 e^{\lambda f^2(x)}dx\leqslant\frac{e\sigma\lambda}{1-e\sigma\lambda},$$

en désignant par σ la somme $\sum c_k^2$ et par λ un nombre positif $<1/e\sigma$).

L'inégalité (15) est intéressante pour les grands p; elle montre l'existence de $\|f\|_p$, sous la seule condition $\sum c_k^2 < +\infty$. L'inégalité (14), au contraire, devient inutile pour $p \geqslant 2$; en effet, $\|f\|_p$ étant une fonction nondécroissante de p, l'inégalité classique de Bessel donne en ce cas

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|_2^2 \leqslant \|f\|_p^2$$

ce qui est mieux que (14). (14) n'est donc important que pour $1 < p < 2$. L'expression $\frac{3p-2}{2p-2}$ présente une singularité pour $p=1$; la cause de cette singularité est le fait qu'il existe des fonctions $f(x)$ sommables ($\|f\|_1$ fini) telles que $\sum c_k^2 = +\infty$.

Le système de Walsh-Kaczmarz[20]). Désignons par $\chi_n^{(k)}(x)$ les fonctions connues de M. Haar:

$$\chi_0(x) = 1, \ \chi_n^{(k)}(x) = +\sqrt{2^{n-1}} \ \text{pour} \ \frac{2(k-1)}{2^n} < x < \frac{2k-1}{2^n},$$

$$= -\sqrt{2^{n-1}} \ \text{pour} \ \frac{2k-1}{2^n} < x < \frac{2k}{2^n},$$

$$\chi_n^{(k)}(x) = 0 \ \text{ailleurs}; \ k = 1, 2, \ldots 2^{n-1}, \ n \geqslant 1.$$

Les $\varphi_n(x)$ sont liées avec ces χ par l'égalité évidente

$$(16) \qquad \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}[\chi_n^{(1)}(x) + \chi_n^{(2)}(x) + \ldots + \chi_n^{(2^{n-1})}(x)] \quad (n \geqslant 1).$$

Nous nous servirons des χ pour construire un système $\{\psi_n^{(k)}(x)\}$, orthogonal, normé et *complet*, qui contiendra $\{\varphi_n(x)\}$ comme suite partielle. Définissons:

$$\psi_0(x) = \chi_0(x), \ \psi_1(x) = \chi_1^{(1)}(x),$$

$$\sqrt{2}\,\psi_2^{(1)}(x) = \chi_2^{(1)}(x) + \chi_2^{(2)}(x),$$

$$\sqrt{2}\,\psi_2^{(2)}(x) = \chi_2^{(1)}(x) - \chi_2^{(2)}(x).$$

Ainsi les fonctions ψ_2 se trouvent définies par les χ_2 et il n'y a qu'à écrire l'ordre des signes

$$(\psi_2) \qquad \begin{array}{cc} + & + \\ + & - \end{array}$$

pour caractériser ces formules. Il y a quatre fonctions ψ_3; pour

[20]) Voir [16]) et [11]).

trouver les signes, on emploie la règle suivante: on écrit chaque ligne de (ψ_2) deux fois (on obtient ainsi la moitié gauche

$$(\psi_3) \qquad \begin{array}{cc|cc} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ + & - & - & + \end{array}$$

du tableau (ψ_3)) et on prolonge chaque ligne une fois par les mêmes signes, une autre fois par des signes contraires (on obtient de cette manière la moitié droite du tableau (ψ_3)). On définit $\psi_3^{(i)}$ $(i=1,2,3,4)$ en écrivant

$$\sqrt{4}\,\psi_3^{(i)} = \chi_3^{(1)} \pm \chi_3^{(2)} \pm \chi_3^{(3)} \pm \chi_3^{(4)} \qquad (i=1,2,3,4),$$

les signes étant toujours ceux de la i-ème ligne du tableau (ψ_3). On procède d'une manière tout à fait analogue pour définir $\sqrt{8}\,\psi_4^{(2)}$ etc. Quand on considère les coefficients

$$(17) \qquad \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}, \ \pm \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}, \ \pm \ldots\ldots$$

qui servent à exprimer les 2^{n-1} différents ψ_n par les χ_n, on voit qu'ils forment un tableau orthogonal et normé; on voit aussi que ce tableau est symmétrique par rapport à la diagonale principale. Il s'ensuit que le même tableau des coefficients peut servir pour exprimer les 2^{n-1} différents χ_n par les ψ_n. Les $\chi_n^{(k)}$ étant un système orthogonal, normé et complet, on voit que les mêmes qualités conviennent aux $\psi_n^{(k)}$.

On voit enfin immédiatement que

$$\varphi_n(x) = \psi_n^{(1)}(x),$$

que nous avons donc réussi à compléter le système de M. Rademacher. Les fonctions de ce système complet ne prennent que les valeurs $+1, -1$ (et 0); pour abréger, nous appelons ce système $\{\psi\}$, le système de M. Rademacher $\{\varphi\}$ et le système de M. Haar $\{\chi\}$.

Théorème 7. *En désignant par $p_n(x)$ et $h_n(x)$ les sommes partielles du développement d'une fonction intégrable $f(x)$ suivant $\{\psi\}$, respectivement $\{\chi\}$*, on a

$$p_{2^n}(x) = h_{2^n}(x) \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Démonstration. $\psi_0 = \chi_0$, $\psi_1 = \chi_1^{(1)}$, ce qui prouve le théorème aux cas $n=0$ et $n=1$. Si

$$\ldots a_1 \psi_q^{(1)}(x) + a_2 \psi_q^{(2)}(x) + \ldots + a_{2^{q-1}} \psi_q^{(2^{q-1})}(x) + \ldots$$

est le développement de $f(x)$ suivant $\{\psi\}$ et si l'on considère seulement les 2^{q-1} termes écrits, qui donnent

$$p_{2^q}(x) - p_{2^{q-1}}(x),$$

et on y exprime les ψ par les χ, on obtient

$$\begin{aligned} & a_1 [c_{1,1} \chi_q^{(1)}(x) + \ldots + c_{1,\, 2^{q-1}} \chi^{(2^{q-1})}(x)] \\ (18) \qquad & + a_2 [c_{2,1} \chi_q^{(1)}(x) + \ldots \quad c_{1,\, 2^{q-1}} \chi_q^{(2^{q-1})}(x)] \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + a_{2^{q-1}} [c_{2^{q-1},\, 1} \chi_q^{(1)}(x) + \ldots \quad c_{2^{q-1},\, 2^{q-1}} \chi_q^{(2^{q-1})}(x)], \end{aligned}$$

les coefficients c_{ik} étant définis par (17) et ce qui précède (17). Soit b_k le coefficient de $\chi_q^{(k)}(x)$ dans (18); on aura

$$b_k = \sum_{i=1}^{2^{q-1}} a_i c_{ik};$$

d'autre part

$$a_i = \int_0^1 f(x) \psi_q^{(i)}(x) dx \qquad (i = 1, 2 \ldots 2^{q-1}),$$

donc

$$b_k = \int_0^1 f(x) \sum_{i=1}^{2^{q-1}} c_{ik} \psi_q^{(i)}(x) dx = \int_0^1 f(x) \chi_q^{(k)}(x) dx,$$

car la substitution inverse à $\|c_{ik}\|$ est $\|c_{ik}\|$. Il s'ensuit que le coefficient b_k, qui multiplie $\chi_q^{(k)}(x)$ dans (18), est le même que donne la règle d'Euler-Fourier pour le coefficient de $\chi_q^{(k)}(x)$ dans le développement de $f(x)$ suivant $\{\chi\}$. Il en résulte

$$p_{2^q}(x) - p_{2^{q-1}}(x) = h_{2^q}(x) - h_{2^{q-1}}(x)$$

et comme

$$p_1(x) = h_1(x),$$

la thèse du théorème est établie.

Théorème 8. *Si* (1) *est le développement formel d'une fonction intégrable $f(x)$ située „dans le plan des φ", alors on*

a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$ (de ce qu'il résulte la convergence p. p. de (1), l'intégrabilité de toutes les puissances de $|f(x)|$ et même celle de $e^{\lambda f^2(x)}$, $\lambda < e^{-1}$).

Explication. Nous disons que $f(x)$ est située dans le plan des φ, pour exprimer le fait que $f(x)$ est orthogonale à toute fonction qui est orthogonale à tous les φ, en d'autres mots, que les coefficients par rapport aux ψ sont tous nuls, sauf ceux qui correspondent aux $\psi^{(1)} = \varphi$.

Démonstration. En conservant aux s_n, p_n et h_n leurs significations respectives, on aura, suivant l'explication et en vertu du théorème 7,

$$s_n(x) = p_{2^n}(x) = h_{2^n}(x) \qquad (n > 1).$$

Les propriétés connues du système $\{\chi\}$ impliquent donc

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x)$$

presque partout, de ce qu'il résulte, à l'aide du théorème 3, la thèse à démontrer.

Théorème 9. *Quand $f(x)$ est mesurable et $|f(x)|^q$ intégrable* ($q \geqslant 1$), *on a*

$$(19) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_0^1 |f(x) - p_{2^n}(x)|^q dx = 0$$

et, presque partout,

$$(20) \qquad \lim_{n \to \infty} p_{2^n}(x) = f(x);$$

quand $f(x)$ est mesurable et $|f(x)| \leqslant b$ presque partout, on a en outre

$$(21) \qquad |p_{2^n}(x)| \leqslant b \qquad (x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Démonstration: Les propriétés connues du système $\{\chi\}$ avec le théorème 7.

Théorème 10. Si $\sum c_n^2 < +\infty$, alors il y a une fonction continue $f(x)$, dont les coefficients de Rademacher sont $\{c_n\}$.

Démonstration. M. Banach[21]) a démontré d'une manière générale l'équivalence de trois propriétés suivantes A, B, C, de systèmes orthogonaux et normés $\{\varphi\}$ constituant une partie d'un

[21]) loc. cit. [9]), § 1, p. 212.

système orthogonal et normé $\{\psi\}$, pourvu que ce dernier système satisfasse à des conditions, dont la relation (19) (pour $q=1$) présente un cas particulier;

A: *il existe une constante K telle que l'on aît pour tous les* $\{c_k\}$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)^{1/2} \leqslant K.\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)\right| dx, \tag{22}$$

B: *théorème 8,*

C: *théorème 10.*

Comme le théorème 8 a été établi préalablement, l'équivalence de A, B, C donne le théorème 10 et la relation (22).

Théorème 11. *Si $c_n \to 0$, alors il existe une fonction intégrable $f(x)$ dont les coefficients de Rademacher sont $\{c_n\}$.*

Démonstration. La deuxième partie du théorème 9, à savoir les relations (20) et (21), suffisent, d'après M. Banach[22]), pour affirmer l'équivalence de trois propriétés suivantes A′, B′, C′, d'un système orthogonal et normé $\{\varphi\}$ partiel, si $\{\psi\}$ est le système total dont parle le théorème 9;

A′: *il existe une constante K' telle que l'on ait, pour tous les* $\{c_k\}$,

$$\sum_{k=1}^{n} |c_n| \leqslant K'.\text{maximum de} \left|\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)\right|, \tag{23}$$

B′: *théorème 12,*

C′: *théorème 11.*

Comme (23) est une inégalité évidente avec $K'=1$, car le maximum en question est précisement $\sum_1^n |c_k|$, le théorème 11 est établi, ainsi que le théorème suivant:

Théorème 12. *Si* (1) *est le développement formel d'une fonction mesurable et bornée $f(x)$, située „dans le plan des φ", alors on a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < +\infty.$$

On voit que ce développement est absolument et uniformément convergent.

[22]) loc. cit.[9]), § 2, p. 217—218.

Les théorèmes 8, 10, 11 et 12 conduisent presque immédiatement à certaines singularités, dites „de Carleman" et „de Hardy-Littlewood"[23]); le fait nouveau est que le système $\{\psi\}$ jouit de toutes ces singularités[24]). La théorie de M. Banach permettait d'énoncer tout de suite les faits analogues pour les $\{\chi\}$[25]), nôtre théorème 9 a rendue applicable aux $\{\psi\}$ la théorie citée.

Il convient de remarquer ici que toutes les propriétés du système de M. Rademacher, que nous avons formulé ici comme des théorèmes, subsistent quand on change l'ordre des fonctions[26]).

[23]) H. Steinhaus, Sur les développements orthogonaux, Bull. de l'Acad. Polon., série A, 1926, p. 11—33; spécialement p. 29 et 30.

[24]) Une était trouvée par M. Orlicz; Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen II, Stud. Math. 1 (1929) p. 241—255, spécialement p. 251.

[25]) Les propriétés du système de M. Haar, qu'il faut utiliser ici, se trouvent démontrées p. e. chez M. J. Schauder, Eine Eigenschaft des Haar'schen Orthogonalsystems, Math. Zeitschr. 28 (1928) p. 317—320.

[26]) H. Steinhaus, Zur Konvergenzfrage bei dem Rademacher'schen Orthogonalsystem, Recueil Math. de Moscou (1928) p. 39—42.

(Reçu par la Rédaction le 12. 11. 1930).