Über die Vorzeichenverteilung in unendlichen Reihen

von

H. AUERBACH (Lwów).

Ich beweise in dieser Note den Satz[1]):

Ist $\sum d_\nu$ eine divergente Reihe mit positiven nach Null strebenden Gliedern, so gibt es eine gleichmäßige Vorzeichenverteilung $\{\varepsilon_\nu\}$ $(\varepsilon_\nu = \pm 1)$, für welche die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum \varepsilon_\nu d_\nu$ beliebig vorgeschriebene (endliche oder unendliche) Hauptlimites besitzt.

Dabei heißt eine Vorzeichenverteilung $\{\varepsilon_\nu\}$ gleichmäßig, wenn positive und negative Vorzeichen in ihr gleich häufig vorkommen, d. h., wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu = 0$$

ist.

Wenn die d_ν *monoton* abnehmen, so ist für die Konvergenz der Reihe $\sum \varepsilon_\nu d_\nu$ bekanntlich[2]) notwendig, daß

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \leqslant 0 \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_n$$

Unser Satz zeigt u. a., daß sogar die mehr verlangende Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu = 0$ in keinem Falle die Konvergenz sichert.

[1]) Ich habe diesen Satz im Jahre 1923 auf eine Anregung des Herrn H. Steinhaus bewiesen und in einer Sitzung des von ihm damals gemeinsam mit den Herren S. Banach und S. Ruziewicz geleiteten Seminars vorgetragen.

[2]) Satz von E. Cesàro (in etwas anderer Form). Vgl. H. Rademacher, Über die asymptotische Verteilung gewisser konvergenzerzeugender Faktoren, Math. Zeitschr. 11 (1921) p. 276—288, oder G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin 1925, Bd I. p. 25, Aufg. 138 und Lösung p. 179.

Wir beweisen zunächst einen Hilfsatz:

Jede divergente Reihe $\sum d_\nu$ mit positiven Gliedern enthält eine, ebenfalls divergente, Teilreihe $\sum d_{k_\nu}$ von der Dichte Null, d. h. von der Eigenschaft, daß die relative Häufigkeit der d_{k_ν} unter den n ersten Gliedern der Folge $\{d_\nu\}$ dem Grenzwert Null zustrebt[3]).

So bilden beispielweise die reziproken Werte der Primzahlen eine derartige Teilreihe der harmonischen Reihe.

Um diesen Hilfsatz zu beweisen, zerlegen wir die gegebene Reihe in zwei Teilreihen $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} d_{2\nu-1}$ und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} d_{2\nu}$ von der Dichte $\frac{1}{2}$. Aus diesen Reihen wählen wir eine divergente $\mathfrak{R}_1$ und zerlegen sie in derselben Weise in zwei Teilreihen von der Dichte $\frac{1}{4}$ (inbezug auf die ursprüngliche Reihe). Aus diesen wählen wir wieder eine divergente $\mathfrak{R}_2$ u. s. f.

Auf diese Weise erhalten wir eine Folge $\{\mathfrak{R}_n\}$ divergenter Teilreihen von $\sum d_\nu$, von der Eigenschaft, daß $\mathfrak{R}_n$ die Dichte $\frac{1}{2^n}$ besitzt und in allen vorangehenden Reihen enthalten ist.

Nunmehr bilden wir eine Teilreihe folgendermaßen:

Ihre ersten Glieder entnehmen wir der Reihe $\mathfrak{R}_1$ solange, bis wir einmal eine Summe >1 erhalten. Die weiteren Glieder (mit höheren Indizes) entnehmen wir der Reihe $\mathfrak{R}_2$ solange, bis die Summe einmal >2 wird u. s. w.

Die so erhaltene Teilreihe ist offenbar divergent. Da sie bis auf endlich viele Glieder in $\mathfrak{R}_n$ enthalten ist, ist ihre obere Dichte $\leqslant \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, d. h. gleich Null.

Wir beweisen jetzt den eingangs ausgesprochenen Satz.

Nach dem Hilfsatze enthält die Reihe $\sum d_\nu$ eine divergente Teilreihe $\sum d_{k_\nu}$ von der Dichte Null. Wir bezeichnen mit $\sum \overline{d}_\nu$ die Reihe, welche man aus $\sum d_\nu$ erhält, indem man alle d_{k_ν} durch

[3]) In diesem Zusammenhange sei noch der folgende Satz erwähnt: Fast jede Teilreihe $\sum \varepsilon_\nu a_\nu$ $(\varepsilon_\nu = 0, 1)$ einer divergenten Reihe $\sum a_\nu$ ist divergent. D. h., die Menge der dyadischen Brüche $0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$ welche konvergenten Teilreihen entsprechen, ist eine Nullmenge (im Sinne von Lebesgue). Oder: Die Wahrscheinlichkeit, eine divergente Teilreihe herauszugreifen, ist gleich Eins. Zur Motivierung der hierbei zugrunde gelegten Definition der Wahrscheinlichkeit vgl. H. Steinhaus, Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure, Fund. Math. 4 (1923) p. 286—310.

Nullen ersetzt und definieren zunächst eine gleichmäßige Vorzeichenverteilung $\{\bar{\varepsilon}_\nu\}$, für welche $\sum \bar{\varepsilon}_\nu \bar{d}_\nu$ konvergiert.

Um eine derartige Vorzeichenverteilung zu erhalten, genügt es sich auf diejenigen Verteilungen zu beschränken, in welchen $\varepsilon_{2\nu-1}$ und $\varepsilon_{2\nu}$ stets verschieden sind. Jede derartige Verteilung ist offenbar gleichmäßig und man hat

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \bar{\varepsilon}_\nu \bar{d}_\nu = \pm (\bar{d}_1 - \bar{d}_2) \pm (\bar{d}_3 - \bar{d}_4) \pm \ldots \pm (\bar{d}_{2n-1} - \bar{d}_{2n}),$$

wobei die vor den Klammern stehenden Vorzeichen noch beliebig sind. Durch passende Wahl dieser Vorzeichen kann man offenbar erreichen, daß die Folge der Teilsummen gerader Ordnung und daher auch (wegen $d_n \to 0$) die Folge aller Teilsummen von $\sum \bar{\varepsilon}_\nu \bar{d}_\nu$ konvergent ist.

Wie leicht ersichtlich, lassen sich die Vorzeichen $\bar{\varepsilon}_{k_\nu}$ in beliebiger Weise durch andere ersetzen, ohne daß dadurch die Gleichmäßigkeit der Verteilung gestört wird.

Wir versehen die Glieder der divergenten Reihe $\sum d_{k_\nu}$ mit Vorzeichen ε_{k_ν} derart, daß

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_{k_\nu} d_{k_\nu} = l - s, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_{k_\nu} d_{k_\nu} = L - s$$

ist, wo l, L die vorgegebenen Hauptlimites und s die Summe der konvergenten Reihe $\sum \bar{\varepsilon}_\nu \bar{d}_\nu$ bedeuten.

Es bezeichne $\{\varepsilon_\nu\}$ diejenige Vorzeichenverteilung, welche aus $\{\bar{\varepsilon}_\nu\}$ entsteht, indem man jedes $\bar{\varepsilon}_{k_\nu}$ durch ε_{k_ν} ersetzt. Diese Verteilung ist nach einer soeben gemachten Bemerkung gleichmäßig. Ferner ist $\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu d_\nu$ immer die Summe einer Partialsumme von $\sum \bar{\varepsilon}_\nu \bar{d}_\nu$ und einer Partialsumme von $\sum \varepsilon_{k_\nu} d_{k_\nu}$, woraus leicht

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu d_\nu = l, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu d_\nu = L$$

folgt.

(Reçu par la Rédaction le 11. 10. 1930).

Le système orthogonal de M. Rademacher

par

S. KACZMARZ et H. STEINHAUS (Lwów).

Cet article est un produit d'une collaboration de plusieurs personnes qui ont contribué par leurs travaux récents à élucider les propriétés de séries dites de M. Rademacher. Nos propres recherches ont été parallèles et contemporaines à celles enterprises sur des sujets analogues par MM. Paley et Zygmund à Cambridge. Par des lettres de M. Zygmund, nous avons été tenu au courant de leurs résultats publiés en partie dans les Proceedings of the Cambridge Philosophical Society [1]). Il s'agit là de l'influence qu'un facteur, de module unité, dont le signe dépend de l'hasard, exerce sur la convergence de séries. Les recherches de MM. Rademacher [2]), Khintchine et Kolmogoroff [3]) sur ces problèmes, ainsi que les travaux de M. Zygmund [4]) et M. Kolmogoroff [5]) sur les séries trigonométriques lacunaires doivent être rappelés ici; la notion de la mesure dans l'espace à une infinité des dimensions et les fonctions orthogonales, introduites par M. Steinhaus [6]) tout récemment, ont servi à leur

[1]) R. E. A. C. Paley B. A. and A. Zygmund, On some series of functions (1), Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 26 (1930) p. 337—357.

[2]) Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Math. Ann. 87 (1922) p. 112—138.

[3]) Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, Recueil Math. de Moscou 32 (1925) p. 668—677.

[4]) Sur les séries trigonométriques lacunaires, Journal of the Lond. Math. Soc. 5 (1930) p. 138—145; On the convergence of lacunary trigonometric series, Fund. Math. 16 (1930) p. 90—107.

[5]) Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, Fund. Math. 5 (1924) p. 96—97.

[6]) Sur la probabilité de la convergence de séries, première communication, Stud. Math. 2 (1930) p. 21—39.