(19) $$\|x\| \leqslant \operatorname{Max}\|x_n\| . \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leqslant M;$$

M bedeutet hier die in Anmerkung [2]) definierte „Schränkungskonstante" (Radius der Kugel K). Also ist

$$x \varepsilon K,$$

d. h. ((16), (17))

(21) $$y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n . F(x_n) = F\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n . x_n\right) = F(x). ^{7})$$

Aus dem Beweisgange des Satzes 1 folgt der folgende allgemeinere

Satz 2 *(Gebietsinvarianz). Wenn die lineare, stetige Funktionaloperation $y = F(x)$ eine eindeutige (aber nicht notwendig eineindeutige) Abbildung des linearen, normierten und vollständigen x-Raumes auf einen ebensolchen y-Raum liefert und wenn dabei die beiden Räume erschöpft werden, so geht jedes x-Gebiet in ein y-Gebiet über.*

Beweis. Der Beweis ist in der Beweisführung des Satzes 1 enthalten, wenn man noch die Bemerkung S. 2, Zeile 23—26 berücksichtigt.

[7]) Die Anregung, einen solchen Hilfssatz zu benützen, verdanke ich Herrn Banach.

(Reçu par la Rédaction le 15. 6. 1929).

Über die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene kompakte Menge enthält

von

S. MAZUR (Lwów).

Den Gegenstand dieser Note bildet der folgende

Satz. *Es sei Z eine kompakte Menge in einem linearen, normierten und vollständigen Raume*[1]*); dann ist die kleinste Z enthaltende konvexe Menge W ebenfalls kompakt.*

Beweis. Ist Z eine endliche Menge, so ist der Satz trivial; wir können also voraussetzen, daß Z unendlich ist. Da die Menge Z kompakt ist, so gibt es eine abzählbare Teilmenge A von Z, die in Z überall dicht ist; es sei $\{x_n\}$ die Folge aller Elemente aus A. Wir betrachten nun die Menge V aller Elemente x der Form

(1) $$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n ,$$

wo $\{a_n\}$ eine nichtnegative Zahlenfolge ist und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gegen die Summe 1 konvergiert.

Die Menge V ist kompakt. Es sei nämlich ε eine gegebene positive Zahl. Da A als Teilmenge von Z kompakt ist, so enthält die Folge $\{x_n\}$ eine endliche Teilfolge $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots x_{n_p}$ von der Eigenschaft, daß für jedes x_n die Ungleichung

$$\|x_n - x_{n_k}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bei einem entsprechenden k $(k = 1, 2, \ldots p)$ stattfindet[2]). Infolge-

[1]) D. h. in einem Raume, für welchen die Axiome des Herrn Banach erfüllt sind. S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math. III (1922) pp. 134—136.

[2]) F. Hausdorff, Mengenlehre, II Auflage (1927) p. 108.

dessen kann man offenbar die Folge $\{x_n\}$ in p (endliche oder unendliche) Teilfolgen $x_{n_{k,1}}, x_{n_{k,2}}, \dots$ $(k=1,2,\dots p)$ so zerlegen, daß stets

$$(2) \qquad \|x_{n_{k,l}} - x_{n_k}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Wir konstruieren jetzt die Menge S aller Elemente y der Form

$$(3) \qquad y = \sum_{k=1}^{p} b_k x_{n_k},$$

wobei b_k $(k=1,2,\dots p)$ nichtnegative Zahlen sind und $\sum_{k=1}^{p} b_k = 1$ ist. S ist natürlich kompakt. Daher gibt es in dieser Menge endlich viele Elemente $y_1, y_2, \dots y_q$, so beschaffen, daß jedes Element y der Menge S von einem gewissen y_k $(k=1, 2, \dots q)$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ entfernt ist. Wir werden jetzt zeigen, daß für ein jedes Element x von V die Ungleichung

$$(4) \qquad \|x - y_k\| < \varepsilon$$

für ein passendes k $(k=1,2,\dots q)$ erfüllt ist. In der Tat, es sei x ein Element der Form (1). Wir setzen

$$b_k = a_{n_{k,1}} + a_{n_{k,2}} + \dots \qquad (k=1,2,\dots p)$$

und definieren das Element y vermittels der Gleichung (3). y ist ein Element von S; es gibt also ein k $(k=1, 2, \dots q)$, so daß

$$(5) \qquad \|y - y_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Andererseits folgern wir aus der Gleichheit

$$\begin{aligned} x - y = {} & a_{n_1,1}(x_{n_1,1} - x_{n_1}) + a_{n_1,2}(x_{n_1,2} - x_{n_1}) + \dots + \\ & + a_{n_2,1}(x_{n_2,1} - x_{n_2}) + a_{n_2,2}(x_{n_2,2} - x_{n_2}) + \dots + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + a_{n_p,1}(x_{n_p,1} - x_{n_p}) + a_{n_p,2}(x_{n_p,2} - x_{n_p}) + \dots \end{aligned}$$

und aus den Ungleichungen (2), daß

$$(6) \qquad \|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Weil aber $\|x - y_k\| \leqslant \|x - y\| + \|y - y_k\|$, so ist unter Bezugnahme auf (5) und (6) die Relation (4) bewiesen. Die Menge V ist also tatsächlich kompakt; außerdem ist sie ersichtlich konvex. Es folgt daraus unmittelbar, daß die Menge $\overline{V}$ ebenfalls diese zwei Eigenschaften besitzt. Nun ist aber $Z \subset \overline{A}$, $A \subset V$ und daher auch $Z \subset \overline{V}$. Da W die kleinste Z enthaltende konvexe Menge ist, muß notwendig $W \subset \overline{V}$ sein. Als Teilmenge einer kompakten Menge ist W kompakt w. z. b. w.[3]).

Bemerkung. Bekanntlich läßt sich zeigen, daß in euklidischen Räumen die kleinste konvexe und abgeschlossene Menge, die eine gegebene kompakte enthält, mit dem Durchschnitt aller diese Menge enthaltenden Kugeln identisch ist[4]). Daß dies aber in allgemeinen linearen, normierten und vollständigen Räumen nicht mehr gilt, lehrt das folgende Beispiel: Wir betrachten im Raume aller gegen Null konvergenten Zahlenfolgen[5]), die Menge Z aller Elemente $\left\{\frac{\partial_n}{n}\right\}$, wo ∂_n $(n=1, 2, \dots)$ nichtnegative Zahlen sind und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \partial_n$ gegen eine Summe $\leqslant 1$ konvergiert. Es folgt ganz leicht, daß Z eine kompakte, abgeschlossene und konvexe Menge ist. Sie stimmt aber mit dem Durchschnitt aller sie enthaltenden Kugeln nicht überein, denn jede Kugel, deren Teilmenge Z bildet, enthält das Element $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, welches offenbar zu Z nicht gehört. Um sich von der Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen, bezeichnen wir mit r den Radius und mit $\{a_n\}$ den Mittelpunkt einer beliebigen Kugel, die Z enthält. Wir setzen $\partial_{n,n} = 1$, $\partial_{m,n} = 0$ für $m \neq n$ $(m, n = 1, 2, \dots)$. Da die Elemente $\left\{\frac{\partial_{m,n}}{n}\right\}$ $(m=1,2,\dots)$ der Menge Z und um so mehr der betrachteten Kugel angehören, so muß stets $\left|\frac{\partial_{m,n}}{n} - a_n\right| \leqslant r$ und also speziell $\left|\frac{\partial_{n,n}}{n} - a_n\right| \leqslant r$ sein. Durch die letztangeführten Ungleichungen wurde aber schon alles bewiesen.

[3]) Wie Herr L. Sternbach bemerkt, ist $\overline{V}$ die kleinste abgeschlossene konvexe Menge, die Z enthält.

[4]) S. Straszewicz, Przyczynek do teorji mnogości wypukłych, Prace matematyczno-fizyczne XXVII (1916) p. 10.

[5]) Als Norm einer gegen Null konvergenten Folge $\{a_n\}$ nehmen wir die größte der Zahlen $|a_n|$ $(n=1,2,\dots)$ an.

(Reçu par la Rédaction le 4. 10. 1929).