

Da nun  $W$  im Innern von  $S$  verschwindet, so ist

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{\text{inn.}} = 0,$$

also da  $\frac{\partial W}{\partial n}$  stetig ist, auch

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{\text{äuß.}} = 0.$$

Daraus folgt aber bekanntlich  $\varphi \equiv 0$ <sup>24)</sup>.

Auch andere Randwertaufgaben können nach den hier dargelegten Sätzen gelöst werden.

<sup>24)</sup> Siehe z. B.: J. Horn, Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Sammlung Schubert, Leipzig 1910; insb. p. 303–304.

(Reçu par la Rédaction le 7. 7. 1930).

## Über Approximation im Mittel

von

Z. W. BIRNBAUM und W. ORLICZ (Lwów).

Bekanntlich kann man jede mit der  $p$ -ten Potenz integrierbare Funktion  $f(x)$  durch streckenweise konstante und sogar durch stetige Funktionen  $h(x)$  beliebig genau im Mittel mit der  $p$ -ten Potenz approximieren, d. h. es gibt zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Funktion  $h(x)$ , so daß

$$\int_0^1 |f(x) - h(x)|^p dx < \varepsilon.$$

Es sei nun  $M(u) \geq 0$  eine beliebige, für alle reellen  $u$  definierte und stetige Funktion mit  $M(0) = 0$ . Wir nennen eine meßbare Funktion  $f(x)$  „integrierbar mit  $M(u)$ “, wenn  $\int_0^1 M[f(x)] dx$  existiert. Wir wollen ferner sagen, daß eine Funktion  $h(x)$  die mit  $M(u)$  integrierbare Funktion  $f(x)$  „mit  $M(u)$  im Mittel bis auf  $\varepsilon$  approximiert“, wenn die Ungleichung besteht

$$\int_0^1 M[f(x) - h(x)] dx < \varepsilon.$$

Über die so verallgemeinerte Approximation im Mittel durch streckenweise konstante Funktionen hat Herr J. C. Burkill<sup>1)</sup> einen Satz ausgesprochen, welcher ohne ergänzende Voraussetzungen nicht richtig ist, wie aus Satz 2 der vorliegenden Mitteilung ersehen werden kann. Satz 1 enthält eine Richtigstellung der Burkill'schen Behauptung.

<sup>1)</sup> J. C. Burkill, The strong and weak convergence of functions of general type, Proc. Lond. Math. Soc. II 28 (1928) p. 493 u. f., Theorem I.

## Satz 1.

Voraussetzung.  $M(u)$  ist eine für  $-\infty < u < +\infty$  definierte stetige Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

I.  $M(0) = 0$

II.  $M(u)$  ist eine nichtabnehmende Funktion und  $M(u) \geq 0$  für  $u \geq 0$ ;  $M(u) = M(|u|)$  für  $u \leq 0$ <sup>2)</sup>

III. Es gibt eine Konstante  $c$ , so daß

$$M(2u) \leq c \cdot M(u) \text{ für } u \geq 0^3).$$

Behauptung. Für jede mit  $M(u)$  integrierbare Funktion  $f(x)$  gibt es a) eine streckenweise konstante Funktion  $s(x)$ , b) eine stetige Funktion  $g(x)$ , welche  $f(x)$  mit  $M(u)$  im Mittel bis auf  $\varepsilon$  approximiert.

Vorbemerkungen. 1. Die Voraussetzung III ist für monoton wachsendes  $M(|u|)$  gleichbedeutend mit der Existenz einer Funktion  $L(\alpha)$ , so daß  $M(\alpha u) \leq L(\alpha) \cdot M(u)$  für beliebige  $u \geq 0$ ,  $\alpha \geq 0$ <sup>4)</sup>.

2. Die Voraussetzung III ist bestimmt erfüllt, wenn  $M(u)$  der Dreiecksungleichung

$$M(u_1 + u_2) \leq P \cdot (M(u_1) + M(u_2)) \quad (u_1 \geq 0, u_2 \geq 0)$$

oder der Multiplikationsungleichung

$$M(u_1 \cdot u_2) \leq Q \cdot M(u_1) \cdot M(u_2)$$

genügt. Beide Ungleichungen sind beispielsweise für  $M(u) = |u|^p$ ,  $p > 0$  erfüllt.

Beweis.  $f(x)$  ist meßbar, also nach einem Lusinschen Satze<sup>5)</sup> stetig auf einer perfekten Menge  $E$ , deren Maß beliebig wenig von 1 abweicht. Wir wählen  $E$  so, daß

$$\int_{CE} M[f(x)] dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird. Das Maximum von  $f(x)$  auf  $E$  nennen wir  $\mu$ . Die Menge  $CE$  ist eine Summe von abzählbar vielen punktfremden offenen

<sup>2)</sup> Die Annahme, daß  $M(u)$  eine gerade Funktion ist, ist nicht wesentlich; wir machen sie nur der Einfachheit wegen, um doppelte Überlegungen zu vermeiden.

<sup>3)</sup> Durch diese Voraussetzung wird  $M(u)$  als eine Funktion  $Q^1$  der Burkill'schen Klassifikation gekennzeichnet, vgl. l. c. <sup>1)</sup> p. 494. Es würde übrigens auch genügen, die Existenz eines  $d \geq 0$  vorauszusetzen, so daß  $M(2u) \leq c \cdot M(u)$  für  $u \geq d$  gilt.

<sup>4)</sup> vgl. l. c. <sup>1)</sup> p. 494.

<sup>5)</sup> s. z. B.: L. W. Cohen, A new proof of Lusins theorem, Fund. Math. 9 (1927) p. 122.

Intervallen  $\delta_1, \delta_2, \dots$ , deren Endpunkte zu  $E$  gehören. Wir bestimmen  $N$  so groß, daß

$$\sum_{v=N+1}^{\infty} \int_{\delta_v} M[f(x)] dx < \frac{\varepsilon}{6c}$$

und

$$\sum_{v=N+1}^{\infty} \int_{\delta_v} M(\mu) dx < \frac{\varepsilon}{6c}$$

wird. Jedes der Intervalle  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N$  spalten wir in drei Teilintervalle

$$\delta_v = \delta_v' + \delta_v'' + \delta_v''' \quad (v = 1, 2, \dots, N)$$

u. zw. so, daß das linke Ende von  $\delta_v'$  mit dem linken Ende von  $\delta_v$ , das rechte Ende von  $\delta_v'''$  mit dem rechten Ende von  $\delta_v$  übereinstimmt und daß die Ungleichungen gelten

$$\sum_{v=1}^N \int_{\delta_v' + \delta_v''} M[f(x)] dx < \frac{\varepsilon}{6c}, \quad \sum_{v=1}^N \int_{\delta_v' + \delta_v''} M[\mu] dx < \frac{\varepsilon}{6c}.$$

Wir definieren nun die stetige Funktion  $g(x)$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) \text{ für } x \in E \\ g(x) &= 0 \text{ für } x \in \delta_v'' \quad (v = 1, 2, \dots, N) \\ g(x) &\text{ linear zwischen den Werten in den Endpunkten der} \\ &\text{betreffenden Intervalle für} \end{aligned}$$

$$x \in \sum_{v=1}^{\infty} \delta_v \text{ und } x \in \delta_v', x \in \delta_v''' \quad (v = 1, 2, \dots, N).$$

Wir zeigen, daß  $g(x)$  bereits der Ungleichung

$$(1) \quad \int_0^1 M[f(x) - g(x)] dx < \varepsilon$$

genügt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \int_0^1 M[f(x) - g(x)] dx &= \int_E M[f(x) - g(x)] dx \\ &= \sum_{v=1}^N \int_{\delta_v' + \delta_v''} M[f(x) - g(x)] dx + \sum_{v=1}^N \int_{\delta_v''} M[f(x) - g(x)] dx \\ &\quad + \sum_{v=N+1}^{\infty} \int_{\delta_v} M[f(x) - g(x)] dx \end{aligned}$$

und

$$\int_E M[f(x) - g(x)] dx = 0,$$

$$\sum_{v=1}^N \int_{\delta'_v + \delta''_v} M[f(x) - g(x)] dx = \sum_{v=1}^N \int_{\delta'_v + \delta''_v} M[|f(x) - g(x)|] dx$$

$$\leq \sum_{v=1}^N \int_{\delta'_v + \delta''_v} M[2 \text{Max}(|f(x)|, |g(x)|)] dx$$

$$\leq \sum_{v=1}^N \int_{\delta'_v + \delta''_v} M[2|f(x)|] dx + \sum_{v=1}^N \int_{\delta'_v + \delta''_v} M[2\mu] dx$$

$$\leq c \cdot \sum_{v=1}^N \int_{\delta'_v + \delta''_v} M[f(x)] dx + c \cdot \sum_{v=1}^N \int_{\delta'_v + \delta''_v} M(\mu) dx < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\sum_{v=1}^N \int_{\delta''_v} M[f(x) - g(x)] dx = \sum_{v=1}^N \int_{\delta''_v} M[f(x)] dx \leq \int_{CE} M[f(x)] dx < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\sum_{v=N+1}^{\infty} \int_{\delta''_v} M[f(x) - g(x)] dx \leq \sum_{v=N+1}^{\infty} \int_{\delta''_v} M[2 \cdot \text{Max}(|f(x)|, |g(x)|)] dx$$

$$\leq \sum_{v=N+1}^{\infty} \int_{\delta''_v} M[2|f(x)|] dx + \sum_{v=N+1}^{\infty} \int_{\delta''_v} M[2\mu] dx$$

$$\leq c \cdot \sum_{v=N+1}^{\infty} \int_{\delta''_v} M[f(x)] dx + c \cdot \sum_{v=N+1}^{\infty} \int_{\delta''_v} M[\mu] dx < \frac{\varepsilon}{3},$$

woraus (1) folgt.

Damit wäre Teil b) der Behauptung bewiesen.

Im Laufe dieses Beweises ist sogar eine approximierende stetige Funktion konstruiert worden, welche auf einer Menge von beliebig vorgegebenem Maße mit der zu approximierenden Funktion identisch ist.

Um auch die Richtigkeit von a) nachzuweisen, kann man folgendermaßen vorgehen:

$g(x)$  sei eine, nach b) bestimmt vorhandene, in  $\langle 0, 1 \rangle$  stetige Funktion, für welche

$$\int_0^1 M[f(x) - g(x)] dx < \frac{\varepsilon}{2c}$$

gilt. Es gibt ein  $\eta$ , so daß die Ungleichung

$$M(u) < \frac{\varepsilon}{2c} \text{ für } |u| < \eta$$

besteht. Nun bildet man eine streckenweise konstante Funktion  $s(x)$ , für welche in  $\langle 0, 1 \rangle$  überall

$$|g(x) - s(x)| < \eta$$

gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 M[f(x) - s(x)] dx &\leq \int_0^1 M[2 \text{Max}(|f(x) - g(x)|, |g(x) - s(x)|)] dx \\ &\leq c \int_0^1 M[f(x) - g(x)] dx + c \int_0^1 M[g(x) - s(x)] dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Mann könnte vermuten, daß Satz 1 auch dann noch richtig bleibt, wenn man die Voraussetzung III fortläßt. Daß dies nicht richtig ist, zeigt der folgende

Satz 2. Es gibt eine Funktion  $M(u)$ , welche den Voraussetzungen I und II von Satz 1 genügt und mit  $|u| \rightarrow \infty$  monoton gegen  $+\infty$  wächst, ferner eine mit  $M(u)$  integrierbare Funktion  $f(x)$ , so daß a) für jede streckenweise konstante Funktion  $s(x) \neq 0$  die Ungleichung

$$\int_0^1 M[f(x) - s(x)] dx \geq 1$$

bzw. b) für jede in  $\langle 0, 1 \rangle$  stetige Funktion  $g(x) \neq 0$  die Ungleichung

$$\int_0^1 M[f(x) - g(x)] dx \geq 1$$

besteht.

Beweis.

1. Das Intervall  $\langle 0, 1 \rangle$  sei als Summe von abzählbar vielen meßbaren punktfremden Mengen  $E_n$  dargestellt, von denen jede mit jedem Teilintervall von  $\langle 0, 1 \rangle$  einen Durchschnitt mit positivem

Maße liefert<sup>6)</sup>. Alle Teilintervalle von  $\langle 0, 1 \rangle$  mit rationalen Endpunkten ordnen wir zu einer Folge  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ . Wir definieren

$$\bar{E}_n = E_n \cdot \delta_n$$

und zerlegen noch willkürlich  $\bar{E}_n$  in zwei maßgleiche Mengen

$$\bar{E}_n = E'_n + E''_n, \quad |E'_n| = |E''_n|, \quad E'_n \cdot E''_n = 0.$$

Es sei ferner  $\{\varepsilon_n^{(i)}\}$  eine Doppelfolge positiver Zahlen mit

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(i)} = 1$$

und  $\{\eta_n\}$  eine gegen Null strebende Folge positiver Zahlen

$$1 > \eta_n > 0, \quad \eta_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Nun wollen wir durch ein Induktionsverfahren gleichzeitig  $M(u)$  und  $f(x)$  mit den verlangten Eigenschaften definieren. Dazu werden wir jede der Mengen  $E'_n$  und  $E''_n$  in einer noch festzulegenden Weise als Summe von abzählbar vielen Mengen darstellen

$$E'_n = E_n^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} E_n^{(i)}, \quad E''_n = E_n^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} E_n^{(i)},$$

so daß die Bedingungen erfüllt sind:

$$|E_n^{(0)}| \geq 0, \quad |E_n^{(i)}| \geq 0, \quad |E_n^{(i)}| = |E_n^{(j)}| > 0,$$

$$E_n^{(i)} \cdot E_n^{(j)} = E_n^{(i)} \cdot E_n^{(j)} = 0 \quad \text{für } i \neq j.$$

Das Induktionsverfahren wird so beschaffen sein, daß schrittweise die Werte von  $M(n)$  für  $n=0, 1, 2, \dots$ , die Mengen  $E_n^{(i)}$ ,  $E_n^{(i)}$  und die Werte von  $f(x)$  für  $x \in E_n^{(i)}$ ,  $x \in E_n^{(i)}$  definiert werden.

Wir ordnen die Folge der natürlichen Zahlen  $1, 2, \dots, l, \dots$  in eine Doppelfolge  $\{q_{ni}\}$ . Dadurch wird zwischen den natürlichen Zahlen und der Menge der Indizespaare  $(n, i)$  eine eindeutige Zuordnung hergestellt. Das der Zahl  $l$  zugeordnete Paar heiße  $(n_l, i_l)$ . Es ist dann  $l = q_{n_l i_l}$ . Wenn  $l$  alle natürlichen Zahlen durchläuft, durchläuft  $(n_l, i_l)$  alle Zahlenpaare. Wir definieren

0-ter Schritt:  $M(0) = 0$ ,  $M(1) > 0$ , sonst beliebig.

<sup>6)</sup> Vgl. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, II Aufl. (1927) p. 407–408.

<sup>7)</sup> Das Maß einer meßbaren Menge  $E$  bezeichnen wir immer mit  $|E|$ .

1-ter Schritt: Ist  $1 = q_{n_1 i_1}$ , so bestimmen wir die Mengen  $E_{n_1}^{(i_1)}$ ,  $E_{n_1}^{(i_1)}$  so, daß

$$|E_{n_1}^{(i_1)}| \cdot M(1) = |E_{n_1}^{(i_1)}| \cdot M(1) \leq \varepsilon_{n_1}^{(i_1)}$$

und

$$|E_{n_1}' - E_{n_1}^{(i_1)}| > 0, \quad |E_{n_1}'' - E_{n_1}^{(i_1)}| > 0.$$

Zur so bestimmten Zahl  $|E_{n_1}^{(i_1)}| = |E_{n_1}^{(i_1)}|$  definieren wir  $M(2)$  so, daß

$$|E_{n_1}^{(i_1)}| \cdot M(2) \geq 1, \quad M(2) > M(1).$$

Schließlich setzen wir

$$f(x) = 1 \quad \text{für } x \in E_{n_1}^{(i_1)}, \quad f(x) = -1 \quad \text{für } x \in E_{n_1}^{(i_1)}.$$

2-ter Schritt: Es sei  $2 = q_{n_2 i_2}$ . Wir bestimmen  $E_{n_2}^{(i_2)}$  und  $E_{n_2}^{(i_2)}$  so, daß

$$|E_{n_2}^{(i_2)}| \cdot M(2) = |E_{n_2}^{(i_2)}| \cdot M(2) \leq \varepsilon_{n_2}^{(i_2)}$$

und

$$|E_{n_2}' - E_{n_1}^{(i_1)} - E_{n_2}^{(i_2)}| > 0, \quad |E_{n_2}'' - E_{n_1}^{(i_1)} - E_{n_2}^{(i_2)}| > 0 \quad \text{falls } n_1 = n_2,$$

bzw.

$$|E_{n_2}' - E_{n_2}^{(i_2)}| > 0, \quad |E_{n_2}'' - E_{n_2}^{(i_2)}| > 0 \quad \text{falls } n_1 \neq n_2.$$

Dann definieren wir  $M(3)$  so, daß

$$|E_{n_2}^{(i_2)}| \cdot M(3) \geq 1, \quad M(3) > M(2)$$

und schließlich setzen wir

$$f(x) = 2 \quad \text{für } x \in E_{n_2}^{(i_2)}, \quad f(x) = -2 \quad \text{für } x \in E_{n_2}^{(i_2)}.$$

Es seien bereits in  $l-1$  Schritten die Mengen

$$E_{n_1}^{(i_1)}, \dots, E_{n_{l-1}}^{(i_{l-1})}; \quad E_{n_1}^{(i_1)}, \dots, E_{n_{l-1}}^{(i_{l-1})},$$

die Werte von  $f(x)$  in diesen Mengen und die Zahlen  $M(0), M(1), \dots, M(l)$  definiert.

$l$ -ter Schritt: Es sei  $l = q_{n_l i_l}$ . Wir bestimmen die Mengen  $E_{n_l}^{(i_l)}$ ,  $E_{n_l}^{(i_l)}$  so, daß

$$(3) \quad |E_{n_l}^{(i_l)}| \cdot M(l) = |E_{n_l}^{(i_l)}| \cdot M(l) \leq \varepsilon_{n_l}^{(i_l)}$$

und

$$(4) \quad |E_{n_l}' - \sum_{(r)} E_{n_r}^{(i_r)}| > 0, \quad |E_{n_l}'' - \sum_{(r)} E_{n_r}^{(i_r)}| > 0,$$

wobei die Summationen in (4) über alle diejenigen  $r \leq l$  zu erstrecken sind, für welche  $n_r = n_l$  ist. Dann definieren wir  $M(l+1)$  so, daß

$$(5) \quad |E'_{n_l^{(i_l)}}| \cdot M(l+1) \geq 1, \quad M(l+1) > M(l)$$

und setzen schließlich fest

$$(6) \quad f(x) = l \text{ für } x \in E'_{n_l^{(i_l)}}, \quad f(x) = -l \text{ für } x \in E''_{n_l^{(i_l)}}.$$

Durch dieses Induktionsverfahren sind die Mengen  $E'_n^{(i)}$ ,  $E''_n^{(i)}$  für alle Indizespaare  $(n, i)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $i = 1, 2, \dots$  definiert. Wir definieren noch

$$E_n^{(0)} = E'_n - \sum_{i=1}^{\infty} E'_n^{(i)}, \quad E''_n^{(0)} = E''_n - \sum_{i=1}^{\infty} E''_n^{(i)}$$

für  $n = 1, 2, \dots$

Die Funktion  $f(x)$  ist bereits in allen Mengen  $E'_n^{(i)}$ ,  $E''_n^{(i)}$  definiert. In allen übrigen Punkten von  $\langle 0, 1 \rangle$  setzen wir  $f(x) = 0$ .

Es ist noch die bisher für ganzzahlige  $u \geq 0$  definierte Funktion  $M(u)$  zu einer für  $-\infty < u < \infty$  überall erklärten, stetigen Funktion zu ergänzen.

Wir definieren: Für  $0 \leq u \leq 1$  verlaufe  $M(u)$  linear von  $M(0) = 0$  bis  $M(1)$ . Dann sei

$$(7) \quad M(u) = M(l+1) \text{ für } l + \eta_l \leq u \leq l+1.$$

In den Intervallen  $l \leq u \leq l + \eta_l$  ergänzen wir  $M(u)$  zu einer monoton wachsenden, stetigen (evtl. stetig differenzierbaren) Funktion. Für  $u \leq 0$  werde einfach gesetzt  $M(u) = M(|u|)$ .

Offenbar kann durch entsprechende Wahl von  $M(l+1)$  in (5) ein beliebig schnelles Anwachsen von  $M(u)$  erreicht werden, z. B. so, daß  $\frac{M(u)}{u} \rightarrow \infty$  für  $0 \leq u \rightarrow \infty$ .

2. Das Integral  $\int_0^1 M[f(x)] dx$  existiert. Es ist nämlich wegen

(3), (6) und (2)

$$\int_0^1 M[f(x)] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \int_{E_n^{(i)}} M[f(x)] dx + \int_{E''_n^{(i)}} M[f(x)] dx \right]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \int_{E'_{n_l^{(i_l)}}} M[f(x)] dx + \int_{E''_{n_l^{(i_l)}}} M[f(x)] dx \right] \\ &= 2 \sum_{l=1}^{\infty} |E'_{n_l^{(i_l)}}| \cdot M(l) \leq 2 \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_{n_l^{(i_l)}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(i)} = 2. \end{aligned}$$

3. Für jede streckenweise konstante Funktion  $s(x) \neq 0$  gilt die Ungleichung

$$(8) \quad \int_0^1 M[f(x) - s(x)] dx \geq 1.$$

Das ergibt sich folgendermaßen:

Sei  $\delta$  ein Intervall, wo  $-s(x) > 0$ ,  $\delta_p$  ein in  $\delta$  enthaltenes Intervall mit rationalen Endpunkten. Dann ist

$$\int_0^1 M[f(x) - s(x)] dx \geq \int_{\delta_p} \geq \int_{\bar{E}_p} \geq \int_{E'_p} \geq \int_{E''_p} \geq \int M[f(x) - s(x)] dx$$

für jedes  $i = 1, 2, \dots$ . In der Folge der Indizespaare  $(i_1, n_1)$ ,  $(i_2, n_2), \dots, (i_l, n_l), \dots$  kommen unendlich viele Paare mit  $n_l = p$  vor. Wir wählen  $l_0$  so groß, daß in  $\delta_p$  die Ungleichung

$$(9) \quad |s(x)| > \eta_l \text{ für } l \geq l_0$$

gilt und noch so, daß  $n_{l_0} = p$  ist. Es ist

$$\int_0^1 M[f(x) - s(x)] dx \geq \int_{E'_{n_{l_0}}^{(i_{l_0})}} M[f(x) - s(x)] dx.$$

Wegen (6), (9), (7), (5) ist also

$$\begin{aligned} \int_0^1 M[f(x) - s(x)] dx &\geq \int_{E'_{n_{l_0}}^{(i_{l_0})}} M[l_0 - s(x)] dx \geq \int_{E'_{n_{l_0}}^{(i_{l_0})}} M[l_0 + \eta_{l_0}] dx \\ &= \int_{E'_{n_{l_0}}^{(i_{l_0})}} M[l_0 + 1] dx = |E'_{n_{l_0}}^{(i_{l_0})}| \cdot M(l_0 + 1) \geq 1. \end{aligned}$$

Sollte es kein Intervall geben, in welchem  $-s(x) > 0$  ist, so gibt es ein Intervall, wo  $-s(x) < 0$  gilt und dann führt man genau dieselbe Überlegung mit Hilfe der Mengen  $E'_n$ ,  $E''_n$  durch.

4. Für jede stetige Funktion  $g(x) \not\equiv 0$  gilt die Ungleichung

$$\int_0^1 M[f(x) - g(x)] dx \geq 1.$$

Sei  $\delta$  ein Intervall, in welchem  $-g(x) > 0$  ist; wir bezeichnen mit  $m$  das Minimum von  $-g(x)$  in  $\delta$ . Es ist  $m > 0$ . In  $\delta$  sei das Intervall  $\delta_p$  mit rationalen Endpunkten enthalten. Wir wählen  $l_1$  so, daß

$$n_{l_1} = p; \quad m \geq \eta_{l_1} \text{ für } l \geq l_1.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 M[f(x) - g(x)] dx &\geq \int_{E_{n_{l_1}}^{(l_1)}} M[f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_{E_{n_{l_1}}^{(l_1)}} M[l_1 - g(x)] dx \geq \int_{E_{n_{l_1}}^{(l_1)}} M[l_1 + m] dx \geq \int_{E_{n_{l_1}}^{(l_1)}} M[l_1 + \eta_{l_1}] dx \\ &= |E_{n_{l_1}}^{(l_1)}| M(l_1 + 1) \geq 1. \end{aligned}$$

Eine analoge Überlegung führt zum Ziel, wenn überall  $g(x) > 0$  ist.

(Reçu par la Rédaction le 31. 7. 1930).

## Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen

von

S. BANACH (Lwów).

In der vorliegenden Arbeit beschäftige ich mich mit der Untersuchung einiger Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen. Eine trigonometrische Reihe soll dabei *lakunär* heißen, wenn sie die Gestalt

$$(1) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k_n t + b_n \sin k_n t)$$

hat, wo die Folge  $\{k_n\}$  aus der natürlichen Zahlenfolge durch Weglassen unendlich vieler Glieder entsteht. Es sind über die lakunären Reihen einer besonderen Klasse, über die Reihen nämlich, für welche die Bedingung

$$(2) \quad \frac{k_{n+1}}{k_n} > k > 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

stattfindet, zwei bemerkenswerte Sätze bekannt. Der erste rührt von Herrn S. Sidon her und lautet: Wenn die Reihe (1) die Fourierreihe einer meßbaren beschränkten Funktion ist, so muß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

konvergent sein<sup>1)</sup>. Den zweiten hat Herr A. Zygmund bewiesen: Stellt die Reihe (1) die Fourierreihe einer integrierbaren

<sup>1)</sup> S. Sidon, Ein Satz über die absolute Konvergenz von Fourierreihen, in denen sehr viele Glieder fehlen, Math. Ann. 96 (1927) p. 418—419; S. Sidon, Verallgemeinerung eines Satzes über die absolute Konvergenz von Fourierreihen mit Lücken, Math. Ann. 97 (1927) p. 675—676.