il suffit de prouver la convergence presque partout de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s_n-\sigma_n)^2}{n+1}, \tag{T}$$

car, de la convergence d'une série $\sum c_n$, il résulte, comme on le sait que $(c_1+2c_2+\ldots+nc_n)/n+1 \longrightarrow 0$, cette dernière expression étant égale à la différence entre la somme partielle et la moyenne arithmétique des sommes partielles de $\sum c_n$.

Intégrons la série (T) terme à terme dans (a, b). Nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\int_{a}^{b}(s_n-\sigma_n)^2\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n}k^2 a_k^2$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}k^2 a_k^2\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}a_k^2<\infty.$$

Si la série T à termes non négatifs était divergente dans un ensemble de mesure positive, la série intégrée serait divergente, ce qui n'est pas le cas. Le théorème est donc démontré.

Pour les applications de la relation (A) aux questions de sommabilité des séries (S), nous renvoyons le lecteur au premier des travaux cités.

(Reçu par la Rédaction le 18. 7. 1930).

Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen

von

J SCHAUDER (Lwów).

In der vorliegenden Arbeit[1]) werden alle drei Fredholmschen für die Integralgleichungen geltenden „determinantenfreien" Sätze[2]) in präziser Fassung auf allgemeine vollstetige Funktionaloperationen übertragen, wobei der zugrundgelegte Raum linear, normiert und vollständig ist. Solche Räume werden wir kurz als Räume „vom Typus B" bezeichnen[3]). Derselbe Gegenstand wurde in einer früheren, grundlegenden Arbeit von Herrn F. Riesz[4]) behandelt und ein Teil der in Betracht kommenden Fredholmschen Sätze bereits bewiesen. Für den Fall eines *allgemeinen* Raumes vom Typus B konnten mittels Rieszscher Methoden diejenigen Sätze nicht erledigt werden, bei welchen der Begriff der „transponierten Gleichung" eine Rolle spielte. In dieser Note bringen wir die noch nötige Ergänzung. Dabei tritt die restlose Dualität zwischen einer Funktionaloperation und ihrer konjugierten Funktionaloperation klar zutage.

Im Anhange werden diese Sätze auf Integralgleichungen der Potentialtheorie im Raume angewendet.

Wir betrachten einen Raum R vom Typus B. Sei $X(x)$ irgendein lineares und stetiges Funktional, welches im Raume R

---

[1]) Der Hauptinhalt dieser Arbeit wurde in der Sitzung vom 8. 6. 1929 der Poln. math. Gesellschaft (Abteilung Lwów) vorgetragen.

[2]) Was den Wortlaut dieser Sätze anbetrifft vgl. z. B.: E. Hellinger u. O. Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Enzykl. der math. Wiss. II C 13 (1927) p. 1335—1648, insb. p. 1376—77.

[3]) S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math. 3 (1922) p. 133—181, insb. p. 135—136.

[4]) F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Mathematica 41 (1918) p. 71—98.

erklärt ist[5]). Die Gesamtheit aller Funktionale X bildet eine abstrakte Menge, welche durch passende Normierung wieder zu einem Raume R^* vom Typus B zusammengefaßt werden kann.

Als Norm des Funktionals X (in Zeichen $\|X\|$) definieren wir die kleinste Zahl M, welche die Ungleichung

$$|X(x)| \leqslant M \tag{1}$$

— unter der Zusatzbedingung $\|x\| \leqslant 1$ — erfüllt. War der ursprüngliche Raum vom Typus B, so gilt dies auch vom Raume der Funktionale, dem s. g. konjugierten (transponierten) Raume.

Es sei jetzt eine Funktionaloperation[6]) $y = f(x)$ vorgelegt, welche den ganzen x-Raum R linear und stetig auf eine echte oder unechte Teilmenge des y-Raumes R' abbildet. Wir wollen nun festsetzen, was unter der konjugierten (transponierten) Funtionaloperation verstanden werden soll[7]). Sie soll nämlich den Y-Raum (den Raum aller Funktionale über R') auf den X-Raum (den zum x-Raume konjugierten Raum) abbilden. Sei nämlich $Y(y)$ ein beliebiges Funktional im y-Raume. Dem Y — als selbstständiges Element betrachtet — ordnen wir das Funktional

$$X(x) = Y[f(x)] \qquad (x \in R)$$

zu. Wir schreiben dann

$$X = Y[f(x)] = F(Y) \tag{2}$$

und dies ist die gewünschte konjugierte Funktionaloperation. Sie ist linear und stetig in dem (konjugierten) Y-Raume als Definitionsbereiche und dem (konjugierten) X-Raume als Wertbereiche. Es sei nochmals hervorgehoben, daß F in ganz anderen Räumen als $y = f(x)$ erklärt ist.

Herr Riesz[8]) nennt eine Funktionaloperation vollstetig, wenn diese beschränkte Mengen in kompakte überführt. Wir beweisen nun den

[5]) Eine Funktion, die jedem Elemente x eines x-Raumes ein Element y eines y-Raumes zuordnet, bezeichnen wir als Funktionaloperation (Abbildung, Transformation). Sind die Elemente y reelle Zahlen, so spricht man von einem Funktional. Die Begriffe „linear" und „stetig" brauchen nicht erklärt zu werden.

[6]) In dieser Arbeit haben wir es nur mit linearen und stetigen Funktionaloperationen (Funktionalen) zu tun; wir unterdrücken also in den Aussagen öfters die Worte „linear und stetig".

[7]) Vgl.: S. Banach, Sur les fonctionnelles linéaires II, Studia Math. 1 (1929) p. 223—239, insb. p. 235.

[8]) Vgl. die unter [4]) zitierte Arbeit, insb. p. 74.

Satz I. *Ist $y = f(x)$ linear und vollstetig, so ist auch $X = F(Y)$ in entsprechenden Räumen linear und vollstetig.*

Beweis. Sei E die Einheitskugel im x-Raume, d. h. die Menge aller dieser und nur dieser Elemente $x \in R$, für welche

$$\|x\| \leqslant 1$$

gilt. Das Bild $f(E)$ dieser Menge ist im y-Raume gelegen und nach Voraussetzung kompakt. Daraus folgt zuerst die Beschränktheit des Bildes $f(E)$, d. h. die Existenz einer solchen Zahl C, daß für jedes $y \in f(E)$

$$\|y\| \leqslant C, \quad y = f(x) \tag{3}$$

besteht. Viel wichtiger ist die folgende aus der Kompaktheit fließende Eigenschaft der Menge $f(E)$: Für beliebiges $\delta > 0$ läßt sich in $f(E)$ eine endliche Teilfolge

$$y_1,\ y_2, \ldots\ y_{n(\delta)}$$

finden, so daß für jedes $y \in f(E)$ wenigstens eine Ungleichung der Form

$$\|y - y_i\| < \delta, \qquad (i = 1, 2, \ldots n(\delta)) \tag{4}$$

besteht. Oder in Worten: Jedes $y \in f(E)$ ist von wenigstens einem Punkte y_i weniger als um δ entfernt. Solche endliche Folgen bilden wir für $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n} \ldots$ und bekommen auf diese Weise eine abzählbare, in $f(E)$ überalldichte Punktmenge $\{y_s\}_{s=1,2\ldots}$ von folgender Eigenschaft: Für jedes $\delta > 0$ läßt sich aus $\{y_s\}$ eine endliche Teilfolge $y_{s_1}, y_{s_2}, \ldots y_{s_{n(\delta)}}$ herausgreifen, so daß ein beliebiger Punkt y von $f(E)$ von wenigstens einem $\{y_{s_i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots n(\delta))$ weniger als um δ entfernt ist.

Wir schreiten jetzt zum Beweise des Satzes I. Sei also eine beschränkte Folge von Funktionalen $\{Y_r\}_{r=1,2,\ldots}$ gegeben:

$$\|Y_r\| \leqslant K, \qquad (r = 1, 2, \ldots); \tag{5}$$

es ist die Kompaktheit der entsprechenden Folge $X_r = F(Y_r)$ zu beweisen. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Zahlenfolgen

$$\begin{array}{llll}
Y_1(y_1), & Y_2(y_1), \ldots & Y_r(y_1) \ldots & \text{(erste Folge)} \\
Y_1(y_2), & Y_2(y_2), \ldots & Y_r(y_2) \ldots & \text{(zweite Folge)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
Y_1(y_s), & Y_2(y_s), \ldots & Y_r(y_s) \ldots & \text{(s-te Folge)}
\end{array}$$

u. s. w.

Diese Zahlenfolgen sind gleichmäßig beschränkt. Denn es ist

$$|Y_r(y_s)| \leqslant \|Y_r\| . \|y_s\| \leqslant K . C \tag{6}$$

wegen (3) und (5). Somit kann man nach dem bekannten Diagonalverfahren eine ins Unendliche wachsende Folge von natürlichen Zahlen $r_1, r_2, \ldots r_p, \ldots$ herausgreifen, so daß für jedes s die Folgen

$$Y_{r_1}(y_s), \quad Y_{r_2}(y_s), \quad \ldots \quad Y_{r_p}(y_s), \quad \ldots$$

für $s = 1, 2, \ldots$ konvergent werden. D. h. es sollen die Grenzwerte

$$\lim_{i \to \infty} Y_{r_i}(y_s) = c_s$$

für $s = 1, 2, \ldots$ vorhanden sein. Man überzeugt sich nun leicht von der gleichmäßigen Konvergenz der Folgen $Y_{r_i}(y)$ in der ganzen Bildmenge $f(E)$. Denn ist $\delta > 0$ beliebig gegeben, so gibt es nach (4) eine endliche Folge

$$y_{s_1}, \quad y_{s_2}, \ldots y_{s_{m(\delta)}},$$

so daß für jedes $y \in f(E)$ wenigstens eine der Ungleichungen

$$\|y - y_{s_i}\| \leqslant \frac{\delta}{4K}, \qquad (i = 1, 2, \ldots m(\delta)) \tag{7}$$

erfüllt ist. Die Folgen

$$Y_{r_1}(y_{s_i}), \quad Y_{r_2}(y_{s_i}), \ldots \quad Y_{r_p}(y_{s_i}), \ldots$$

sind nun in einer endlichen Anzahl vorhanden (nämlich für $i = 1, 2, \ldots m(\delta)$) und konvergieren somit gleichmäßig nach ihren Grenzwerten c_{s_i}. Es ist also ein $P(\delta)$ vorhanden, so daß für $p', p > P(\delta)$ alle Ungleichungen

$$|Y_{r_p}(y_{s_i}) - Y_{r_{p'}}(y_{s_i})| < \frac{\delta}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots m(\delta)) \tag{8}$$

zugleich bestehen. Ist jetzt $y \in f(E)$ beliebig, so gibt es wenigstens ein y_{s_i}, welches (6) erfüllt. Für dieses y_{s_i} gilt dann weiter, wegen (7), (3), (5),

$$\begin{aligned} |Y_{r_p}(y) - Y_{r_p}(y_{s_i})| &\leqslant \|Y_{r_p}\| . \|y - y_{s_i}\| \leqslant K \frac{\delta}{4K} = \frac{\delta}{4} \\ |Y_{r_{p'}}(y) - Y_{r_{p'}}(y_{s_i})| &\leqslant \|Y_{r_{p'}}\| . \|y - y_{s_i}\| \leqslant K . \frac{\delta}{4K} = \frac{\delta}{4} \end{aligned} \tag{9}$$

für $y \in f(E)$.

Ziehen wir (8), (9) in Betracht, so ist

$$|Y_{r_p}(y) - Y_{r_{p'}}(y)| < \delta, \text{ für } p,\ p' > P,\ y = f(x) \in f(E). \tag{10}$$

Die Folgen $\{Y_{r_p}(y)\}$ sind also in $f(E)$ gleichmäßig konvergent. Für die entsprechenden Funktionale X_{r_p} gilt daher wegen (2), (10)

$$X_{r_p} = Y_{r_p}[f(x)] = Y_{r_p}(y), \qquad y = f(x) \in f(E),$$

$$|X_{r_p}(x) - X_{r_{p'}}(x)| = |Y_{r_p}(y) - Y_{r_{p'}}(y)| < \delta$$

für $p', p > P$, $y = f(x)$, $x \in E$, $\|x\| \leqslant 1$.

Daraus folgt

$$\|X_{r_p} - X_{r_{p'}}\| < \delta$$

für $p, p' > P$, $y = f(x)$, $\|x\| \leqslant 1$.

Aus dieser letzten Ungleichung folgt, wenn wir uns an die Definition der Norm eines Funktionals erinnern,

$$\|X_{r_p} - X_{r_{p'}}\| < \delta \quad (p > P, \ p' > P),$$

w. z. b. w.

Satz II. *Ist die konjugierte Funktionaloperation $X = F(Y)$ vollstetig* [9]*, so trifft dies auch für die ursprüngliche Funktionaloperation $y = f(x)$ zu.*

Beweis. Wir betrachten die zum x-Raume bezw. y-Raume konjugierten Räume X, Y. Auch diese Räume besitzen ihre eigenen konjugierten Räume, die durch Bildung von Funktionalen $\alpha(X)$, $\beta(Y)$ über dem X bezw. Y-Raum erhalten werden. Wir bezeichnen den α-Raum als den zum x-Raume bikonjugierten Raum; eine ähnliche Definition besteht für den β-Raum.

Die ursprünglichen Räume der Elemente x, bezw. y sind mit einer Teilmenge ihrer bikonjugierten α-, bezw. β-Räume homeomorph und sogar isomorph. In der Tat, ist x_0 ein beliebiges festes Element aus dem x-Raum X, so stellt uns

$$X(x_0) = \alpha(X) = \alpha_{x_0}(X) \tag{11}$$

bei veränderlichem X ein Funktional über dem Funktional X, also ein Element α_{x_0} aus dem bikonjugierten α-Raum dar. Wie aus der Formel (11) folgt, ist diese Zuordnung eineindeutig [10]. Man überzeugt sich nun sehr leicht von der folgenden Beziehung:

---

[9]) Nach der in den X und Y-Räumen üblichen Normierung.

[10]) D. h., dem Elemente x_0 wird das bikonjugierte Funktional α_{x_0} zugeordnet.

(12) $$\text{Norm des Funktionals } \alpha_{x_0} = \|x_0\|.$$

Denn die „Norm des Funktionals α_{x_0}" ist nach (1) die kleinste Zahl M, die der Bedingung

$$|\alpha_{x_0}(X)| = |X(x_0)| \leqslant M.\|X\|$$

genügt. Nun ist

$$|\alpha_{x_0}(X)| \leqslant |X(x_0)| \leqslant \|X\|.\|x_0\|,$$

also auf jeden Fall:

$$\text{Norm des Funktionals } \alpha_{x_0} \leqslant \|x_0\|.$$

Umgekehrt gibt es nach einem Erweiterungssatze des Herrn Hahn ein solches Funktional $X_0(x)$ [11]), daß

$$X_0(x_0) = \|x_0\|, \quad \|X_0\| = 1$$

ist Somit ist

$$X_0(x_0) = \|x_0\|.\|X_0\|,$$

$$\text{Norm von } \alpha_{x_0} = \|x_0\|.$$

Es läßt sich also in der Tat der x-Raum linear und beiderseits stetig auf eine Teilmenge des α-Raumes abbilden.

In den abstrakten X, bezw. Y-Räumen gilt nun unser Satz I. Betrachten wir also die (konjugierte) Funktionaloperation $X = F(Y)$ und ist diese vollstetig, so ist auch die zu ihr konjugierte Funktionaloperation

$$\beta = f^*(\alpha),$$

(13) $$\beta = \beta(Y) = \alpha[F(Y)], \qquad (\alpha = \alpha(X))$$

vollstetig. Wir sollen nun beweisen, daß die ursprüngliche Funktionaloperation $y = f(x)$ vollstetig ist. Wir betrachten eine beliebige, beschränkte, im x-Raume gelegene Menge $\varDelta$ und beweisen die Kompaktheit der Menge $f(\varDelta)$. Wir nehmen an — was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet — daß für jedes $x \in \varDelta$

$$\|x\| \leqslant 1$$

ist. Wir bilden nun das jedem x eineindeutig entsprechende bikonjugierte Element (Funktional) α_x

(11*) $$\alpha_x(X) = X(x), \qquad (x \in \varDelta).$$

[11]) H. Hahn, Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, Journ. für reine u. angew. Math. 157 (1927) p. 214—229; insb. p. 217, Satz III. Vgl. auch S. Banach, Sur les fonctionnelles linéaires I, Studia Math. 1 (1929) p. 211—216.

Da die Norm von α_x gleich $\|x\|$ ist, so sind auch im bikonjugierten α-Raume die Elemente α_x beschränkt:

$$\text{Norm } \alpha_x \leqslant 1 \text{ für } x \in \varDelta.$$

Nach Satz I bilden die entsprechenden β-Elemente eine kompakte Menge. Dies bedeutet: Es läßt sich eine Teilfolge $\alpha_n = \alpha_{x_n}$ derart bestimmen, daß

(14) $$\text{Norm } \alpha_{x_n} \leqslant 1, \quad \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \text{Norm } (\beta_m - \beta_n) = 0$$

gilt. Nun ist [Vgl. (13), (11)]

(15) $$\beta_n = \beta_n(Y) = f^*(\alpha_n) = \alpha_{x_n}[F(Y)] = \alpha_{x_n}[Yf(x)] = Y[f(x_n)],$$

$$\beta_m(Y) = \beta_m = Y[f(x)],$$

wo Y ein beliebiges im y-Raume erklärtes Funktional bedeutet. Aus (15) folgt

(16) $$\beta_n - \beta_m = Y[f(x_n) - f(x_m)],$$

also nach dem Vorhergesagten (vgl. (12))

17) $$\text{Norm } (\beta_n - \beta_m) = \|f(x_n) - f(x_m)\|.$$

Wegen (14), (17) gilt also

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|f(x_n) - f(x_m)\| = 0,$$

w. z. b. w.

Satz III. *Es seien $y = f(x)$, $z = \varphi(y)$ zwei lineare und stetige Funktionaloperationen, $X = F(Y)$ und $Y = \Phi(Z)$ ihre konjugierten. Dann ist*

$$X = F.\Phi = F[\Phi(Z)]$$

die konjugierte Funktionaloperation zu

$$z = \varphi[f(x)] = \varphi.f.$$

Beweis: unmittelbar.

Wir nehmen jetzt an, daß der x-Raum mit dem y-Raume übereinstimmt und beweisen die folgenden Hauptsätze.

Hauptsatz I. *Die beiden homogenen Gleichungen*

(18) $$\begin{aligned} x + f(x) &= 0 \\ Y + F(Y) &= 0 \end{aligned}$$

besitzen dieselbe Anzahl von linear unabhängigen Lösungen, wenn *eine der beiden Funktionaloperationen $f(x)$ resp. $F(Y)$ als vollstetig vorausgesetzt wird.*

Beweis. Ist $f(x)$ vollstetig, so ist es auch $F(Y)$ (Satz I), und umgekehrt: ist $F(Y)$ vollstetig, so ist es auch $f(x)$ (Satz II). Herr F. Riesz hat nun den Satz vom Übereinstimmen der Anzahl der Lösungen von (18) im Felde der stetigen Funktionen bewiesen, wenn dazu noch $f(x)$ von spezieller Form ist[12]). Nun sind wir aber im Besitze der Sätze I, II, III und diese Sätze erlauben uns die Rieszsche Methode auf den allgemeinen Fall zu übertragen. Wir setzen also im Folgenden die Kenntnis der Arbeit des Herrn Riesz[4]) voraus und verzichten auf den ausführlichen Beweis[13]). Wir begnügen uns mit dem Hinweis auf diejenigen Abänderungen, die vielleicht für allgemeine Räume vom Typus B notwendig sind. Es genügt, wie aus der Rieszschen Methode hervorgeht, sich mit denjenigen Funktionaloperationen $f_2(x)$ zu beschäftigen, für welche die Bildmannigfaltigkeit $f_2(B)$ des ganzen x-Raumes endlichdimensional ist. Solche Funktionaloperationen $f_2(x)$ lassen sich in der Form

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \cdot \mathfrak{x}_i$$

darstellen. Dabei sind $\{\mathfrak{x}_i\}$ linear unabhängige Elemente im B-Raume und C_i linear unabhängige Funktionale über diesem B-Raum. Die Funktionaloperation

$$X = Y + \sum_{i=1}^{n} Y(\mathfrak{x}_i) \cdot C_i \tag{19}$$

ist zu

$$y = x + f_2(x) = x + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \cdot \mathfrak{x}_i \tag{20}$$

konjugiert. Jede Lösung x von

$$x + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \cdot \mathfrak{x}_i = 0 \tag{21}$$

12) Der von Herrn Riesz betrachtete Fall ist
$$f(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy,$$
mit stetigem $K(x, y)$. Herr Riesz bemerkt auch, daß man seine Methode der Behandlung der Integralgleichung auf Kerne, die wie $\frac{1}{(x-y)^\alpha}$ unendlich werden, übertragen kann; Loc. cit. [4]).

13) F. Riesz, l. c.[4]), insbes. p. 96, 97.

läßt sich dann in der Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mathfrak{x}_i \tag{22}$$

darstellen, wogegen jede Lösung Y von

$$Y + \sum_{i=1}^{n} Y(\mathfrak{x}_i)\, C_i = 0 \tag{23}$$

die Gestalt

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i\, C_i \tag{24}$$

besitzt. Setzen wir also (22) bzw. (24) in (21) bzw. in (23) ein, und beachten die lineare Unabhängigkeit der $\{\mathfrak{x}_i\}$ einerseits und der $\{C_i\}$ anderseits, so bekommen wir für $\{\lambda_i\}$ bzw. für $\{\lambda'_i\}$ die folgenden Gleichungssysteme

$$\lambda_i + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, C_i(\mathfrak{x}_k) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

bezw.

$$\lambda'_i + \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k\, C_k(\mathfrak{x}_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Diese Gleichungssysteme besitzen aber offenbar dieselbe Anzahl von linear unabhängigen Lösungen[14]).

Hauptsatz II. a) *Ist $f(x)$ vollstetig, so ist die Gleichung*

$$y_0 = x + f(x) = h(x) \tag{25}$$

für gegebenes y_0 dann und nur dann lösbar, wenn y zu allen Nullösungen Y der konjugierten Gleichung orthogonal ist, d. h. wenn $Y(y_0) = 0$ ist. Dabei wird als Nullösung Y jede Lösung von

$$Y + F(Y) = 0 \tag{26}$$

bezeichnet.

14) Wir machen auch auf eine Arbeit des Herrn T. H. Hildebrandt aufmerksam: Über vollstetige lineare Transformationen, Acta Math. 51 (1928) p. 311—318. Der von Herrn Hildebrandt bewiesene Satz läßt sich leicht aus dem Hauptsatze I gewinnen. Aber auch umgekehrt bietet, (wie es Herr S. Mazur mir gegenüber bemerkte) das Hildebrandtsche Ergebnis einen anderen Weg, um zum Hauptsatze I zu gelangen mit Benutzung der in dieser Arbeit vorkommenden Sätze I, II. Bei Herrn Hildebrandt kommt aber der Begriff der konjugierten Funktionaloperation nicht vor.

b) *Ist $F(Y)$ vollstetig, so ist die Gleichung*

$$X_0 = Y + F(Y) = H(Y) \tag{27}$$

für gegebenes X_0 dann und nur dann lösbar, wenn X_0 zu allen Nullösungen x der ursprünglichen Gleichung $y = f(x)$ orthogonal ist, d. h. wenn $X_0(x) = 0$. Dabei wird als Nullösung x jede Lösung von

$$x + f(x) = 0 \tag{28}$$

bezeichnet.

Beweis. a) Die Bedingung der Orthogonalität $Y(y_0) = 0$ ist notwendig. Denn ist (25) lösbar und bezeichnet man mit Y eine beliebige „Nullösung" von (26), so gilt für alle $y = x + f(x)$

$$Y + F(Y) = 0, \text{ d. h. } Y(x) + Y[f(x)] = Y(y) = 0.$$

Also gilt die letzte Gleichung speziell für y_0.

Die Bedingung $Y(y_0) = 0$ ist hinreichend. Man betrachte nämlich einerseits die lineare Bildmannigfaltigkeit $h(B)$ des y-Raumes, anderseits das gegebene Element y_0, für welches $Y(y_0) = 0$ besteht, falls Y die Gleichung (26) erfüllt. Würde nun y_0 zur Mannigfaltigkeit $h(B)$ nicht gehören, so gäbe es nach dem Erweiterungssatze des Herrn Hahn[15]) [da $h(B)$ abgeschlossen ist[16])], ein Funktional Y^*, welches in $h(B)$ identisch verschwindet, für welches aber $Y^*(y_0) \neq 0$ wäre. Da nun Y in $h(B)$ verschwindet, so gilt für jedes x

$$Y^*[x + f(x)] = Y^*(x) + Y^*[f(x)] = 0 = Y^* + F(Y^*)$$

d. h. Y^* wäre eine Nullösung der konjugierten Gleichung, wobei aber $Y^*(y_0) \neq 0$. Dies wäre ein Widerspruch gegen die Voraussetzung, daß y_0 auf allen Nullösungen Y orthogonal steht.

b) Die Bedingung der Orthogonalität $X_0(x)$ ist notwendig. Ist nämlich (27) lösbar, so bedeutet dies: Es gibt ein Y, so daß

$$X_0(x) = Y(x) + Y[f(x)]$$

für alle x. Ist speziell x eine Nullösung von (28), so folgt

$$X_0(x) = 0.$$

Die Bedingung ist hinreichend. Wir nehmen wieder die nac Herrn F. Riesz[16]) abgeschlossene Mannigfaltigkeit $h(B)$ zur Hilfe

[15]) Vgl. [11]).
[16]) l. c. [4]), insb. p. 82 Satz 4.

Ist $X_0(x) = 0$, so ist auf jeden Fall das gesuchte Y in der Menge $h(B)$ eindeutig definiert. In der Tat, es ist

$$Y(y) = Y[x + f(x)] = Y(x) + Y[f(x)] = X_0(x), \quad y \in h(B).$$

Nun ist $h(B)$ abgeschlossen und nach dem schon zitierten Hahnschen[11]) Erweiterungssatze läßt sich $Y(y)$ auf den ganzen y-Raum erweitern, w. z. b. w.

Hauptsatz III. *Voraussetzung: Eine der Funktionaloperationen $f(x)$ bezw. $F(Y)$ ist vollstetig.*

Behauptung: Die vier folgenden Eigenschaften sind einander gleichwertig[17]):

a) *die Gleichung $y = x + f(x)$ ist für jedes y lösbar,*
b) *die Gleichung $X = Y + F(Y)$ ist für jedes X lösbar,*
c) *die Gleichung $0 = x + f(x)$ besitzt keine „Nullösungen",*
d) *die Gleichung $0 = Y + F(Y)$ besitzt keine „Nullösungen".*

Beweis. Der Beweis folgt durch formell-logische Schlüsse aus den Hauptsätzen I, II[18]).

Diese Sätze über vollstetige Funktionaloperationen können auf heutzutage fast klassische Probleme angewendet werden. Wir zeigen es an dem Beispiel der Integralgleichungen der Potentialtheorie.

[17]) Die Gleichwertigkeit von a) und c) wurde bereits von Herrn Riesz bewiesen, l. c. [4]).

[18]) Betrachtet man die Funktionaloperation $y = x + \lambda f(x)$ mit vollstetigen $f(x)$, so ist die Lösung $x = \varphi(y, \lambda)$ eine meromorphe Funktion von λ.

Nach Riesz l. c. [4]), insb. p. 88—89, ist nämlich $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Dabei besitzt

I) die Gleichung $x + f_1(x) = 0$ nur die triviale Lösung Null,
II) $f_2(x)$ ist endlichdimensional,
III) f_1 und f_2 sind zueinander orthogonal d. h. $f_1[f_2(x)] = f_2[f_1(x)] = 0$.

Wir führen die Bezeichnungen

$$B_\lambda = x + \lambda f(x), \quad H_\lambda = x + \lambda f_1(x), \quad K_\lambda = x + \lambda f_2(x)$$

ein. Dann ist $B_\lambda = H_\lambda K_\lambda = K_\lambda H_\lambda$.

Die Funktionaloperationen B_λ, H_λ, K_λ besitzen nur isolierte Singularitäten [Riesz. p. 90]. Ist z. B. λ_0 ein regulärer Punkt für B_λ, so gilt in einem Kreise $|\lambda - \lambda_0| < r$ die Entwicklung

$$x = B_\lambda^{-1} = \varphi_0(y) + (\lambda - \lambda_0)\varphi_1(y) + \ldots (\lambda - \lambda_0)^n \varphi_n(y) + \ldots$$

mit

$$\varphi_n(y) = (-1)^n B_{\lambda_0}^{-n} f^{n-1}.$$

Ist nun endlich λ_0 ein singulärer Punkt, so darf man immer $\lambda_0 = 1$ voraussetzen, wie eine einfache Transformation zeigt. Für eine Umgebung der Stelle $\lambda_0 = 1$ sind dann B_λ^{-1}, H_λ^{-1}, K_λ^{-1} vorhanden, da $\lambda_0 = 1$ für alle drei Funktionaloperationen höchstens eine isolierte Singularität aufweist. Es gilt also für $\lambda \neq 1$

$$B_\lambda^{-1} = H_\lambda^{-1} . K_\lambda^{-1} = K_\lambda^{-1} . H_\lambda^{-1}.$$

Diese Integralgleichung wird durch Übergang zu den iterierten Kernen gelöst, wobei manchmal die Anzahl der durchzuführenden Iterationen sehr hoch ist. Dieser Übergang kann vermieden werden[19]).

Sei — um gleich einen allgemeinen Fall vorwegzunehmen — eine geschlossene Fläche S gegeben, die überall eine Tangentialebene besitzt. Ist P ein Punkt der Fläche, so bezeichnen wir mit

α) n_P die Normale im Punkte P,

β) ξ, η, ζ die Achsen eines im Raume festen Koordinatensystems,

γ) λ, C zwei von der Wahl der Flächenpunkte unabhängige Konstanten, wobei noch $0 < \lambda < 1$ ist.

Dann sollen — dies setzen wir noch voraus — für zwei beliebige Flächenpunkte P_1, P_2 die folgenden Ungleichungen gelten

$$|\cos(n_{P_1}, \xi) - \cos(n_{P_2}, \xi)| \leqq C . r_{12}^{\lambda}$$
$$|\cos(n_{P_1}, \eta) - \cos(n_{P_2}, \eta)| \leqq C . r_{12}^{\lambda}$$
$$|\cos(n_{P_1}, \zeta) - \cos(n_{P_2}, \zeta)| \leqq C . r_{12}^{\lambda}$$

Für solche Flächen wollen wir die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie behandeln[20]). Bekanntlich wird diese Randwertaufgabe auf die Integralgleichung

$$(29) \qquad f(Q) = \varphi(Q) + 2\pi \iint_S \varphi(P) \frac{\cos(r_{PQ}, n_P)}{r_{PQ}^2} d\sigma$$

zurückgeführt, wobei die stetige Funktion $f(Q)$ bekannt ist und die stetige Funktion $\varphi(Q)$ gesucht wird. Diese Gleichung ist unter

Nun ist $H_{\lambda_0} = H_1$ wegen Bedingung I regulär, es läßt sich also H_λ^{-1} in eine nach $(\lambda - 1)^n$ — $n \geqq 0$ — fortschreitende Potenzreihe entwickeln. Alles kommt also auf das Verhalten der Funktionaloperation K_λ^{-1} hinaus, die sich in einfachster Weise behandeln läßt, da $f_2(x)$ endlichdimensional ist. (Siehe auch für den Fall des Hilbertschen Raumes: F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris 1913; insbes. p. 105, 106).

[19]) Vgl. den unter [2]) zitierten Enzyklopädieartikel, p. 1471, Fußnote 304.

[20]) Die Lösbarkeit der Fredholmschen Integralgleichungen für Flächen, welche den vorangegebenen Bedingungen genügen, wird von mir in einer demnächst in der Math. Zeitschrift unter dem Titel „Potentialtheoretische Untersuchungen" erscheinenden Arbeit benutzt. Diese Arbeit wird im Folgenden als P. U. zitiert.

den oben erwähnten Voraussetzungen immer lösbar. Denn zuerst ist die Funktionaloperation

$$(30) \qquad \varphi^*(Q) = 2\pi \iint_S \varphi(P) \frac{\cos(r_{PQ}, n_P)}{r_{PQ}^2} d\sigma$$

vollstetig. Es läßt sich nämlich beweisen, daß jede stetige Funktion $\varphi(Q)$ durch die Funktionaloperation (30) in eine Funktion $\varphi^*(Q)$ übergeht, welche einer Hölderschen Bedingung mit dem Exponenten λ genügt[21]). In Zeichen

$$|\varphi^*(Q_1) - \varphi^*(Q_2)| \leqq \text{Abs. Konst.} \times \operatorname{Max} |\varphi(x)| \times r_{12}^{\lambda}.$$

War also Max $|\varphi|$ beschränkt, so bilden die entsprechenden $\varphi^*(Q)$ bekanntlich eine im Raume der stetigen Funktionen kompakte Menge (weil sie gleichmäßig stetig sind). Es ist (30) in der Tat vollstetig. Um weiter vorzugehen, nehmen wir den schon bei Herrn Riesz vorhandenen Satz zur Hilfe, daß die Gleichung (29) dann und nur dann für jedes $f(Q)$ lösbar ist, wenn die Gleichung

$$(31) \qquad \varphi(Q) + 2\pi \iint_S \varphi(P) \frac{\cos(r_{PQ}, n_P)}{r_{PQ}^2} d\sigma = 0,$$

die verschwindende Funktion ausgenommen, keine Lösungen besitzt. Die Idee des Beweises ist bekannt und die nötigen Hilfssätze findet der Leser in der unter [20]) zitierten Arbeit.

Gäbe es nämlich eine von Null verschiedene Lösung von (31), so müßte das mit φ als Moment gebildete Potential der Doppelbelegung

$$W(M) = \iint_S \varphi(P) \frac{\cos(r_{PQ}, n_P)}{r_{PQ}^2} d\sigma$$

innerhalb S verschwinden. Wegen der Hilfssätze VII, VIII, IX, X, XI der unter [20]) zitierten Arbeit, die man sukzessive anwendet, müßte dann $\varphi(Q)$ tangentielle Ableitungen besitzen, die ihrerseits selbst einer Hölderschen Bedingung mit dem Exponenten λ[22]) genügen. Unter dieser Bedingung ist aber die Normalableitung $\frac{\partial W}{\partial n}$ auf der Fläche selbst stetig[23]).

[21]) Siehe P. U., Hilfssatz VII.

[22]) λ ist der „Flächenexponent".

[23]) Siehe P. U. Hilfssatz XV.

Da nun W im Innern von S verschwindet, so ist

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{\text{inn.}} = 0 ,$$

also da $\frac{\partial W}{\partial n}$ stetig ist, auch

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{\text{äuß.}} = 0 .$$

Daraus folgt aber bekanntlich $\varphi \equiv 0$ [24]).

Auch andere Randwertaufgaben können nach den hier dargelegten Sätzen gelöst werden.

[24]) Siehe z. B.: J. Horn, Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Sammlung Schubert, Leipzig 1910; insb. p. 303—304.

(Reçu par la Rédaction le 7. 7. 1930).

Über Approximation im Mittel

von

Z. W. BIRNBAUM und W. ORLICZ (Lwów).

Bekanntlich kann man jede mit der p-ten Potenz integrierbare Funktion $f(x)$ durch streckenweise konstante und sogar durch stetige Funktionen $h(x)$ beliebig genau im Mittel mit der p-ten Potenz approximieren, d. h. es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $h(x)$, so daß

$$\int_0^1 |f(x) - h(x)|^p dx < \varepsilon .$$

Es sei nun $M(u) \geqslant 0$ eine beliebige, für alle reellen u definierte und stetige Funktion mit $M(0) = 0$. Wir nennen eine meßbare Funktion $f(x)$ *„integrierbar mit $M(u)$“*, wenn $\int_0^1 M[f(x)]\, dx$ existiert. Wir wollen ferner sagen, daß eine Funktion $h(x)$ die mit $M(u)$ integrierbare Funktion $f(x)$ *„mit $M(u)$ im Mittel bis auf ε approximiert“*, wenn die Ungleichung besteht

$$\int_0^1 M[f(x) - h(x)]\, dx < \varepsilon .$$

Über die so verallgemeinerte Approximation im Mittel durch streckenweise konstante Funktionen hat Herr J. C. Burkill[1]) einen Satz ausgesprochen, welcher ohne ergänzende Voraussetzungen nicht richtig ist, wie aus Satz 2 der vorliegenden Mitteilung ersehen werden kann. Satz 1 enthält eine Richtigstellung der Burkillschen Behauptung.

[1]) J. C. Burkill, The strong and weak convergence of functions of general type, Proc. Lond. Math. Soc. II 28 (1928) p. 493 u. f., Theorem I.