

Wir können also E auf die Gerade eineindeutig (aber nicht stetig) abbilden, so daß der Menge H die Strecke $(0, 1)$ entspricht und der Rest der Geraden dem Komplemente $E - H$. Wir übertragen jetzt die Linearität in der Geraden auf den Raum E der Zahlenpaare. Der Raum E ist jetzt also metrisch, vollständig und linear, erfüllt aber offensichtlich nicht die Axiome 1°, 2°, 3°. Wir zeigen, daß in ihm Satz I nicht besteht. Denn die Menge H ist nach dieser Definition der Linearität eine konvexe Menge. Da H die euklidische Metrik besitzt, so ist H kompakt und abgeschlossen. Durch die Drehung um den Nullpunkt wird aber H auf sich selbst ohne Fixpunkt stetig abgebildet²⁶⁾.

²⁶⁾ Anm. bei der Korrektur am 26. 7. 1930. Auch andere (für den Fall der stetigen Funktionen in der Birkhoff-Kelloggschen Arbeit enthaltene) Sätze, können nach den hier entwickelten Methoden für allgemeine Räume vom Typus „ B “ bewiesen werden, z. B. der folgende Satz: Wir bezeichnen mit I den Rand der Einheitskugel in einem unendlichdimensionalen „ B “-Raume, d. h. die Gesamtheit derjenigen Punkte x , für welche $\|x\| = 1$ gilt. Es sei $y = f(x)$ eine nur in I erklärte Funktionaloperation, welche I stetig auf die kompakte Menge abbildet. Die Bildmenge $f(I)$ habe ferner vom Nullpunkte eine positive Entfernung. Dann gibt es eine invariante Richtung, d. h. es gilt für ein gewisses Element x_0 und entsprechende reelle Zahl λ_0

$$f(x_0) = y_0 = \lambda_0 \cdot x_0.$$

Der Beweis wird dem Leser überlassen.

(Reçu par la Rédaction le 19. 4. 1930; le texte entre les astérisques * * a été fixé le 4. 7. 1930).

Un théorème sur les séries orthogonales

par

A. ZYGMUND (Varsovie).

Soit $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ un système de fonctions orthogonales et normales dans un intervalle (a, b) . Désignons par s_n et σ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) respectivement les sommes partielles et les moyennes arithmétiques des sommes partielles d'une série

$$(\varphi) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x),$$

a_k étant des constantes telles que $\sum a_k^2 < \infty$. Nous allons prouver le théorème suivant:

Si une série (S) est sommable $(C, 1)$ dans un ensemble $E \subset (a, b)$ vers une somme $s(x)$, alors on a, presque partout dans E ,

$$\frac{(s-s_0)^2 + (s-s_1)^2 + \dots + (s-s_n)^2}{n+1} \rightarrow 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{|s-s_0| + |s-s_1| + \dots + |s-s_n|}{n+1} \rightarrow 0.$$

Ce théorème n'est pas nouveau¹⁾, mais la démonstration, que nous donnons ici, paraît être la plus simple. Comme $\sigma_n(x) \rightarrow s(x)$ ($x \in E$), il suffit de prouver que l'on a

$$(A) \quad \frac{(\sigma_0 - s_0)^2 + (\sigma_1 - s_1)^2 + \dots + (\sigma_n - s_n)^2}{n+1} \rightarrow 0$$

presque partout dans (a, b) . Pour démontrer cette dernière relation,

¹⁾ Cf. A. Zygmund, Fund. Math. 10 (1926); S. Borgen, Math. Ann. 98 (1926).

il suffit de prouver la convergence presque partout de la série

$$(T) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s_n - \sigma_n)^2}{n+1},$$

car, de la convergence d'une série $\sum c_n$, il résulte, comme on le sait que $(c_1 + 2c_2 + \dots + nc_n)/n + 1 \rightarrow 0$, cette dernière expression étant égale à la différence entre la somme partielle et la moyenne arithmétique des sommes partielles de $\sum c_n$.

Intégrons la série (T) terme à terme dans (a, b) . Nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^b (s_n - \sigma_n)^2 dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \sum_{k=0}^n k^2 a_k^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k^2 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty. \end{aligned}$$

Si la série T à termes non négatifs était divergente dans un ensemble de mesure positive, la série intégrée serait divergente, ce qui n'est pas le cas. Le théorème est donc démontré.

Pour les applications de la relation (A) aux questions de sommabilité des séries (S), nous renvoyons le lecteur au premier des travaux cités.

(Reçu par la Rédaction le 18. 7. 1930).

Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen

von

J. SCHAUDER (Lwów).

In der vorliegenden Arbeit¹⁾ werden alle drei Fredholm'schen für die Integralgleichungen geltenden „determinantenfreien“ Sätze²⁾ in präziser Fassung auf allgemeine vollstetige Funktionaloperationen übertragen, wobei der zugrundgelegte Raum linear, normiert und vollständig ist. Solche Räume werden wir kurz als Räume „vom Typus B “ bezeichnen³⁾. Derselbe Gegenstand wurde in einer früheren, grundlegenden Arbeit von Herrn F. Riesz⁴⁾ behandelt und ein Teil der in Betracht kommenden Fredholm'schen Sätze bereits bewiesen. Für den Fall eines *allgemeinen* Raumes vom Typus B konnten mittels Riesz'scher Methoden diejenigen Sätze nicht erledigt werden, bei welchen der Begriff der „transponierten Gleichung“ eine Rolle spielte. In dieser Note bringen wir die noch nötige Ergänzung. Dabei tritt die restlose Dualität zwischen einer Funktionaloperation und ihrer konjugierten Funktionaloperation klar zutage.

Im Anhang werden diese Sätze auf Integralgleichungen der Potentialtheorie im Raume angewendet.

Wir betrachten einen Raum R vom Typus B . Sei $X(x)$ irgendein lineares und stetiges Funktional, welches im Raume R

¹⁾ Der Hauptinhalt dieser Arbeit wurde in der Sitzung vom 8. 6. 1929 der Poln. math. Gesellschaft (Abteilung Lwów) vorgetragen.

²⁾ Was den Wortlaut dieser Sätze anbetrifft vgl. z. B.: E. Hellinger u. O. Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Enzykl. der math. Wiss. II C 13 (1927) p. 1335—1648, insb. p. 1376—77.

³⁾ S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math. 3 (1922) p. 133—181, insb. p. 135—136.

⁴⁾ F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Mathematica 41 (1918) p. 71—98.