Das zweite Glied ist ebenfalls gleich $o(1)$, und dasselbe betrifft das erste Glied auf Grund der Relationen

$$\sum s \Delta^2 b_s < +\infty$$

$$\sigma_{m,1} + \sigma_{m,2} + \ldots + \sigma_{m,p} = O(p\sqrt{\lg m}) .$$

Ganz analog erhalten wir

$$s_{m,n} - s_{m,2^k} \longrightarrow 0 .$$

(Reçu par la Rédaction le 14. 4. 1930).

Sur la théorie riemannienne de certains systèmes orthogonaux. I.

par

A. ZYGMUND (Varsovie).

Chapitre I.

§ 1.

1. Soit $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ une suite de fonctions réelles, définies dans un intervalle (a, b). Si l'on a

$$\int_a^b \varphi_m \varphi_n \, dx \begin{matrix} = 0 & (m \neq n) \\ = 1 & (m = n) \end{matrix} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

on dit que les fonctions $\varphi_i (i = 0, 1, \ldots)$ forment un système orthogonal et normal dans l'intervalle (a, b). On connaît beaucoup de systèmes orthogonaux: système trigonométrique, fonctions de Sturm-Liouville, polynômes de Legendre, fonctions de Bessel etc.

Dans la théorie des séries de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n \tag{1}$$

on peut distinguer deux points de vue. Le premier d'eux — on peut l'appeler celui de Fourier — s'occupe des séries (1), où les coefficients a_n sont donnés par la formule

$$a_n = \int_a^b f \varphi_n \, dx ,$$

f désignant une fonction définie dans (a, b). Dans ce cas on appelle les a_n – coefficients de Fourier de f, et la série (1) – série de

Fourier de f. Le problème central de la théorie de Fourier est celui de représentation d'une fonction par sa série de Fourier; le mot „représentation" peut être employé dans divers sens: celui de convergence (partout ou presque partout), convergence en mesure, sommabilité etc.

Le second point de vue, qui peut être appellé (en empruntant ce mot à la théorie des séries trigonométriques) celui de Riemann, s'occupe des séries *générales* de la forme (1). Le problème central de la théorie de Riemann est le problème d'unicité de la représentation d'une fonction par les séries de la forme (1). La question la plus naturelle ici est la suivante: si la série (1) „représente" zéro dans (a, b), peut-on en déduire que $a_0 = a_1 = \ldots = 0$? Une autre question étudiée dans la théorie riemannienne est celle de *localisation* pour les séries (1); il s'agit ici des propriétés des séries (1) qui représentent une fonction $g(x)$ dans un sous-intervalle (α, β) de (a, b). C'était Riemann qui s'occupait le premier des problèmes de localisation (dans le cas de séries trigonométriques).

2. Le problème de représentation d'une fonction f par sa série (trigonométrique) de Fourier a été résolu pour une vaste classe de fonctions par Dirichlet. Les résultats de Dirichlet étaient complétés et généralisés par divers mathématiciens, dont il suffit de citer les noms de Lipschitz, Dini, De la Vallée Poussin, Fejér, Lebesgue, M. Riesz, Hardy etc. Beaucoup de résultats obtenus pour les séries trigonométriques étaient ensuite étendus aux autres systèmes orthogonaux, p. e. ceux de Sturm-Liouville, Legendre, Bessel, Jacobi etc. Les démonstrations étaient modelées sur celles des propositions correspondantes pour les séries trigonométriques.

C'est M. Haar qui le premier a posé justement la question — dans le cas de fonctions de Sturm-Liouville[1]). Il a démontré que les développements d'une fonction f, intégrable L et définie dans $(0, \pi)$, en série de cosinus et en série de fonctions de Sturm-Liouville se comportent d'une façon complètement analogue; plus précisement: la différence de ces deux développements converge uniformément vers zéro dans $(0, \pi)$. Ce théorème réduit l'étude du problème de Fourier pour les séries de

[1]) Haar [1_1].

Sturm-Liouville au celui pour les séries trigonométriques. Bien que ce dernier problème paraît être assez loin de sa solution complète (en particulier, en ce qui concerne les questions de convergence), il est évident que l'étude du système trigonométrique est plus simple que celle d'autres systèmes orthogonaux. On peut donc dire, dans un certain sens, que M. Haar a résolu le problème de Fourier pour les séries de Sturm-Liouville en le réduisant au problème plus simple. Les théorèmes de type de M. Haar ont été ensuite démontrés pour quelques autres systèmes orthogonaux: celui de Legendre (Haar, W. H. Young), Bessel (W. H. Young), Laguerre (Szegö).

3. Actuellement la théorie riemannienne de certains systèmes orthogonaux se présente sous l'aspect analogue à celui de la théorie de Fourier avant les travaux de M. Haar. Pour divers systèmes orthogonaux (fonctions de Sturm-Liouville[2]), polynômes de Legendre[3]), polynômes ultrasphériques[4]), fonctions de Bessel[5])) on a démontré des propositions analogues aux théorèmes bien connus de Cantor, Du Bois Reymond, De la Vallée Poussin etc. Dans les démonstrations on utilisait les raisonnements analogues à ceux dont on s'était servi dans la théorie d'unicité des séries trigonométriques. En particulier, on appliquait la méthode (convénablement modifiée) de la seconde dérivée généralisée.

Cette voie ne me paraît pas être la plus convenable, car le procédé de la double intégration formelle, bien qu'assez simple dans le cas des séries trigonométriques, dévient plus compliqué si l'on l'applique aux autres systèmes orthogonaux. Les difficultés augmentent si, au lieu des séries convergentes, on considère les séries sommables, p. e. par le procédé de Cesàro ou de Poisson. Il est donc naturel de chercher des propositions qui permettraient de réduire la théorie riemannienne de certains systèmes orthogonaux à celle des séries trigonométriques.

4. Pour fixer les idées, envisageons le problème des ensembles d'unicité. Rappelons quelques définitions. On appelle un ensemble E, situé dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, *ensemble d'unicité de*

[2]) Haar [1_2].
[3]) Plancherel [1], [2]; Kogbetliantz [1].
[4]) Kogbetliantz [1].
[5]) Plancherel [2].

type de Cantor, ou bref: ensemble U, si toute série trigonométrique (bref: s. t.)

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{2}$$

convergente vers zéro en dehors de E, possède tous ses coefficients égaux à zéro. Pareillement, un ensemble E sera appelé *d'unicité de type de Du Bois Reymond* (bref: ensemble U'), si toute s. t. convergente dans CE vers une fonction $f(x)$ finie et intégrable, est la série de Fourier de f (bref: $\mathfrak{S}[f]$). On sait que tous les ensembles dénombrables et certains non dénombrables (par exemple de type H) [6]) sont à la fois U et U'. La question, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble donné soit un U (ou U'), n'est pas résolue jusqu'à présent et paraît être très difficile. Il est probable que les classes d'ensembles U et U' sont identiques, mais ce théorème hypothétique n'est démontré que pour les ensembles fermés [7]). En se bornant aux ensembles mesurables L, on peut affirmer que les ensembles d'unicité sont de mesure nulle [8]). La proposition réciproque n'est pas vraie [9]).

Les définitions analogues s'étendent facilement aux autres systèmes orthogonaux et la question s'impose: quelles sont les relations entres les ensembles d'unicité pour un systeme orthogonal donné et le système trigonométrique? Si pour un système orthogonal on pouvait démontrer que les ensembles d'unicité sont les mêmes que dans le cas de s. t., on pourrait dire que le problème d'unicité est résolu pour ce système.

5. Le problème d'unicité peut être généralisé dans divers directions.

a) On sait, par exemple, que, si une s. t. (2) converge, en dehors d'un ensemble E dénombrable, vers une fonction $f(x)$ finie et vérifiant l'inégalité $f(x)\geqslant\varphi(x)$, où $\varphi(x)$ est intégrable, alors

[6]) Rajchman [2], [3]; N. Bary [1].

[7]) Zygmund [1] p. 94.

[8]) Si E est un ensemble mesurable L et de mesure non nulle, il contient un sousensemble parfait E_1 de mesure positive. Soit $\varphi(x)$ la fonction de période 2π, égale a 1 pour x appartenant à E_1 et égale à zéro ailleurs (nous supposons que E est situé dans $(0,2\pi)$). D'après le théorème classique de la théorie des séries de Fourier, la série de Fourier de $\varphi(x)$ converge vers zéro en déhors de E, mais le premier coefficient de cette série est $\neq 0$.

[9]) Menchoff [1].

$f(x)$ est intégrable elle-même et la série (2) est $\mathfrak{S}[f]$ [10]). On peut donc poser la définition suivante: un ensemble E situé dans $(-\pi,\pi)$ est un *ensemble d'unicité de type de Steinhaus-Banach* (ou bref: ensemble U''), si toute s. t. (2) convergente en dehors de E vers une fonction finie $f(x)\geqslant\varphi(x)$ (φ intégrable) est intégrable elle-même et la série considérée est $\mathfrak{S}[f]$. On peut démontrer que les ensembles H de M. Rajchman sont U'', et il paraît être probable que les ensembles de type U'' sont les mêmes que U, bien que cette équivalence n'est pas démontrée même dans le cas d'ensembles fermés.

b) Jusqu'à présent nous n'avons considérés que les séries *convergentes*. Par conséquent, nous pourrions désigner les ensembles exceptionnels que nous venons d'introduire, respectivement par U_c, U'_c, U''_c. Les problèmes d'unicité peuvent être posés pour un procédé M de sommation absolument quelconque. Les définitions des ensembles U_M, U'_M, U''_M sont, à peu près, les mêmes que celles des U, U', U''. Il faut seulement y remplacer le mot „convergente" par „sommable M" et ajouter une condition supplémentaire (qui est superflue dans le cas de convergence), notamment que les coefficients des s. t. considérées tendent vers zéro. Nous supposons toujours dans la suite que les procédés M vérifient les deux conditions suivantes:

α) Si une série $c_0+c_1+\ldots$ converge vers la somme s, elle est aussi sommable M vers la même somme.

β) Si les séries $c_0+c_1+\ldots$ et $d_0+d_1+\ldots$ sont sommables M respectivement vers les sommes C et D, la série $(\lambda c_0+\mu d_0)+(\lambda c_1+\mu d_1)+\ldots$ est sommable M vers la somme $\lambda C+\mu D$ (λ,μ – des constantes).

Dans certain cas exceptionnels nous supposerons que les procédés de sommation (nous les désignerons dans ce cas par M^*) vérifient aussi la condition suivante:

γ) Si une série $c_0+c_1+\ldots$ diverge vers $\pm\infty$, elle n'est pas sommable M^* vers une somme finie. L'un des procédés M (et M^*) les plus importants est celui de Poisson (ou bref: P), qui définit la somme de la série $c_0+c_1+\ldots$ comme

$$\lim_{r\to 1-0}\sum_0^{\infty}c_n r^n.$$

[10]) C'est le théorème de MM. Banach et Steinhaus. Voir: Steinhaus [2], A. Zygmund [2].

Le cas le plus spécial mais, peut- être, le plus intéressant est celui d'ensembles U_M vides. Si l'ensemble vide est un U_M, ceci signifie que toute s. t. (2) à coefficients tendant vers zéro, sommable *partout* vers zéro, possède tous ses coefficients nuls.

c) On sait qu'il existe des théorèmes sur l'unicité des s. t., où l'on considère, au lieu des sommes (ordinaires ou généralisées), les limites d'indétermination. On pourrait donc introduire une éspèce nouvelle d'ensembles d'unicité. On pourrait, par exemple, considérer des ensembles E tels que toute s. t. (2), pour laquelle les limites d'indétermination $\underline{f}$ et $\overline{f}$ des sommes partielles (en dehors de E) sont finies et intégrables, est la série de Fourier. De même on pourrait remplacer la condition que $\underline{f}$ et $\overline{f}$ soient intégrables, par $\underline{f} \geqslant \varphi$, où φ est intégrable, etc. Nous n'y insisterons pas dans la suite, les démonstrations étant les mêmes que dans le cas de sommes exactes. Nous nous bornerons seulement à énoncer quelques propositions spéciales.

§ 2.

6. Ce travail, comme nous l'avons déja dit, a pour but de réduire les problèmes de la théorie riemannienne de certains systèmes orthogonaux aux problèmes analogues pour les s. t. [11]). Dans le cas qui correspond à celui de coefficients tendant vers zéro pour les s. t., les propositions démontrées ici généralisent tous les résultats obtenus jusqu'à présent dans ce domaine. La méthode consiste à remplacer les séries considérées par des s. t. équiconvergentes (la definition de l'équiconvergence est donnée plus loin). Dans ce but nous nous servons de la multiplication formelle des s. t. (voir ci-dessous). La méthode peut être appliquée à une vaste classe des séries de fonctions, mais nous nous bornons dans ce travail aux quatre systèmes orthogonaux: ceux de 1° Sturm-Liouville, 2° Legendre, 3° Jacobi, 4° Bessel [12]). Le cas de fonctions de Sturm-Liouville est le plus simple. Il est étudié en détail, ce qui nous permet d'être un peu

[11]) Les résultats essentiels de ce travail ont été l'objet d'une conférence faite au Congrès International des Mathématiciens à Bologna en 1928.

[12]) Je dois remarquer cependant qu'il existe des systèmes orthogonaux, trés importants dans les applications, (p. e. ceux de Laguerre ou Hermite) pour lesquels cette méthode ne peut pas être appliquée Ceci est dû au fait que la structure asymptotique de ces polynômes est complètement différente de celle des fonctions orthogonales étudiées dans ce travail.

plus concis dans les autres cas. La différence entre le système de Sturm-Liouville et les autres systèmes étudiés dans ce travail, consiste principalement en ce que les fonctions appartenant à ces derniers cessent d'avoir le caractère trigonométrique près des extrémités de l'intervalle dans lequel elles jouissent de la propriété d'orthogonalité. Ceci n'a d'ailleurs aucune influence sur l'étude du problème d'unicité.

Les systèmes 1°, 2°, 4° sont trés importants et leur étude du point de vue de la théorie riemannienne est assez naturelle. Ils étaient d'ailleurs déja étudiés de ce point de vue par divers auteurs [12a]). Il est donc désirable d'appliquer la méthode, dont nous nous servons, à un cas nouvel, dont l'étude avec les méthodes actuelles serait très compliquée. Dans ce but nous avons choisi le système de polynômes de Jacobi qui généralisent non seulement les polynômes de Legendre, mais aussi les polynômes ultrasphériques, dont les questions d'unicité ont été déjà l'objet de recherches [13]).

7. Le travail est divisé en trois parties. La première d'eux est consacrée aux systèmes de Sturm-Liouville et de Legendre. La deuxième à ceux de Bessel et de Jacobi. Nous y ajoutons aussi un chapître sur le problème de Fourier. Bien que certains résultats de ce chapitre sont connus, il nous paraît que l'application de la multiplication formelle simplifie les raisonnements. De plus, quelques résultats de ce chapitre peuvent être utiles aussi dans la théorie riemannienne. La troisième partie contiendra, en particulier, l'étude des systèmes en question, dans le voisinage de leurs points singuliers.

§ 3.

8. Nous donnons ici les démonstrations de quelques propositions connues, dont nous nous servirons constamment dans la suite. Nous commençons par démontrer les théorèmes de M. Rajchman sur la multiplication formelle des s. t. [14]). Soient données deux s. t. (à coefficients réels)

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{2}$$

[12a]) Cf. [2]) [3]) [4]) [5]).

[13]) Kogbetliantz [1].

[14]) Rajchman [1], [3]. Voir aussi Zygmund [1].

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+\beta_n\sin nx)\,. \tag{3}$$

Ces séries peuvent être écrites sous la forme[15])

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx};\quad c_n=a_n-ib_n,\quad c_{-n}=\bar{c}_n \qquad (n\geqslant 0), \tag{2'}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\gamma_n e^{inx};\quad \gamma_n=\alpha_n-i\beta_n,\quad \gamma_{-n}=\bar{\gamma}_n \qquad (n\geqslant 0). \tag{3'}$$

On appelle le *produit formel* des séries (2') et (3') (ou (2) et (3)), la série

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{inx}, \tag{4'}$$

où les C_n sont donnés par la formule

$$C_n=\frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}c_p\gamma_{n-p}, \tag{5}$$

en supposant, bien entendu, que la série du second membre converge. On a $C_{-n}=\bar{C}_n$. En posant $C_n=A_n-iB_n$, nous pouvons écrire la série (4') sous la forme

$$\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx), \tag{4}$$

où

$$A_n=\frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}(a_p\alpha_{n-p}-b_p\beta_{n-p}),\quad B_n=\frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}(a_p\beta_{n-p}+b_p\alpha_{n-p}). \tag{6}$$

Il est évident que, si les coefficients d'une des séries (2'), (3') tendent assez rapidement vers zéro, les formules (5) ont un sens et le produit formel (4') peut être défini. Toute la théorie de la multiplication formelle des s. t. à coefficients tendant vers zéro s'appuye sur le lemme suivant:

(R_1). Si les deux suites de nombres complexes x_n et ξ_n $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$ vérifient les conditions

$$\lim_{n\to\pm\infty}x_n=0,\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\xi_n|<\infty, \tag{7}$$

[15]) La somme (ordinaire, resp. généralisée) d'une série $\sum_{-\infty}^{+\infty}$ doit être définie comme la limite (ordinaire ou généralisée) des sommes partielles $\sum_{-n}^{+n}$.

alors, pour $n\to\pm\infty$, on a

$$X_n=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}x_p\xi_{n-p}\to 0\,. \tag{8}$$

Si les x et ξ dépendent d'un paramètre et si les relations (7) sont vérifiées uniformément, il en est de même de (8).

La démonstration est simple et peut être laissée au lecteur. Énonçons maintenant les deux théorèmes de M. Rajchman sur la multiplication formelle (dont le second contient le premier comme un cas particulier).

(R_2). Si [1°] les coefficients de la série (2') tendent vers zéro, et ceux de la série (3') sont $O(n^{-3})$ et si [2°], pour les valeurs de x appartenant à un ensemble E, la série (3') converge vers zéro, alors le produit formel (4') des séries (2') et (3') converge uniformément vers zéro dans E.

(R_3). Si $c_n=o(1)$, $\gamma_n=O(n^{-3})$, alors, en désignant respectivement par $s_n(x)$, $S_n(x)$, $\sigma(x)$ les sommes partielles des séries (2'), (4') et la somme de la série (3'), on a, pour $n\to+\infty$ et uniformément dans $(0,2\pi)$:

$$S_n(x)-\sigma(x)s_n(x)\to 0. \tag{9}$$

Démonstration de (R_2)[16]). Posons

$$R_n(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\gamma_k e^{ikx} \qquad (-\infty<n<\infty).$$

Alors

$$S_N(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{+N}C_n e^{inx}=\frac{1}{4}\sum_{n=-N}^{+N}e^{inx}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}c_p\gamma_{n-p}=\frac{1}{4}\Bigg[\sum_{p=-\infty}^{+\infty}c_p e^{ipx}$$
$$\sum_{n=-N}^{+N}\gamma_{n-p}e^{i(n-p)x}\Bigg]=\frac{1}{4}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}c_p e^{ipx}(R_{-N-p}(x)-R_{N-p+1}(x))\,. \tag{10}$$

Pour $x\subset E$[17]) on a $R_n=O(n^{-2})$ $(n\to\pm\infty)$. Pour démontrer (R_2), il suffit de présenter le dernier terme dans (10) comme la différence des deux séries, et ensuite d'appliquer (R_1). Bien que les deux séries en question sont respectivement de la forme

[16]) Rajchman [1]; cf. aussi Zygmund [1]. Il est évident que les propositions analogues à R_2 et R_3 ont lieu pour les séries ordinares $\sum_0^{\infty}$, si l'on applique la régle de multiplication de Cauchy (ou, même, les régles plus générales).

[17]) $x\subset E$ signifie: x appartient à E.

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_p \xi_{-N-p}\,, \qquad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_p \xi_{N+p-1}\,,$$

elles peuvent être réduites à la forme (8), en modifiant légèrement la notation.

Démonstration de (R_3). Considérons le produit formel de la série (2′) par

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n^* e^{inx}, \tag{11}$$

où $\gamma_n^* = \gamma_n$ pour $n \neq 0$ et $\gamma_0^* = \gamma_0 - 2\sigma(x)$. Désignons les sommes partielles de (11) par S_n^*. D'après (R_2), on a $S_n^* \to 0$, uniformément dans $(0, 2\pi)$. (Les coefficients γ_n^* de la série (11) dépendent de x, mais, comme on voit de la démonstration de (R_2), ceci est sans importance). Il suffit de remarquer que $S_n^* = S_n - \sigma s_n$ [18]).

9. Remarques. 1°. Considérons deux séries numériques S_1 et S_2, absolument quelconques (et non nécessairement convergentes). Si la différence de ces séries converge vers zéro, nous appellerons ces séries *équiconvergentes* [19]). Si $S_1 - S_2$ converge, mais non nécessairement vers zéro, nous dirons que S_1 et S_2 sont équiconvergentes au sens large. La définition de l'équiconvergence uniforme est immédiate. La proposition (R_3) peut être énoncée de la façon suivante: si $c_n \to 0$, et si γ_n tend vers zéro assez rapidement, le produit formel des s. t. (2) et (3) est uniformément équiconvergent avec la série (2) multipliée par le facteur $\sigma(x)$ ($\sigma(x) =$ somme de la série (3)).

2°. Désignons par $\overline{s_n}$ et $\overline{S_n}$ respectivement les n-ièmes sommes partielles des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx - b_n \cos nx), \tag{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sin nx - B_n \cos nx), \tag{13}$$

conjuguées à (2) et (4); alors, sous les mêmes conditions que dans (R_3), on a: la suite $\overline{S_n}(x) - \sigma(x)\overline{s_n}(x)$ converge uniformément dans $(0, 2\pi)$ (non nécessairement vers zéro). En d'autres mots: la série (13) est uniformément équiconvergente au sens large avec la série (12) multipliée par $\sigma(x)$ [19a]). En effet, considérons d'abord

[18]) Il est évident que, dans (R_2) et (R_3), on peut supposer $\gamma_n = O(n^{-2-\delta})$ $(\delta > 0)$. Si $a_n = o(n^{-\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$, on peut même supposer que $\delta = 0$. Cette remarque nous sera utile.

[19]) Szegö [1].

[19a]) Zygmund [3].

les points x (s'ils existent) pour lesquels $\sigma(x) = 0$. La série (13) peut être écrite sous la forme

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C'_n e^{inx} \quad (C'_0 = 0;\ C'_n = -iC_n,\ C'_{-n} = \overline{C'_n} \quad (n > 0)).$$

En désignant par $\Re z$ la partie réelle de z, on a

$$\overline{S_N} = \Re \sum_{n=1}^{N} C'_n e^{inx} = -\Re i \sum_{n=1}^{N} C_n e^{inx}.$$

En substituant ici les valeurs des C_n de (5) et en répétant le même raisonnement que dans (R_2), nous obtenons que, dans les points considérés, on a uniformément

$$\overline{S_N} \to -\Re \frac{i}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p e^{ipx} R_{1-p}(x)\,.$$

Le cas général s'obtient, comme dans (R_3), en considérant la série conjuguée au produit de (2′) par (11).

3°. Sous les hypothèses de (R_3), on voit que, si (2) est sommable M pour $x = x_0$, il en est de même de (4). La proposition inverse a lieu, pourvu que $\sigma(x_0) \neq 0$.

4°. Dans le cas où la série (2) est celle de Fourier-Lebesgue, on peut affaiblir les conditions imposées à la série (3) dans (R_3). Désignons les sommes partielles de $\mathfrak{S}[f]$ par $s_n[f(x)]$. Si $\alpha(x)$ est une fonction continue (ou même bornée), dont les quatre nombres de Dini pour $x = x_0$ sont finis, on a pour $x = x_0$

$$s_n[\alpha(x) f(x)] - \alpha(x)\, s_n[f(x)] \to 0\ [20]). \tag{S}$$

Ceci est immédiat, si l'on remarque que le membre gauche est égal à

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{\alpha(t)-\alpha(x)}{\sin\dfrac{t-x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\,dt$$

et que la fonction $f(t)(\alpha(t) - \alpha(x))/\sin\frac{1}{2}(t-x)$ est intégrable L, donc ses coefficients de Fourier tendent vers zéro. La proposition analogue pour les séries conjuguées ne présente aucune difficulté.

5°. Les propositions (R_2) et (R_3) peuvent être généralisées

[20]) Cette proposition a été démontrée par M. Steinhaus ([1]) et ensuite par M. Young (cf. W. H. Young [2] p. 144).

pour les séries (2) à coefficients $o(n^k)$ $(k > -1)$ [21]). On peut démontrer que, si les coefficients de la série (3) tendent assez rapidement vers zéro et si, dans un ensemble E de points, la fonction $\sigma(x)$ vérifie les conditions

$$\sigma'(x) = \sigma''(x) = \ldots = \sigma^{(r)}(x) = 0, \tag{14}$$

où r est un nombre naturel $\geqslant k$, alors la relation (9) a lieu *au sens de* (C, k). On voit donc que, pour $-1 < k \leqslant 0$, la condition (14) est superflue. Il n'en est pas ainsi pour $k > 0$. Dans ce cas, la méthode de la multiplication formelle est moins avantageuse et nous nous n'en servirons pas dans ce travail.

§ 4.

10. Nous démontrerons ici quelques lemmes sur les s. t., qui nous seront très utiles dans la suite.

Lemme α. Si une s. t. (2), à coefficients tendant vers zéro, est sommable M vers zéro en tous les points d'un intervalle (a, b) sauf, peut-être, ceux d'un ensemble E de type U_M, alors la série converge vers zéro à l'intérieur de (a, b), et même uniformément dans $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$, quel que soit $\varepsilon > 0$ [22]).

Lemme α_1. Si une s. t. (2) à coefficients tendant vers zéro est sommable M en tous les points d'un intervalle (a, b), en dehors d'un ensemble E de type U'_M, vers une fonction $f(x)$ intégrable dans (a, b), cette série est uniformément équiconvergente dans (a_1, b_1) $(a < a_1 < b_1 < b)$ avec $\mathfrak{S}[\lambda f]$, où $\lambda(x)$ est une fonction de période 2π, égale à 1 dans (a_1, b_1), à 0 en dehors de (a, b) (mod 2π) et, de plus, continue avec ses trois premières dérivées [23]).

Les démonstration des lemmes α et α_1 étant analogues, nous nous bornons à celle de α_1. Supposons que (3) est $\mathfrak{S}[\lambda]$. De nos hypothèses il résulte que les coefficients de (3) sont $O(n^{-3})$. Considérons le produit formel (4) des séries (2) et (3). Nous

[21]) Zygmund [1].

[22]) Cette proposition est implicitement contenue dans Rajchman [1].

[23]) Nous posons, par définition, $\lambda(t)\, f(t) = 0$ en dehors de (a, b) (mod 2π). Remarquons encore que, dans presque tous les théorèmes demontrés dans ce travail, le mot intégrale (intégrable, etc) est employé dans le sens de M. Lebesgue, ou, plus généralement, celui de M. Denjoy (sens étroit ou large). Dans les énoncés des propositions qui ne sont vraies (ou démontrées) que pour l'intégrale de M. Lebesgue (ou de M. Denjoy, au sens étroit) nous mentionnons expressément la notion de l'intégrale dont nous faisons usage.

Bien que la définition des U'_M, U''_M dépend de la notion de l'intégrale, il est probable que cette dépendance n'est qu'apparente.

avons la relation (9), où $\sigma(x)$ doit être remplacé par $\lambda(x)$, s_n et S_n désignant les sommes partielles de (2) et (4). Il en résulte que (4) converge, donc est sommable M vers zéro, en dehors de (a, b) (mod 2π). Dans les points de (a, b) non appartenant à E, la série (4) est sommable vers une fonction intégrable $f\lambda$. En résumé: la série (4) est sommable M dans tous les points de l'intervalle $(0, 2\pi)$, en dehors d'un ensemble de type U'_M, vers une fonction intégrable $f\lambda$. D'après la définition des U'_M, la série (4) est $\mathfrak{S}[\lambda f]$, et maintenant il suffit de remarquer que, si x appartient à (a_1, b_1), on a dans (9): $\lambda(x)\ (= \sigma(x)) = 1$.

Du lemme α_1 on peut déduire la proposition suivante:

Lemme β. Sous les hypothèses du lemme α_1, la série (2) peut être intégrée terme à terme à l'intérieur de (a, b) et l'on a

$$\frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n} = \int_a^x f(t)\, dt + C \quad (a < x < b), \tag{15}$$

la série du premier membre convergeant uniformément dans tout intervalle $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$.

Pour la démonstration, il suffit de remarquer que a) (2) est équiconvergent dans $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$ avec une série de Fourier et b) les séries de Fourier peuvent être intégrées terme à terme. Pour l'intégrale de Lebesgue, b) est bien connu; pour l'intégrale de M. Denjoy, ceci résulte du théorème de M. Fejér sur la sommabilité $(C, 1)$ de $\mathfrak{S}[g]$, si g est continue, et du théorème de M. Tauber sur les séries à coefficients $o(n^{-1})$ [23a]).

Remarquons encore que le lemme β subsiste aussi pour $\varepsilon = 0$, mais ceci n'est pas indispensable pour nos buts [24]).

[23a]) Ajoutons encore une remarque. Si $a_n,\ b_n \to 0$ et si

$$(S) \quad \frac{a_0}{2}(x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n} \right]_{x_0}^{x}$$

converge uniformément dans un intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, alors la série

$$\frac{a_0 x_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n \sin n x_0 - b_n \cos n x_0}{n}$$

converge (ce qu'on obtient en intégrant (S) encore une fois).

[24]) Ceci résulte du théorème suivant démontré (sous une forme un peu différente) par M. Fatou (voir Fatou [1] p. 379). Si une s. t. à coefficients $o(n^{-1})$ converge, pour $a < x < b$, vers une fonction continue $f(x)$, telle que $f(a+o)$ et $f(b-o)$ existent (et sont finis), la série en question converge uniformément dans l'intervalle fermé $a \leqslant x \leqslant b$.

Sans m'en apercevoir, j'ai publié recémment un théorème (voir Zygmund [3]) qui n'est qu'un cas particulier de la proposition de M. Fatou.

Si l'on emploie la notion de l'intégrale au sens de M. Lebesgue, on peut énoncer le lemme α_1 sous la forme suivante:

Lemme γ. Sous les hypothèses du lemme α_1, la série (2) est uniformément équiconvergente dans tout intervalle $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ avec $\mathfrak{S}[f^*]$, ou $f^*=f$ dans (a,b) et $f^*=0$ ailleurs (mod 2π).

Ceci résulte du lemme α_1 et du fait que si $a<a_1<a+\varepsilon$, $b-\varepsilon<b_1<b$, les séries $\mathfrak{S}[\lambda f]$ et $\mathfrak{S}[f^*]$ sont uniformément équiconvergentes dans $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$.

Remarque. Si f est intégrable D, les séries $\mathfrak{S}[\lambda f]$ et $\mathfrak{S}[f^*]$ sont uniformément équisommables $(C,1)$ dans $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$. Dans ce cas on doit remplacer dans le lemme γ l'équiconvergence par l'équisommabilité $(C,1)$.

La démonstration analogue à celle du lemme α_1 (en supposant, de plus, que $\lambda\geqslant 0$) nous donne le lemme suivant:

Lemme α_2. Le lemme α_1 subsiste si l'on y remplace l'ensemble U'_M par U''_M et la condition que f est intégrable par $f\geqslant\varphi$, où φ est intégrable. En particulier, f est intégrable dans tout intervalle $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$.

11. La proposition suivante est souvent trés utile:

Lemme δ. Si la série

$$\frac{a_0 x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)\qquad (a_n,\ b_n\to 0), \tag{16}$$

qui s'obtient par l'intégration formelle de la série (2), converge uniformément dans un intervalle (a,b) vers une fonction $\Phi(x)=\int^x f(t)\,dt$, la série (2) est uniformément équiconvergente dans $(a_1,\ b_1)$ avec $\mathfrak{S}[\lambda f]$, où la définition de λ est la même que dans le lemme α_1.

Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème classique de Riemann[25]) (voir ci-dessous (22)), mais la démonstration la plus simple s'obtient par la multiplication formelle. Soit (4) le produit formel de (2) par $\mathfrak{S}[\lambda]$. On a (9), avec $\sigma(x)=\lambda(x)$, d'où

$$\int_a^x S_n(t)\,dt-\int_a^x s_n(t)\,\lambda(t)\,dt\to 0, \tag{17}$$

[25]) Riemann [1]. Voir aussi Neder [1], Zygmund [1].

uniformément dans $(-\infty,\ +\infty)$. Mais, en intégrant par parties, on a pour $a\leqslant x\leqslant b$

$$\int_a^x\lambda(t)\,s_n(t)\,dt=\lambda(x)\int_a^x s_n(t)\,dt-\int_a^x\lambda'(t)\,dt\int_a^t s_n(u)\,du$$

$$\to\lambda(x)\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^x\lambda'(t)\,dt\int_a^t f(u)\,du=\int_a^x\lambda(t)f(t)\,dt.$$

La relation

$$\int_a^x\lambda(t)\,.\,[s_n(t)-f(t)]\,dt\to 0 \tag{18}$$

a lieu pour toutes les valeurs de x, si l'on remarque que $\lambda(t)f(t)=0$ en dehors de (a,b) (mod 2π). (17) et (18) nous donnent

$$\int_a^x[S_n(t)-\lambda(t)f(t)]\,dt\to 0. \tag{19}$$

De même que de la relation

$$\int_a^x[s_n(t)-f(t)]\,dt\to 0$$

nous avons deduit (18), nous pouvons obtenir de (19) que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x[S_n(t)-\lambda(t)f(t)]\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\nu t\,dt=0\quad(\nu=0,1,2,\ldots).$$

En posant ici $x=a+2\pi$, nous avons

$$A_\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\lambda(t)f(t)\cos\nu t\,dt,\ B_\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\lambda(t)f(t)\sin\nu t\,dt\quad(\nu=0,1,\ldots),$$

la série (4) est donc $\mathfrak{S}[\lambda f]$. D'autre part, la série (4) est uniformément équiconvergente avec (2) dans $(a_1,\ b_1)$. Ceci prouve le lemme.

De même, si f est intégrable L, la série (2) est, dans tout intervalle $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, uniformément équiconvergente avec $\mathfrak{S}[f^*]$, où f^* est défini comme dans le lemme γ.

12. Ajoutons encore quelques remarques sur la formule de Riemann[26]). On dit qu'une s. t. (2) est sommable, pour $x=x_0$, par le procédé de Riemann (bref: R) vers la somme s, si

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n x_0+b_n\sin n x_0)\,\frac{\sin^2 nh}{n^2h^2}\right]=s.$$

On sait que l'ensemble vide est un U_R pour les s. t., donc, d'après le lemme α, si une s. t. (2) est sommable R vers zéro dans un intervalle (a, b), elle est uniformément convergente vers zéro dans $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. Le fait que (2) est sommable R vers zéro dans (a, b) est, comme on le sait, équivalent au fait que la fonction

$$F(x)=\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2} \tag{20}$$

est linéaire dans (a, b). Il en résulte que, si deux s. t. T_1 et T_2, à coefficients tendant vers zéro, possèdent les fonctions F_1 et F_2 (analogues à (20)) égales dans un intervalle (a, b) (ou, plus généralement, si F_1-F_2 y est linéaire), les séries T_1 et T_2 sont équiconvergentes dans tout $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$.

C'est le théorème que Riemann a déduit comme corollaire de sa formule célèbre. Nous donnons ici une démonstration qui, en même temps, mettra en relief le sens de cette formule.

Supposons d'abord que $a_0=0$ dans (2) et (20). Soit $\lambda(x)$ une fonction de période 2π, suffisamment regulière, égale à 1 dans (a_1, b_1) $(a<a_1<b_1<b)$ et à 0 en dehors de (a, b) (mod 2π).

Considérons le produit formel de (20) par $\mathfrak{S}[\lambda]$. Comme les coefficients de $\mathfrak{S}[\lambda]$ tendent assez rapidement vers zéro (il suffit de supposer qu'ils sont $O(n^{-3})$), ce produit formel possède, comme on vérifie facilement, des coefficients $o(n^{-2})$. Il peut être donc écrit sous la forme

$$a_0^*-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^*\cos nx+b_n^*\sin nx}{n^2}=a_0^*+F^*(x)\quad(a_n^*,\ b_n^*\to 0). \tag{21}$$

Les fonctions $F(x)$ de (20) et $F^*(x)$ ne diffèrent que par une constante $(=a_0^*)$ dans (a_1, b_1), donc les séries (2) et $\sum_1^{\infty}(a_n^*\cos nx+b_n^*\sin nx)$ sont uniformément équiconvergentes dans tout intervalle $(a_1+\varepsilon, b_1-\varepsilon)$, et, comme les sommes partielles de cette dernière série s'obtiennent par la différentiation formelle de celles de la série (de Fourier) (21), nous avons (pour $a_0=0$)

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F^*(t)\,\frac{d^2}{dt^2}\,\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}\,dt\longrightarrow 0,$$

ou

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)- \tag{22}$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_a^b F(t)\lambda(t)\,\frac{d^2}{dt^2}\,\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}\,dt\longrightarrow 0\qquad(a_1<x<b_1).$$

Nous avons supposé que $a_0=0$, mais, comme (22) est evidémment vrai pour la s. t. (2) dans laquelle $a_1=b_1=a_2=b_2=\ldots=0$, la relation (22) subsiste aussi pour $a_0\neq 0$. On peut prouver que (22) a lieu dans l'intervalle *fermé* $a_1\leqslant x\leqslant b_1$, mais nous n'y insisterons pas.

[26]) Cf. [25]).

Chapitre II.

Les systèmes de Sturm-Liouville.

§ 1.

1. Soit donnée l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+(q+\lambda)u=0, \tag{1}$$

où λ est un paramètre $(-\infty<\lambda<\infty)$ et p, q des fonctions continues dans l'intervalle $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, dont la première est constamment différente de zéro dans cet intervalle. Etant données les conditions aux limites

$$\begin{aligned}&\frac{du}{dx}-hu=0\ \text{ pour }\ x=\alpha,\\ &\frac{du}{dx}+Hu=0\ \text{ pour }\ x=\beta\qquad(h, H-\text{const.}),\end{aligned} \tag{2}$$

il existe, on le sait, une suite $\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n<\ldots$ $(\lambda_n\to\infty)$ de valeurs du paramètre λ et une suite correspondante de fonctions (dites de Sturm-Liouville) $u_0(x)$, $u_1(x)$, ..., $u_n(x)$, ... $(u_n\not\equiv 0$, $n=0, 1, 2, \ldots)$[1]), déterminées aux facteurs constants près, telles que, pour $\lambda=\lambda_n$, $u=u_n$, les égalités (1) et (2) sont vérifiées.

Supposons que $p(x)$ possède deux dérivées premières continues.

Si l'on fait, avec Liouville, le changement de variables

$$z=c\int_\alpha^x p^{-\frac{1}{2}}dx,\ v(z)=p^{\frac{1}{4}}(x)\,u(x),\ \text{où}\ C=\pi\Big/\int_\alpha^\beta p^{-\frac{1}{2}}dx, \tag{3}$$

les équations (1) et (2) prendront la forme

$$\frac{d^2v}{dz^2}+(Q+\lambda)v=0, \tag{1'}$$

$$\frac{dv}{dz}-h'v\Big|_{z=0}=0;\quad\frac{dv}{dz}+H'v\Big|_{z=\pi}=0, \tag{2'}$$

où la fonction continue Q s'exprime facilement par p et q, et les constantes h', H' par h et H. Les fonction $u_i(x)$ se changeront en $v_i(z)$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$, formant dans l'intervalle $(0, \pi)$ un système

[1]) On sait que $u_n(x)$ possède exactement n zéros à l'intérieur de (α, β).

orthogonal. En supposant que la fonction $Q(z)$ est à variation bornée[2]) et

$$\int_0^{\pi} v_n^2(z)\,dz = 1 \qquad (n=0,1,2,\ldots), \tag{4}$$

on aura[3])

$$v_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nz + \frac{\beta(z)}{n}\sin nz + \frac{\varrho_n(z)}{n^2}, \tag{5}$$

où $\beta(z)$ possède une dérivée continue et à variation bornée et les fonctions continues $\varrho_n(z)$ sont (pour $n\to\infty$) uniformément bornées.

§ 2.

2. Les définitions des ensembles U, U', U'', U_M, U'_M, U''_M pour les séries de fonctions de Sturm-Liouville (bref: s. S. L.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(z) \tag{6}$$

sont analogues aux définitions des ensembles correspondants pour les s. t.

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx). \tag{7}$$

Théorème 1. Tout ensemble U_M pour les s. t. l'est aussi pour les s. S. L.

Théorème 1^a. Tout ensemble U_M pour les s. S. L. l'est aussi pour les s. t.

Théorème 2. Tout ensemble U'_M pour les s. t. l'est aussi pour les s. S. L.

Théorème 2^a. Tout ensemble U'_M pour les s. S. L. l'est aussi pour les s. t.

Avant de passer à la démonstration de ces théorèmes, nous allons donner quelques mots d'explication qui sont indispensables parce que les s. t. et les s. S. L. sont considérées dans divers

[2]) C'est l'hypothèse que nous ferons toujours et qui est complètement suffisante tant que nous nous bornons aux séries à coefficients tendant vers zéro. Dans l'étude des séries à coefficients non tendant vers zéro, si l'on veut obtenir pour v_n des expressions plus précises que (5), on doit supposer que $Q(z)$ possède quelques dérivées premières.

[3]) Pour la démonstration de cette formule cf. Hobson [1]. Evidemment la condition (4) définit les v_n au signe près. Dans (5) le signe est choisi de telle façon que $v(0) > 0$.

intervalles, les unes dans $(-\pi, \pi)$ et les autres dans $(0, \pi)$. Le sens des théorèmes 1^a et 2^a est évident. De même pour les théorèmes 1 et 2, si l'on se borne aux ensembles situés dans l'intervalle $(0, \pi)$, ce que nous ferons toujours. Encore une remarque. Considérons dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ les points $-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = \pi$. Dans chaque intervalle $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ soit situé un ensemble E_k qui est un U_M pour les s. t. Il résulte du lemme α que $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n$ est aussi un U_M. Donc, si, pour $\delta > 0$ donné, toute portion de diametre $< \delta$ d'un ensemble E est un U_M, l'ensemble E est lui-même un U_M. En d'autres mots, dans l'étude des ensembles U_M pour les s. t. on peut se borner aux ensembles de diamètre $< \delta$, en particulier de diamètre $\leqslant \pi$. Le sens des propositions 1 et 1^a est le suivant: l'ensemble U_M le plus général pour les s. S. L., c'est l'ensemble U_M pour les s. t. situé dans $(0, \pi)$. Réciproquement: en décomposant l'intervalle $(-\pi, \pi)$ en somme de $(-\pi, 0)$ et $(0, \pi)$ en décompose l'ensemble E du type U_M pour les s. t. en somme $E = E_1 + E_2$, où chacun des ensembles E_1, E_2 est un U_M pour les s. S. L. De même pour les U'_M.

3. Nous commençons par démontrer le théorème 2. Supposons, pour fixer les idées, que le mot „intégrable“ est employé dans le sens dû à M. Lebesgue. Supposons qu'un ensemble E situé dans l'intervalle $(0, \pi)$ est un U'_M pour les s. t. et qu'une série (6) est sommable M dans les points de l'intervalle $(0, \pi)$ appartenant à CE[4]) vers une fonction intégrable $f(x)$. Définissons une fonction $\beta^*(z)$ $(-\pi \leqslant z \leqslant \pi)$ égale à $\beta(z)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$ et arbitraire ailleurs, sous la condition cependant que les coefficients de $\mathfrak{S}[\beta^*]$ soient $O(n^{-3})$. Soit

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nz + B_n\sin nz,), \qquad A_n, B_n = o(n^{-1}), \tag{8}$$

le produit formel de $\mathfrak{S}[\beta^*]$ par la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin nz}{n}. \tag{9}$$

Comme dans $(0, \pi)$ on a $\beta^* = \beta$, on aura uniformément dans cet intervalle

[4]) CE désigne l'ensemble complémentaire de E (par rapport à $(0, \pi)$).

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(A_n\cos nz+B_n\sin nz)$$

$$+\beta(z)\sum_{n=1}^{N}a_n\frac{\sin nz}{n}\longrightarrow 0 \qquad (0\leqslant z\leqslant\pi), \tag{10}$$

donc la formule

$$(M)\sum_{n=1}^{\infty}a_n v_n(z)=f(z) \qquad (z\subset CE)\ ^{5}) \tag{11}$$

peut être écrite sous la forme (cf. (5))

$$(M)\ \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(a_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}+A_n)\cos nz+B_n\sin nz\right\}$$

$$=f(z)-f_1(z) \qquad (z\subset CE), \tag{12}$$

où

$$f_1(z)=a_0 v_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}.\varrho_n.a_n. \tag{12a}$$

En vertu du lemme β, la série (12) peut etre intégrée terme à terme dans l'intervalle (z_0, z) $(0<z_0<z<\pi)$ et l'on a

$$\frac{A_0}{2}\int_{z_0}^{z}dt+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{z_0}^{z}\left\{(a_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}+A_n)\cos nt+B_n\sin nt\right\}dt$$

$$=\int_{z_0}^{z}(f-f_1)\,dt\,. \tag{13}$$

La série

$$\frac{A_0 z}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{(a_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}+A_n)\sin nz-B_n\cos nz\right\}$$

converge à l'intérieur de $(0,\pi)$ vers une fonction $\Psi(z)$ qui, complétée dans les points frontiers: $\Psi(0)=\Psi(+0)$, $\Psi(\pi)=\Psi(\pi-0)$, est absolument continue dans tout l'intervalle $(0,\pi)$. Il en est donc de même de la somme $\Phi(z)$ de la série (9). Cette série converge uniformément dans chaque intervalle $(\varepsilon,\pi-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$. Nous allons prouver que cette proposition subsiste même pour $\varepsilon=0$. En effet, comme les termes de la série (9) sont impairs, elle converge dans

[5]) Les formules (5) et (10) prouvent la proposition suivante: pour toute s. S. L. (6) à coefficients tendant vers zéro, il existe une s. t. uniformément équiconvergente (au sens large) avec (6) dans l'intervalle $(0,\pi)$. Nous démontrerons plus loin une proposition plus générale (cf. lemme 8).

tout point de l'intervalle $(-\pi,\pi)$. Je dis que $\Phi(+0)=\Phi(-0)$, $\Phi(\pi-0)=\Phi(-\pi+0)$. Bornons nous à la première de ces égalités et supposons qu'elle n'est pas vraie. En intégrant formellement la série (9), on obtient la série à coefficients $o(n^{-2})$, dont la somme $\Phi^*(z)$ possède pour $z=0$ un point angulaire, c'est à dire que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi^*(h)+\Phi^*(-h)-2\,\Phi^*(0)}{h}\neq 0\,,$$

ce qui contrédit au théorème bien connu de Riemann. La fonction Φ est donc partout continue et même absolument continue. Il en résulte que la série (9), comme $\mathfrak{S}[\Phi]$, converge uniformément. On peut donc substituer $z_0=0$ dans (13). En tenant compte de la formule (5), de la définition de f, et de la relation (10), nous obtenons que la série (7) peut être intégrée terme à terme, c'est à dire on a

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_0^z v_k(t)\,dt=\int_0^z f(t)\,dt\,, \tag{13a}$$

où la série du membre gauche converge uniformément dans $(0,\pi)$. En d'autres termes: pour tout $0\leqslant z_0\leqslant z_1\leqslant\pi$, on a uniformément

$$\int_{z_0}^{z}\left\{\sum_{k=0}^{N}a_k v_k(t)-f(t)\right\}dt\longrightarrow 0\,.$$

En fixant n, on obtient de la dernière relation que, pour $N\longrightarrow\infty$,

$$\int_0^{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{N}a_k v_n(t)-f(t)\right\}v_n(t)\,dt\longrightarrow 0\,, \tag{14}$$

ce qu'on vérifie facilement en décomposant l'intervalle $(0,\pi)$ en une somme des sousintervalles, dans chacun desquels v_n est monotone, et puis en appliquant le second théorème de la moyenne. De la relation (14) il résulte que

$$a_n=\int_o^{\pi}f(t)\,v_n(t)\,dt \qquad (n=0,1,\ldots).$$

La série (6) est donc celle de Fourier de f (bref: $\mathfrak{S}_{SL}[f]$), c. q. f. d.

Si l'on employe l'intégrale de M. Denjoy (au sens étroit ou large), la démonstration reste presque la même. Le fait, que $\mathfrak{S}[\Phi]$

converge uniformément, résulte dans ce cas du théorème bien connu de M. Fejér sur la sommabilité uniforme $(C,1)$ de $\mathfrak{S}[\Phi]$ et du théorème de M. Tauber. On doit encore remarquer que le second théorème de la moyenne subsiste pour l'intégrale D.

4. Démonstration du théorème 2^a. Soit E un U'_M pour les s. S. L. Nous allons démontrer d'abord que toute série de cosinus

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nz, \tag{15}$$

sommable M dans les points de l'intervalle $(0,\pi)$, appartenant à CE, vers une fonction $f(x)$ intégrable et finie, est $\mathfrak{S}[f]$. La série

$$0\cdot v_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(z) \tag{16}$$
$$=0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nz+\beta(z)\frac{\sin nz}{n}+\frac{\varrho_n(z)}{n^2}\right]$$

peut être non-sommable M dans certains points de CE. Si elle a lieu, cette divergence est due à la série (9) qui est, en vertu du théorème de Riesz-Fischer, une $\mathfrak{S}[\varphi]$ [6]). Définissons $\beta^*(z)$ comme auparavant et soit (8) le produit formel de $\mathfrak{S}[\beta^*]$ par (9). La série (8) est $\mathfrak{S}[\beta^*\varphi]$. Désignons respectivement par

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n v_n(z), \tag{17}$$

$$\frac{1}{2}a''_0+\sum_{n=1}^{\infty} a''_n \cos nz \tag{18}$$

la $\mathfrak{S}_{SL}[\beta^*\varphi]$ et le développement de $\beta^*\varphi$ dans l'intervalle $(0,\pi)$ en série de cosinus. En vertu du théorème de M. Haar [7]) ces deux séries sont uniformément équiconvergentes dans $(0,\pi)$. Les séries (8) et (18) sont équiconvergentes à l'intérieur de $(0,\pi)$ car elles sont, l'une et l'autre, séries de Fourier des fonctions intégrables L et égales dans $(0,\pi)$. Les séries (17) et

$$\beta(z)\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin nz$$

sont donc équiconvergentes à l'intérieur de $(0,\pi)$. Il en résulte que la série

$$-a'_0 v_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a'_n)v_n(z) \tag{19}$$

est sommable M vers une fonction finie et intégrable — dans tous les points de l'intervalle $(0,\pi)$ appartenant à CE, sauf, peut-être, dans les points frontiers $z=0,\pi$.

5. Supposons d'abord qu'il existe un $\varepsilon>0$ tel que l'ensemble E soit entièrement contenu dans $(\varepsilon,\pi-\varepsilon)$ et que $f(z)=0$ dans $(0,\varepsilon)$ et $(\pi-\varepsilon,\pi)$ (nous nous débarasserons plus tard de cette restriction). La fonction $\varphi(z)$ est, par conséquent, constante à l'intérieur de $(0,\varepsilon)$ et $(\pi-\varepsilon,\pi)$. Le développement (18), donc aussi (17), est convergent et, par conséquent, sommable M pour $z=0,\pi$. Il en résulte que la série (19), sommable M dans CE vers une fonction intégrable et finie, est celle de Fourier de sa somme qui est égale à

$$g=\left(f-\frac{a_0}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot n^{-2}\cdot\varrho_n.$$

La série (16) est donc celle de Fourier de $h=g+\varphi\beta$. On en déduit que [8])

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_0^z v_n(t)\,dt=\int_0^z h\,dt,$$

où la série du membre gauche converge uniformément dans $(0,\pi)$. Comme la série

$$\beta(z)\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{\sin nz}{n},$$

uniformément équiconvergente avec $\mathfrak{S}[\beta^*\varphi]$, peut être intégrée terme à terme et

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\int_0^z\beta(t)\sin nt\,dt=\int_0^z\beta\varphi\,dt \qquad (0\leqslant z\leqslant\pi),$$

on obtient que

$$\frac{1}{2}a_0\int_0^z dt+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_0^z\cos nt\,dt=\int_0^z f\,dt \qquad (0\leqslant z\leqslant\pi),$$

[6]) Si l'ensemble E est fermé, cette divergence n'est pas possible, car tout point z_0 étranger à E peut être enfermé dans un intervalle Δ qui ne contient pas non plus des points de E. Dans Δ, la série (15) est sommable M vers une fonction intégrable, donc, en vertu du lemme α_1, la série (15), intégrée terme à terme, converge dans Δ vers une fonction continue. La série (16) est donc, d'après la définition de E, celle de Fourier de sa somme.

[7]) Haar [1]. Une nouvelle démonstration du théorème de M. Haar trouvera le lecteur dans Chap. VI de ce travail.

[8]) Conséquence du théorème analogue pour les s. t. et du théorème de M. Haar. Nous avons employé ici l'intégrale L, mais la démonstration subsiste pour l'intégrale D (cf. aussi le Chap. VI).

la série du membre gauche convergeant uniformément dans $(0, \pi)$. Il en résulte (cf. le raisonnement analogue dans la démonstration du théorème 2) que la série (15) est $\mathfrak{S}[f]$.

6. Il faut encore prouver que les restrictions imposées à l'ensemble E et à la fonction f ne sont pas essentielles. Soit $\lambda(x)$ une fonction paire, de période 2π, s'évanouissant dans les intervalles $(0, \frac{1}{2}\varepsilon)$ et $(\pi - \frac{1}{2}\varepsilon, \pi)$, égale à 1 dans $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$ et dont les coefficients de Fourier sont $o(n^{-3})$. Considérons le produit formel

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx \tag{20}$$

de la série (15) par $\mathfrak{S}[\lambda]$. Ce produit ne contient que des cosinus et est sommable M dans CE vers λf (en particulier vers zéro dans $(0, \frac{1}{2}\varepsilon)$, $(\pi - \frac{1}{2}\varepsilon, \pi)$. En vertu de la proposition déjà demontrée, cette série est $\mathfrak{S}[f\lambda]$. La série (20) est uniformément équiconvergente (resp.[8a]) équisommable $(C, 1)$) avec $\mathfrak{S}[f]$ à l'intérieur de $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$ (cf. Lemme γ). D'autre part, d'après les théorèmes sur la multiplication, la série (20) est équiconvergente avec (15). Par conséquent, cette dernière série et $\mathfrak{S}[f]$ sont équiconvergentes (équisommables $(C, 1)$) à l'intérieur de $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$, donc aussi dans $(-\pi + \varepsilon, -\varepsilon)$. Comme le nombre ε peut être pris aussi petit que l'on veut, la différence de la série (15) et de $\mathfrak{S}[f]$ converge (est sommable $(C, 1)$) vers zéro partout sauf peut-être pour $z = 0, \pi$. La série (15) est donc $\mathfrak{S}[f]$.

7. Nous venons de démontrer que tout ensemble E situé dans $(0, \pi)$ et qui est un U'_M pour les s. S. L. l'est aussi pour les séries de cosinus (nous entendons par la que l'ensemble $E+E^*$ est un U'_M pour les séries (15), E^* étant symétrique à E par rapport au point $z = 0$). Soit F un ensemble situé dans $(0, \pi)$ et qui est un U'_M pour les séries de cosinus. Pour achever la démonstration du théorème 2^a, nous avons à prouver que toute série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{21}$$

qui est sommable M dans les points de l'intervalle $(-\pi, \pi)$ appar-

[8a]) Dans le cas de l'intégrale D.

tenant à CF (donc, en particulier, pour tout $-\pi < z < 0$) vers une fonction f intégrable L et finie, est $\mathfrak{S}[f]$. A ce but soit $\lambda(x)$ une fonction de période 2π, égale à 0 dans $(-\pi, 0)$, à 1 dans $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$ et dont les coefficients de Fourier sont $O(n^{-3})$. Soient A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ les coefficients du produit formel de la série (21) par $\mathfrak{S}[\lambda]$. Comme ce produit converge vers zéro dans $(-\pi, 0)$, la série

$$A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx, \tag{22}$$

qui représente la partie paire de ce produit et qui est sommable M dans CF vers une fonction finie et intégrable, est celle de Fourier de cette fonction. D'une part, la série (22) est équiconvergente (resp. équisommable $(C, 1)$) avec $\mathfrak{S}[f]$ à l'intérieur de $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$, et d'autre, elle y est équiconvergente avec (21). Les séries (21) et $\mathfrak{S}[f]$ se comportent donc identiquement à l'intérieur de $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$ et comme ε est arbitraire, leur différence converge (est sommable $(C, 1)$) vers zéro partout, sauf peut-être pour $z = 0, \pi$, donc partout. La série (21) est donc $\mathfrak{S}[f]$ et la démonstration du théorème 2^a est achevée.

8. Les démonstrations des théorèmes 1 et 1^a ne diffèrent pas essentiellement de celles de ci-dessus. Il y a cependant de légères différences. Par exemple, dans la démonstration du théorème 1, nous représentons la „partie principale" de la série $\Sigma a_n v_n$ sous la forme d'une s. t. équiconvergente et obtenons ainsi la formule (12) où maintenant $f = 0$ et E est un U_M pour les s. t. La série (12) est donc sommable M dans tous les points de l'intervalle $(0, \pi)$ n'appartenant pas à E (du type U_M) vers une fonction continue $f_1(z)$. Il n'en résulte aucunement qu'on puisse intégrer la série (12) terme-à-terme. Ceci serait possible si nous pouvions démontrer que notre ensemble E, qui est un U_M, est aussi un U'_M.[9]) En particulier donc, nous pouvons le faire pour les ensembles E dénombrables ou fermés et, dans ce cas, la démonstration du théorème 1 reste la même que celle du théorème 2. Les difficultés disparaissent si nous supposons que $\mathfrak{S}[f_1]$, où p. ex. on complète la définition de f_1 par la condition de parité, converge partout dans $(0, \pi)$. En effet, en retranchant alors $\mathfrak{S}[-f_1]$ de la

[9]) De même si le procédé M jouit de cette propriété que $\mathfrak{S}[f]$ est sommable M (vers f) pour f continue.

série (12), on obtient la s. t. convergente vers zéro dans tous les points de l'intervalle $(0, \pi)$ appartenant à CE; donc cette dernière série peut y être intégrée terme-à-terme et il suffit de remarquer que $\mathfrak{S}[f_1]$ peut être intégrée aussi. La seconde partie de la démonstration n'exige aucun changement. La situation est complètement analogue dans le cas du théorème 1^a.

9. Pour démontrer que $\mathfrak{S}[f_1]$ converge, remarquons que (c. f. (12 a))

$$f_1(z) = a_0 v_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\varrho_n(z)}{n^2} = a_0 v_0(z) + \varrho(z). \tag{23}$$

La fonction v_0 possède deux dérivées premières continues. Nous allons prouver que $\varrho(z)$ vérifie la condition de Lipschitz d'ordre positif. A ce but, nous nous appuyons sur l'inégalité

$$\left|\frac{d}{dz}\varrho_n(z)\right| \leqslant Cn \qquad (0 \leqslant z \leqslant \pi;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{24}$$

($C, C_1, C_2, \ldots$ désignent des constantes indépendantes de n et z). On obtient cette inégalité en comparant deux expressions pour $v_n'(z)$. La première,

$$v_n'(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, n \sin nz + \beta(z) \cos nz + \frac{\sigma_n(z)}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{25}$$

$$|\sigma_n(z)| \leqslant C_1,$$

peut être démontrée de la même façon (approximations successives) que la formule (5)[10]; la seconde s'obtient par la différentiation de la formule (5). Pour z et $z+h$ appartenant à $(0, \pi)$ nous avons donc

$$|\varrho(z+h) - \varrho(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |\varrho_n(z+h) - \varrho_n(z)|\, n^{-2}$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} |\varrho_n(z+h) - \varrho_n(z)|\, .\, n^{-2} = A_N + B_N,$$

$$A_N \leqslant \sum_{n=1}^{N} h\, .\, Cn\, .\, n^{-2} \leqslant C_2\, h \log N,$$

$$B_N \leqslant C_3 \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-2} < C_3\, .\, N^{-1}.$$

En posant $N = [1/h]$ nous aurons

[10]) La formule (25) se trouve chez Hobson [1].

$$|f(z+h) - f(z)| < C_4\, h \log 1/h,$$

pour h suffisamment petit (p. ex. pour $|h| \leqslant 1/3$). Nous pouvons donc considérer les théorèmes 1 (et 1^a) comme démontrés.

Ajoutons encore qu'en prenant comme M la convergence ordinaire, mais en considérant, au lieu des sommes exactes les limites d'indétermination, on étend immédiatement les résultats bien connus de M. Ch. J. De la Vallée Poussin concernant l'unicité des s. t.[11]) au cas de s. S. L.[12]).

Remarque. La convergence uniforme de $\mathfrak{S}[f_1]$ (cf. (23)), ainsi que la formule (10), nous permettent d'énoncer la proposition suivante, dont nous nous sommes implicitement servis dans la démonstration du théorème 1:

Lemme ε. Pour toute série (6) où $a_n \to 0$, il existe une s. t. à coefficients tendant vers zéro, telle que ces deux séries sont uniformément équiconvergentes dans $(0, \pi)$.

§ 3.

10. Nous avons prouvé que les ensembles d'unicité pour les s. t. et s. S. L. sont les mêmes. En particulier nous avons prouvé que tout ensemble $E (\subset (0, \pi))$ de multiplicité[13]) pour les s. t., l'est aussi pour les s. S. L. Bornons nous, pour fixer les idées, au problème de Cantor et choisissons comme M la convergence ordinaire. Nous pouvons donc affirmer qu'il existe une s. S. L. (6) convergente vers zéro en dehors de E et donc les coefficients ne sont pas tous égaux à zéro. La méthode dont nous nous sommes servis dans la démonstration des théorèmes 1^a et 2^a nous permet de construire effectivement une telle série.

La démonstration s'obtient en répétant celle du théorème 1^a. En effet, de la définition de E il résulte qu'il existe une s. t. à coefficients tendant vers zéro qui converge vers zéro en dehors de E, mais pas partout. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que cette série ne contient que des cosinus, c'est-à-dire peut être écrite sous la forme

[11]) De la Vallée Poussin [1].

[12]) M. Plancherel m'a communiqué obligéamment que les théorèmes d'unicité pour les s. S. L., analogues à ceux de M. De la Vallée Poussin, avaient été démontrés (mais non publiés) il y a quelques années par M. Moos, son éléve, qui s'était servi de la méthode de M. Plancherel, Voir: Plancherel [2]. Cf. aussi le théorème 4 de ce chapitre.

[13]) E est un ensemble de multiplicité s'il n'est pas d'unicité.

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nz,$$

et qu'elle converge vers zéro dans $(0,\varepsilon)$ et $(\pi-\varepsilon,\pi)$, pour un certain $\varepsilon>0$. Posons

$$\psi(z)=-\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\beta(z)\cdot\frac{\sin nz}{n}+\frac{\varrho_n(z)}{n^2}\right). \tag{26}$$

Il existe alors une fonction $\psi(z)$ intégrable L, telle que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n' v_n(z),$$

qui est $\mathfrak{S}_{SL}[\psi]$, est équiconvergente avec (26). La série

$$-a_0' v_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_n')v_n(z)$$

jouit des propriétés demandées.

11. La définition des ensembles U_M'' pour les s. S. L. est analogue à celle des U_M'' pour les s. t. On a le théorème suivant:

Théorème 3. Les ensembles U_M'' pour les s. t. et pour les s. S. L. sont les mêmes.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle des théorèmes 2 et 2^a. Soit $Z\subset(0,\pi)$ un ensemble U_M'' pour les s. t. et supposons que la série (6) est sommable M dans CZ vers une fonction $f(z)$ finie et $\geqslant\psi(z)$, où $\psi(z)$ est intégrable. Il suffit de prouver que $f(z)$ est intégrable elle même dans $(0,\pi)$; dans ce cas la démonstration du théorème 3 sera identique à celles des théorèmes 2 et 2^a.

En vertu des formules (5) et (10), la série (6) est uniformement équiconvergente dans $(0,\pi)$ avec la s. t. du membre gauche de (12), dont la somme est $\geqslant\psi-f_1$. D'après le lemme α_2, la fonction f est intégrable dans chaque intervalle $(\varepsilon,\pi-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$. Je dis qu'on peut poser $\varepsilon=0$. En effet, supposons que ceci n'est pas vrai et que, pour fixer les idées, la fonctiom f n'est pas intégrable dans $(0,\varepsilon)$. Comme $f\geqslant\psi$, où ψ est intégrable, on a

$$\lim_{z\to+0}\int_z^{\frac{\pi}{2}}f\,dt\to+\infty.$$

Comme la série (12) peut être intégrée terme à terme dans $(\varepsilon,\pi-\varepsilon)$ et comme A_n, $B_n=o(n^{-1})$, on a

$$\Phi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{\sin nz}{n}\to+\infty.$$

Intégrons terme à terme cette dernière série et soit $\Phi^*(z)$ la somme de la série obtenue. On a

$$\lim_{h\to0}\frac{\Phi^*(h)+\Phi^*(-h)-2\Phi^*(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\Phi^*(h)-\Phi^*(0)}{h}=+\infty$$

ce qui contrédit au théorème de Riemann. La seconde partie du théorème 3 est analogue au théorème 2^a.

12. Les théorèmes 1, 1^a, 2, 2^a, 3 peuvent être généralisés en considérant, au lieu des sommes exactes, les limites d'indétermination. Considérons par exemple le procédé de Poisson. On sait que tout ensemble dénombrable est un U_P'' pour les s. t. Un peu plus généralement: si une s. t. à coefficients tendant vers zéro possède les sommes de Poisson $\underline{f}$ et $\overline{f}$ (inférieure et supérieure) finies, sauf peut-être dans un ensemble dénombrable, et si $\underline{f}\geqslant\Psi$, où Ψ est intégrable L (ou D au sens étroit), la série en question est $\mathfrak{S}[f]$ [14]). Un raisonnement, identique à celui dont nous nous sommes servis dans le cas du théorème 3, nous donne:

Théorème 4. Supposons que la série (6), dont les coefficients tendent vers zéro, possède les sommes de Poisson

$$\underline{f}(z)=\varliminf_{r\to1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n v_n(z)r^n,\quad \overline{f}(z)=\varlimsup_{r\to1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n v_n(z)r^n\quad(0\leqslant z\leqslant\pi) \tag{27}$$

finies, sauf dans un ensemble E au plus dénombrable. Si $\underline{f}(z)\geqslant\psi(z)$, où ψ est intégrable L (ou D au sens étroit), la série (6) est $\mathfrak{S}_{SL}[\underline{f}]$.

Plus généralement, on démontre facilement que les ensembles d'unicité du type considéré dans Chap. I, 5c), sont les mêmes pour les s. S. L. que pour les s. t. Nous ne nous'y arrêterons pas.

§ 4.

13. Il existe des théorèmes d'unicité pour les s. t. à coefficients non tendant vers zéro [15]). La différence essentielle entre ce cas et celui de coefficients tendant vers zéro est la suivante: dans

[14]) Steinhaus [2], Rajchman [4], Zygmund [2].
[15]) M. Riesz [3], Kogbetlianz [1], Young [1], Zygmund [2].

le cas de coefficients bornés, l'ensemble d'unicité le plus général est l'ensemble vide et pour les s. t. à coefficients $O(n)$ il n'y a pas même d'unicité, comme le prouvent les exemples des séries bien connues

$$\frac{1}{2}+\sum_1^\infty \cos nx, \quad \sum_1^\infty n \sin nx,$$

dont la première est sommable vers zéro pour $z \neq 0 \pmod{2\pi}$ et la seconde partout. On a démontré pour les séries à coefficients $O(n^k)$ $(k<1)$ que l'ensemble vide est un U'_M et U''_M, M désignant $(C,1)$ ou même P[16]). Le cas de coefficients $o(n)$ n'est pas résolu jusqu'à présent. Si la solution était positive, elle permettrait de donner à certains théorèmes sur l'unicité (ou la localisation) pour les s. t., donc aussi pour les autres systèmes orthogonaux étudiés dans ce travail, une forme plus définitive.

14. Supposons que la série (6) à coefficients $O(n^\gamma)$ $(\gamma<1)$ est sommable P, partout dans l'intervalle $(0,\pi)$, vers une fonction $f(x)$ finie et intégrable L. Nous allons prouver que cette série est $\mathfrak{S}_{SL}[f]$. Le lemme ε subsiste mutatis mutandis pour les s. S. L. à coefficients $O(n^\gamma)$ $(\gamma<1)$ (la démonstration est la même; en utilisant la formule d'approximation plus précise que (5)[17]) on démontre que le lemme ε subsiste aussi pour les séries à coefficients $o(n)$), la série (6) est donc uniformément équiconvergente dans $(0,\pi)$ avec une s. t. à coefficients $O(n^\gamma)$. On sait que cette dernière s. t. — donc aussi la série (6) — peut être intégrée terme à terme à l'intérieur de $(0,\pi)$[18]). Par conséquent la série (9) est sommable P à l'intérieur de $(0,\pi)$ vers une fonction qui y est bornée. Comme cette s. t. ne contient que des sinus, elle est sommable P pour $z=0,\pi$, donc, en tenant compte de la formule (5), nous voyons que la s. t.

$$\sum a_n \cos nz, \tag{27a}$$

qui est sommable P dans $(0,\pi)$, donc aussi dans $(-\pi,\pi)$, vers une fonction finie et intégrable, est celle de Fourier. La série

[16]) loc. cit. [15]).
[17]) Cf. les formules (39a), (39b).
[18]) Zygmund [1], p. 93, théorème VI. Je profite de cette occasion pour mentionner que le théorème VI du travail cité n'est vrai que pour $0 \leqslant \gamma < 1$. Si l'on veut qu'il subsiste aussi pour $-1 < \gamma < 0$, on doit y remplacer $\mathfrak{S}[f]$ par $\mathfrak{S}[\lambda f]$, où λ est une fonction de période 2π, suffisamment régulière, égale à 1 dans $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ et à 0 en dehors de (a, b).

(9), donc aussi (13a), converge uniformément vers une fonction absolument continue, ce qui prouve que la série (6) est $\mathfrak{S}[f]$. De même, si f est intégrable D au sens étroit. La proposition subsiste si l'on y remplace la condition que f soit intégrable par: $f \geqslant \psi$, où ψ est intégrable. La démonstration est à peu près la même. On ne peut pas affirmer que la somme de la s. t. (9) est bornée, mais il est facile de prouver qu'elle est intégrable, ce qui suffit pour nous. En effet, cette somme est continue à l'intérieur de $(0,\pi)$ et tend, pour $z \to +0$, vers une limite finie ou $-\infty$. Supposons qu'elle n'est pas intégrable dans le voisinage du point $z=0$. Si l'on intégre la série (9) terme à terme, on obtient donc que la somme de la série

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^2} \cos nx \tag{28}$$

tend vers $-\infty$ pour $x \to +0$, ce qui n'est pas possible, cette dernière série convergeant absolument et uniformément. De même la somme de (9) est intégrable dans le voisinage du point $z=\pi$.

La démonstration ne subira aucune modification si, au lieu des sommes exactes, en considère les limites d'indétermination (27). Nous avons donc prouvé le théorème suivant:

Théorème 5. Le théorème 4 subsiste pour les séries (6) à coefficients $O(n^\gamma)$ $(\gamma<1)$, pourvu que l'on suppose que l'ensemble exceptionnel E est vide.

15. Remarques. 1°. Comme nous avons déjà mentionné, le problème d'unicité (pour le procédé $(C,1)$ ou P) pour les s. t. à coefficients $o(n)$ n'est pas résolu jusqu'à présent. Il est cependant facile de prouver que si l'ensemble vide est un ensemble d'unicité pour le procédé M (M désignant $(C,1)$ ou P), alors ceci a lieu aussi pour les s. S. L. Considérons par exemple les ensembles du type U''_M. La démonstration est la même que celle du théorème 5, avec cette différence que maintenant nous ne pouvons nous appuyer sur la convergence absolue de la série (28). Mais on sait que, si une série $\sum c_n$ est sommable $(C,1)$ ou P, la série $\sum c_n . n^{-2}$ jouit de la même propriété. En posant $c_n = a_n v_n(0)$ et en tenant compte de la formule (5), on déduit que la sommabilité de la série (6) pour $z=0$, implique celle de (28) pour $z=0$, et la somme de la série (28) ne peut pas tendre vers $-\infty$ pour $z \to 0$.

La même remarque s'applique au théorème 6 de ce chapitre.

2°. Dans le théorème 5 et dans la remarque précédente nous avons considéré le procédé de sommation de Poisson. La question s'impose: peut-on démontrer pour les séries à coefficients $o(n)$ les propositions analogues aux théorèmes 1, 2, 3 pour une classe assez vaste des méthodes M? (Bien entendu, on doit dans notre cas faire l'hypothèse que les ensembles exceptionnels (du type U_M, U'_M, U''_M) sont vides). Je n'ai pas réussi à le faire. Les difficultés résultent du fait que la multiplication formelle des s. t., qui joue le rôle essentiel dans les raisonnements, ne s'applique aux séries à coefficients non tendant vers zéro qu'avec certaines restrictions. On peut démontrer les théorèmes en question pour une classe des méthodes M, dont le procédé P est un cas particulier, mais les conditions que l'on doit imposer aux procédés de cette classe rendent les théorèmes peu intéressants.

3°. Dans le théorème 5 — comme dans le théorème analogue pour les s. t. — on peut introduire l'ensemble exceptionnel dénombrable E, si l'on fait quelques restrictions sur la façon dont la série (6) se comporte dans E.

16. On sait que

$$\frac{C}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} C\cos n(x-\xi) \tag{29}$$

est la s. t. la plus générale à coefficients $O(n^\gamma)$ $(\gamma<1)$, sommable P vers zéro pour $x\neq\xi \pmod{2\pi}$. Si le nombre des points exceptionnels est fini, la s. t. est une somme d'un nombre fini des séries du type (29)[18]).

Théorème 6. Si la série (6) à coefficients $O(n^\gamma)$ $(\gamma<1)$ est sommable P vers zéro partout dans $(0,\pi)$, sauf peut-être pour $z=\xi$, elle est nécessairement de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} C\,v_n(\xi)\,v_n(z). \tag{30}$$

En partant de la formule (5), on prouve facilement que cette dernière série est uniformément sommable P (ou même (C,k) $(k>0)$) dans tout intervalle fermé ne contenant pas le point $z=\xi$. En désignant donc par $C.K(z,\xi)$ la somme de la série (30), on voit que $K(z,\xi)$ est continue pour $z\neq\xi$. Pour prouver que $K(z,\xi)=0$ pour $z\neq\xi$, on peut raisonner comme il suit.

Supposons, pour fixer les idées, que $K(z_0,\xi)>0$ $(z_0\neq\xi)$; il existe donc un ε $(0<\varepsilon<|z_0-\xi|)$, tel que $K(z,\xi)>\varepsilon$ pour $|z-z_0|<\varepsilon$. Soit $\varphi(z)$ une fonction continue, positive à l'intérieur de $(z_0-\varepsilon,\ z_0+\varepsilon)$ et égale à zéro ailleurs. Comme on voit facilement, il résulte de nos hypothèses sur $K(z,\xi)$ que $\mathfrak{S}_{SL}[\varphi]$ ne peut converger vers zéro pour $z=\xi$ et nous aboutissons à une contradiction. Ceci prouve que $K(z,\xi)=0$ pour $z\neq\xi$.

Pour démontrer le théorème 6 supposons, pour fixer les idées, que $0<\xi<\pi$ (le cas de $\xi=0$ ou $\xi=\pi$ se démontre de la même façon).

En répétant la démonstration du théorème 5, nous obtenons que la série (27 a) (qui est, à un facteur constant près, la „partie principale" de la série considérée (6)) est sommable P dans $(0,\pi)$, sauf peut-être pour $z=\xi$, vers une fonction f bornée. En considérant cette série dans l'intervalle $(-\pi,\pi)$, on voit qu'elle y est sommable P partout, à l'exception peut-être des points ξ, $-\xi$. Elle diffère donc de $\mathfrak{S}[f]$ (où $f(-z)=f(z)$) par une série

$$C_1\Big[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x-\xi)\Big]+C_2\Big[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x+\xi)\Big]\ (C_1,\ C_2\text{—const.}).$$

Comme les points ξ et $-\xi$ jouent le même rôle pour la série (27 a), on a $C_1=C_2$ et (27 a) diffère de $\mathfrak{S}[f]$ par la série

$$C\Big[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\xi\,.\cos nx\Big] \qquad (C=2C_1),$$

d'où $a_n=C.\cos n\xi+\varepsilon_n$ $(\varepsilon_n\to 0)$ et la série considérée (6) est de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(C.\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos n\xi+\varepsilon_n\Big)v_n(z). \tag{31}$$

En tenant compte de la formule (5) et de la sommabilité P vers zéro de la série (30), retranchons cette dernière série de (31). Nous obtiendrons une s. S. L. à coefficients tendant vers 0, sommable P vers zéro pour $z\neq\xi$, donc identiquement égale à zéro (théorème 4). La série (6) est donc de la forme (30).

17. Le théorème peut être facilement généralisé si l'on considère les limites d'indétermination, ou si l'on introduit quelques points exceptionnels (mais toujours en nombre fini), ou enfin si l'on suppose que la somme est une fonction $f(x)$ intégrable. Comme les démonstrations restent au fond les mêmes, nous nous

bornons à remarquer que, dans le deuxième cas, la série considérée est la somme d'un nombre fini des séries de la forme (30) et que, dans le troisième cas, il faut ajouter encore $\mathfrak{S}_{SL}[f]$.

18. Ce chapitre est consacré à la théorie des séries de la forme (6), les fonctions $v_n(z)$ vérifiant les conditions (1′) et (2′). Mais presque tous les résultats obtenus, en particulier les théorèmes concernant les ensembles U_M, U'_M, ceux de localisation (voir ci-dessous), subsistent sans aucun changement si l'on remplace les conditions aux limites (2′) par d'autres conditions, p. ex. telles que

$$v(0)=v(\pi)=0 \tag{32}$$

(qui peuvent être considérées comme le cas limite de (2′) pour $h', H'=\infty$) etc. Ceci est facile à comprendre car la partie essentielle des démonstrations c'est l'équiconvergence des séries considérées avec certaines s. t. Cette équiconvergence est possible pour les séries de la forme

$$\sum a_n w_n(z) \tag{33}$$

où $a_n \to 0$ et les fonctions w_n (non nécessairement orthogonales) sont de la forme

$$\begin{aligned} w_n(z) = {} & \{C_n^{(1)}\varphi_1(z)+C_n^{(2)}\varphi_2(z)+\ldots+C_n^{(k)}\varphi_k(z)\}\cos nz \\ & +\{D_n^{(1)}\psi_1(z)+D_n^{(2)}\psi_2(z)+\ldots+D_n^{(k)}\psi_k(z)\}\sin nz + r_n(z). \end{aligned} \tag{34}$$

Dans cette formule nous supposons que le nombre k ne dépend pas de n, les fonctions φ, ψ, r sont suffisamment régulières, les nombres C, D sont bornés et enfin que les fonctions r_n tendent assez rapidement vers zéro. Le système (normé) des fonctions $v_1, v_2, \ldots$ vérifiant les conditions (1′) et (33) possède la représentation asymptotique

$$v_n(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nz+\frac{\beta^*(z)}{n}\cos nz+\frac{\varrho_n^*(z)}{n^2} \quad (n=1,2,\ldots,|\varrho_n(z)|\leqslant C)$$

qui est évidemment un cas spécial de (34). Il y a cependant quelques différences entre les fonctions v_n du système (1′), (2′) et celles du (1′), (32). Ce sont les mêmes différences qui existent entre les séries

$$\text{(35)} \qquad \text{a) } \frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty a_n\cos nx, \qquad \text{b) } \sum_1^\infty b_n\sin nx,$$

considérées dans l'intervalle $(0,\pi)$ [$\cos nx$ et $\sin nx$ vérifient

respectivement les équations (1′), (2′) (où $Q\equiv 0$; $h', H'=0$) et (1′), (32)]. L'exemple de la série (35 b) où $b_n=1/\log n$ $(n=2,3,\ldots)$, dont la somme est bornée inférieurement dans $(0,\pi)$ sans y être intégrable, prouve que la définition des ensembles U''_M doit être modifiée légèrement pour les séries (6) où v_n vérifient (1′), (32). Soit E un ensemble U''_M pour les s. t. (7), situé dans l'intervalle $(0,\pi)$. Il est facile de prouver que, si une série de sinus (35 b) est sommable M dans tous les points de l'intervalle $(0,\pi)$ qui n'appartiennent pas à E, vers une fonction finie $f(x)\geqslant\psi(x)$, où $\psi(x)\sin x$ est intégrable, alors $f(x)\sin x$ est intégrable et les nombres b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$[19]. La situation est analogue pour les séries (6) où v_n vérifient (1′), (32). Si l'on suppose, par exemple, qu'une série (6) à coefficients $\to 0$ est sommable M dans les points de l'intervalle $(0,\pi)$ appartenant à CE (E étant un U''_M pour les s. t.), vers une fonction $f\geqslant\psi$ ($\psi\sin x$ intégrable), alors on peut démontrer que $f(z)v_n(z)$ est intégrable $(n=1,2\ldots)$ et que

$$a_n=\int_0^\pi v_n(z)f(z)\,dz.$$

Nous ne nous y arrêterons pas.

§ 5.

19. Nous allons nous occuper maintenant de la localisation, en étendant les théorèmes connus pour les s. t. aux s. S. L. On a les propositions suivantes:

Théorème 7. Si une série

$$\sum_0^\infty a_n v_n(z) \qquad (a_n\to 0) \tag{36}$$

est sommable M vers zéro dans tous les points d'un intervalle (α,β) $(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant\pi)$, sauf peut-être ceux d'un ensemble E du type U_M, elle converge uniformément vers zéro dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$, quelque petit que soit $\varepsilon>0$.

Théorème 8. Si une série (36) est sommable M dans $\alpha\leqslant z\leqslant\beta$ (excepté peut être un ensemble du type U'_M) vers une fonction f intégrable L, elle est, dans tout intervalle $(\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon)$,

[19]) A. Zygmund [4].

uniformément équiconvergente avec $\mathfrak{S}_{SL}[f^*]$, où $f^*=f$ dans (α,β) et $f^*=0$ ailleurs.

Si l'on veut que cette proposition soit vraie aussi pour les intégrales de M. Denjoy, on doit la modifier de la façon suivante:

Théorème 9. Sous les hypothèses du théorème 8, la série (36) est uniformément équiconvergente dans $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$ avec $\mathfrak{S}_{SL}[f\lambda]$, où la fonction $\lambda(z)$ est suffisamment régulière et vérifie dans $(0,\pi)$ les conditions: $\lambda(z)=1$ dans $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$ et $\lambda(z)=0$ en dehors de (α,β) [20]).

Le théorème 7 résulte des lemmes α et ε. Les théorèmes 8 et 9 s'obtiennent des lemmes α_1 (resp. γ), ε et du théorème de M. Haar [21]).

20. Remarquons cependant que dans les théorèmes 7, 8, 9, les points frontiers jouent un rôle un peu exceptionnel. Par exemple, si une série (36) converge (bornons nous au cas le plus simple) vers zéro dans un intervalle $(0,\beta)$, on déduit du théorème 7 qu'elle converge uniformément dans tout intervalle $(\varepsilon,\beta-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$, tandis qu'il est probable (en tenant compte du fait que les points $0,\pi$ ne sont pas singuliers pour les s. S. L.) que la convergence uniforme doit avoir lieu aussi dans $(0,\beta-\varepsilon)$. En effet, on a la proposition suivante:

Théorème 10. Si dans les théorèmes 7, 8, 9 on a $\alpha=0$ (resp. $\beta=\pi$), alors on peut remplacer l'intervalle $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$ par $(0,\beta-\varepsilon)$ (resp. $(\alpha+\varepsilon,\pi)$).

Les démonstrations étant analogues, bornons nous à la proposition correspondant au théorème 8. La série (36) est uniformément équiconvergente avec une s. t. Cette dernière peut être intégrée terme à terme à l'intérieur de $(0,\beta)$, il en est donc de même de la série (36). Il en résulte (cf. (5)) que la série

$$G(z)=\sum_1^\infty \frac{a_n}{n}\sin nz$$

converge à l'intérieur de $(0,\beta)$ vers une fonction qui y est absolument continue. De plus, on a $G(+0)=0$ (cf. le raisonnement analogue dans la démonstration du théorème 2).

Donc, le développement en série de cosinus de la fonction $H^*(z)$, égale à

[20]) Nous rappelons que, bien que la fonction f ne soit définie que dans (α,β), nous posons $\lambda(z)f(z)=0$ en dehors de (α,β).

[21]) Haar [1$_1$].

$$H(z)=a_0 v_0(z)+\sum_{n=1}^\infty\left[\frac{\beta(z)}{n}\sin nz+\frac{\varrho_n(z)}{n^2}\right]a_n \tag{37}$$

dans $(0,\beta)$ et à 0 dans (β,π), converge uniformément dans $(0,\beta-\varepsilon)$. La différence des séries (36) et (37) nous donne la s. t.

$$\sum_{n=1}^\infty a_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nz \tag{38}$$

sommable M dans $(-\beta,\beta)$ (en dehors de E^*+E, où E^* est symétrique à E par rapport à $z=0$) vers une fonction intégrable. Cette fonction est paire et égale à $g=f-H$ dans $(0,\beta)$. La série (38) se comporte dans $(0,\beta-\varepsilon)$ comme le développement en série de cosinus de la fonction g^*, égale à g dans $(0,\beta)$ et à 0 dans (β,π) (lemme γ). Il en résulte que la série (36) est uniformément équiconvergente dans $(0,\beta-\varepsilon)$ avec le développement en série de cosinus de la fonction $g^*+H^*=f^*$, où $f^*=f$ dans $(0,\beta)$ et $=0$ dans (β,π). Il suffit maintenant de s'appuyer sur le théorème mentionné de M. Haar.

21. Les propositions analogues aux théorèmes 7, 8, 9, 10 subsistent si l'on considère les limites d'indétermination. Nous nous bornons à énoncer le théorème suivant qui découle immédiatement des raisonnements précédents et des théorèmes sur l'unicité des s. t. pour le procédé de Poisson.

Théorème 11. Si une série (36) possède les fonctions $\underline{f}$ et $\overline{f}$ (cf. (27)) intégrables (L, ou D au sens étroit) et finies partout dans (α,β) $(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant\pi)$, sauf peut être dans un ensemble dénombrable de points, la série considérée est uniformément équiconvergente dans $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$ avec $\mathfrak{S}_{SL}[\lambda\overline{f}]$, où λ est une fonction suffisamment régulière, égale à 1 dans $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$ et à 0 en dehors de (α,β). Si $\alpha=0$ (resp. $\beta=\pi$), on peut remplacer $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$ par $(0,\beta-\varepsilon)$ (resp. $(\alpha+\varepsilon,\pi)$).

22. On peut démontrer aussi la proposition suivante:

Théorème 12. Le théorème 11 subsiste pour $a_n=o(n^\gamma)$ $(-1<\gamma<1)$ si l'on y remplace l'équiconvergence par l'équisommabilité (C,γ) et si l'on suppose (pour $0<\gamma<1$) que l'ensemble exceptionnel est vide.

La démonstration ne diffère pas essentiellement de celle du théorème 11. Il faut cependant s'appuyer sur la multiplication formelle des s. t. à coefficients $o(n^\gamma)$ $(-1<\gamma<1)$. Nous n'y insisterons pas.

[22]) Voir Zygmund [1].

Le cas de $\gamma = 1$, qui est lié étroitement avec le problème d'unicité pour les s. S. L. à coefficients $o(n)$, n'est pas résolu. Pour $\gamma > 1$ le théorème n'est pas vrai. Cependant, pour tout $\gamma > 0$, on a le théorème suivant:

Théorème 13. Si une série (36), où $a_n = o(n^\gamma)$ $(\gamma > 0)$, est uniformément sommable P dans un intervalle (α, β) $(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi)$, elle est uniformément sommable (C, γ) dans tout sousintervalle $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$.

Ce théorème est analogue au théorème connu de la théorie des s. t.: [23])

(A) Si une s. t. à coefficients $o(n^\gamma)$ $(\gamma > 0)$ est uniformément sommable P dans un intervalle (α, β), elle est uniformément sommable (C, γ) dans $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$.

La démonstration du théorème 13 s'appuye sur la proposition (A) et sur l'évaluation plus précise des fonctions $v_n(z)$, qui peut être obtenue, par exemple, en se servant de la méthode de Hobson.[24]) Si la fonction $Q(z)$ (cf. (1')) possède k premières dérivées dont la dernière est à variation bornée, on a pour k pair

$$(39\,a)\quad v_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nz \cdot \left\{1 + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_4}{n^4} + \ldots + \frac{\alpha_k}{n^k} + \frac{\varrho_n}{n^{k+2}}\right\} + \sin nz \cdot \left\{\frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_3}{n^3} + \ldots + \frac{\beta_{k+1}}{n^{k+1}} + \frac{\sigma_n}{n^{k+2}}\right\},$$

et pour k impair

$$(39\,b)\quad v_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nz \cdot \left\{1 + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots + \frac{\alpha_{k+1}}{n^{k+1}} + \frac{\varrho_n}{n^{k+2}}\right\} + \sin nz \cdot \left\{\frac{\beta_1}{n} + \ldots + \frac{\beta_k}{n^k} + \frac{\sigma_n}{n^{k+2}}\right\},$$

où, par exemple, dans (39 a) (pareillement dans (39 b)) les fonctions ϱ_n, σ_n sont continues, uniformément bornées et les fonctions $\beta_{k+1}(z)$, $\alpha_k(z)$, $\beta_{k-1}(z)$, $\alpha_{k-2}(z), \ldots \beta_1(z)$ ont respectivement la 1re, 2e, 3e, ..., $(k+1)$re dérivée à variation bornée. Ceci a lieu, en particulier, si Q est analytique.

[23]) Ce théorème est dû à M. Riesz [1]. Il résulte 1° de la sommabilité uniforme de $\mathfrak{S}[f]$ (f continue) par le procédé (C, k) $(k > 0)$ (M. Riesz [1]) et 2° du théorème suivant (Riesz [1], [4]): La série de puissances $\sum a_n z^n = f(z)$, où $a_n = o(n^\gamma)$ $(\gamma > -1)$, est uniformément sommable (C, γ) sur tout arc fermé du cercle $|z| = 1$ où la fonction $f(z)$ est regulière.

[24]) Hobson [1].

23. La démonstration du théorème 13 se compose d'une suite de remarques.

a) Si une série de la forme

$$(40)\qquad w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^{(0)} + a_n^{(1)} x + \ldots + a_n^{(k)} x^k)$$

(où les nombres a ne dépendent pas de x) est sommable M dans un intervalle $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, alors chacune des séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ est sommable M.

Pour la démonstration, il suffit de remarquer que la p-ième différence de la fonction x^i $(i = 1, 2, \ldots)$ est constante et différente de zéro pour $p = i$ et égale à zéro pour $p > i$.

b) Posons

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_n(x), \quad a_n \sin nx - b_n \cos nx = B_n(x).$$

Si une série $\sum_1^{\infty} A_n(x)$ est uniformément sommable P dans un intervalle (α, β), la série $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} B_n(x)$ y est aussi uniformément sommable P.

Supposons, pour plus de simplicité, que l'intervalle (α, β) contient à l'intérieur le point $x = 0$.

De nos hypothèses il résulte immédiatement la sommabilité uniforme P de la série

$$(41)\qquad \sum_1^{\infty} \left(\frac{B_n(x)}{n} - \frac{B_n(0)}{n}\right);$$

il ne nous reste donc qu'à démontrer la sommabilité P de la série $\sum \frac{B_n(0)}{n}$. A cet effet prenons un nombre naturel, pair $k > \gamma$. En intégrant la série (41) k fois, nous obtenons une série uniformément sommable P dans (α, β) et se présentant comme la somme de la série absolument convergente

$$\sum \pm \frac{B_n(x)}{n^{k+1}}$$

et d'une série de la forme (40), où $a_n^{(k)} = -B_n(0)/k!\,n$. Cette dernière série est sommable P et il suffit de s'appuyer sur a).

c) La sommabilité P de la série $\sum_1^\infty \frac{u_n}{n}$ résulte celle de la série $\sum_1^\infty u_n$.

En effet, en posant

$$\sum_1^\infty u_n r_*^{n-1} = \psi(r),$$

on a

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{u_n}{n} r^n = \int_0^r \psi(t)\,dt \longrightarrow \int_0^1 \psi(t)\,dt.$$

d) Pour démontrer le théorème 13, il suffit de prouver que de la sommabilité uniforme P de la série (36) résulte celle de la série

$$\sum a_n \cos nz. \tag{42}$$

En effet, d'après b) on en déduit la sommabilité uniforme des séries

$$\sum a_n \cos nz,\ \sum a_n \frac{\sin nz}{n},\ \sum a_n \frac{\cos nz}{n^2},\ \sum a_n \frac{\sin nz}{n^3}, \ldots$$

Chacune de ces séries possède des coefficients $o(n^\gamma)$, donc, d'après la proposition (A), est uniformément sommable (C,γ) dans $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$. En vertu des formules (39 a) où (39 b), il en résulte que la série (36) y est aussi uniformément sommable (C,γ).

e) Prenons un nombre naturel $k>\gamma$ et, pour fixer les idées, supposons k pair. En vertu de c), la série à termes $a_n n^{-k} v_n$ est aussi sommable P, donc, d'après la formule (39 a), la série

$$\sum \frac{a_n}{n^k} \cos nz, \text{ donc aussi } \sum \frac{a_n}{n^{k+1}} \sin nz \tag{43}$$

est sommable P.

Nous considérons maintenant la série $\sum a_n v_n^{(1)}$ (sommable P), où

$$v_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nz \cdot \left\{1 + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots + \frac{\alpha_{k-2}}{n^{k-2}}\right\} + \sin nz \cdot \left\{\frac{\beta_1}{n} + \ldots \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}}\right\}.$$

Divisons le n-ième terme de cette série par n^{k-2}. En vertu de c) et de la sommabilité P des séries (43), nous obtenons la sommabilité P des séries

$$\sum \frac{a_n}{n^{k-2}} \cos nz, \qquad \sum \frac{a_n}{n^{k-1}} \sin nz.$$

Il en résulte la sommabilité P de la série $\sum a_n v_n^{(2)}$, où

$$v_n^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nz \cdot \left\{1 + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots + \frac{\alpha_{n-4}}{n^{k-4}}\right\} + \sin nz \cdot \left\{\frac{\beta_1}{n} + \ldots + \frac{\beta_{k-3}}{n^{k-3}}\right\}.$$

En répétant ce raisonnement nous aboutirons à la sommabilité de la série (42), c. q. f. d.

Remarque. Il est évident qu'on peut remplacer, dans le théorème 13, l'intervalle $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$ par $(0, \beta-\varepsilon)$ si $\alpha=0$, et par $(\alpha+\varepsilon, \pi)$ si $\beta=\pi$.

§ 6.

24. L'idée principale introduite par Riemann dans la théorie des s. t.

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (A_n \cos nx + B_n \sin nx), \quad \sqrt{A_n^2+B_n^2} \longrightarrow 0 \tag{44}$$

consistait dans l'étude de la dépendance de la série (44) et de la fonction $F(x)$ obtenue par la double intégration formelle de la série (44):

$$F(x) = \frac{A_0 x^2}{2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{A_n \cos nx + B_n \sin nx}{n^2}. \tag{45}$$

Riemann a prouvé[25]) que la façon dont se comporte la série (45) dans un point $x=x_0$ ne dépend que des propriétés de $F(x)$ dans le voisinage $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ de ce point, quelque petit que soit $\varepsilon>0$.

Nous allons démontrer les propositions analogues pour les s. S. L.

$$\sum_{n=0}^\infty a_n v_n(z). \tag{46}$$

La fonction

$$\Phi(z) = -\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{\lambda_n} v_n(z) \tag{47}$$

joue un rôle analogue à celui de la fonction $F(x)$.[26])

[25]) Riemann [1]. Cf. aussi le Chap. I, 12 de ce travail.

[26]) Nous pouvons supposer qu'aucun de nombres caractéristiques λ_i du problème (1′) (2′) n'est égal à zéro. La fonction $\Phi(z)$ a été utilisée par M. Haar ([1$_2$]) dans l'étude des questions d'unicité pour les s. S. L. Remarquons encore que $\lambda_n = [n + O(1/n)]^2$.

25. Théorème 14. Si les fonctions $\Phi^*(z)$ et $\Phi^{**}(z)$, correspondant à deux s. S. L. à coefficients tendant vers zéro, sont égales dans un intervalle (α,β) $(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant\pi)$, les deux s. S. L. considérées sont uniformément équiconvergentes dans $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$. Si $\alpha=0$ (resp. $\beta=\pi$), ce dernièr intervalle peut être remplacé par $(0,\beta-\varepsilon)$ (resp. $(\alpha+\varepsilon,\pi)$).

Démonstration. Soit (46) la différence des deux s. S. L. en question. La fonction Φ définie par (47) est, par hypothèse, égale à 0 dans (α,β). Nous avons à démontrer que la série (46) converge uniformément vers zéro dans $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$. Supposons qu'une série (44) est uniformément équiconvergente avec (46) dans $(0,\pi)$ (Cf. le lemme ε). Nous allons étudier la dépendance mutuelle des fonctions F et Φ définies par les égalités (45) et (47). On a

$$(48)\qquad \sum_{n=0}^{N} a_n v_n(z)-\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(A_n\cos nz+B_n\sin nz)\right]\longrightarrow 0$$

$$\int_0^z du\int_0^u\left\{\sum_{n=1}^{N} a_n v_n(t)-\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(A_n\cos nt+B_n\sin nt)\right]\right\}dt\longrightarrow 0.$$

Mais

$$\int_0^z du\int_0^u v_n(t)\,dt=-\frac{1}{\lambda_n}\int_0^z du\int_0^u [v_n''+Q v_n]\,dt$$

$$(49)\qquad =-\frac{1}{\lambda_n}\int_0^z [v_n'(u)-v_n'(0)]\,du-\frac{1}{\lambda_n}\int_0^z du\int_0^u Q v_n\,dt$$

$$=-\frac{1}{\lambda_n}[v_n(z)-v_n(0)-v_n'(0)\,.\,z]-\frac{1}{\lambda_n}\int_0^z du\int_0^u Q v_n\,dt.$$

$$(50)\qquad \int_0^z du\int_0^u\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(A_n\cos nt+B_n\sin nt)\right]dt$$

$$=\frac{A_0 z^2}{4}-\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n\cos nz+B_n\sin nz}{n^2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n}{n^2}+z\sum_{n=1}^{N}\frac{B_n}{n}.$$

La relation (48), grâce à (49), (50) et à la condition (2′), peut être mise dans la forme

$$\int_0^z du\int_0^u Q\,.\left(-\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{\lambda_n}v_n(t)\right)dt+\left(-\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{\lambda_n}v_n(z)\right)$$
$$+\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{v_n(0)}{\lambda_n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n}{n^2}\right)+z\left(h\sum_{n=0}^{N}\frac{v_n(0)}{\lambda_n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{B_n}{n}\right)$$
$$=\frac{A_0}{4}z^2-\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n\cos nz+B_n\sin nz}{n^2}+o(1).$$

Il en résulte que le coefficient de z dans le membre gauche tend vers une limite finie pour $N\longrightarrow\infty$. En faisant ce passage à la limite, nous avons

$$(51)\qquad Az+B+\Phi(z)+\int_0^z du\int_0^u \Phi(t)\,Q(t)\,dt=F(z),\quad (0\leqslant z\leqslant\pi)$$

A et B désignant des constantes.

D'après l'hypothèse, la fonction Φ est égale à zéro dans (α,β). De la formule (51) il résulte que la fonction $F(z)$ y est linéaire, donc, d'après le théorème mentionné de Riemann, la série (44) converge uniformément vers zéro dans $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$. Il en est de même de la série équiconvergente (46). Si, par exemple, $\alpha=0$, ce résultat nous donne que la série (46) converge vers zéro pour $0<z<\beta$, donc, d'après les théorèmes 7 et 10, elle converge uniformément dans $(0,\beta-\varepsilon)$. c. q. f. d.

25. Le théorème analogue a lieu pour les séries (46) si les coefficients a_n sont $o(n^\gamma)$ $(\gamma>-1)$, mais il faut alors considérer, au lieu de (47), les fonctions plus générales, à savoir

$$(52)\qquad \Phi_k(z)=(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n v_n(z)}{\lambda_n^k},$$

où le nombre entier k est tel que $2k>\gamma+1$. La série (52) converge alors absolument et uniformément.

Théorème 15. Si deux s. S. L. à coefficients $o(n^\gamma)$ $(\gamma>-1)$ possèdent dans un intervalle (α,β) $(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant\pi)$ leurs fonctions Φ_k égales, ces séries sont uniformément équisommables (C,γ) dans $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$. Si $\alpha=0$, resp. $\beta=\pi$, on peut remplacer ce dernier intervalle par $(0,\ \beta-\varepsilon)$, resp. $(\alpha+\varepsilon,\ \pi)$.

Ce théorème général étant peu intéressant, nous nous bornons à esquisser la démonstration dans le cas de $k=2$ (c'est à dire: $\gamma<3$).

Soit

$$\Gamma(z,\xi,r)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(z)\,.\,v_n(\xi)\,.\,r^n\qquad(0\leqslant\xi,z\leqslant\pi;\ 0\leqslant r<1).$$

Nous avons déjà utilisé le fait que, pour $|\xi-z|\geqslant\varepsilon$, $0\leqslant z\leqslant\pi$, on a uniformément

$$(53)\qquad \lim_{r\to 1}\Gamma(z,\xi,r)=0.$$

Des formules (39a) et (39b) il résulte (en supposant que la fonction Q dans l'équation (1′) est suffisamment régulière) que, pour $|\xi-z|\geqslant\varepsilon$, il existe aussi la limite uniforme (pour $r\to 1$) de l'expression

(54) $$\frac{d^\nu}{dz^\nu}\Gamma(z,\xi,r)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n^{(\nu)}(z)\,v_n(\xi)\,r^n \qquad (\nu=1,2,\ldots,\mu)$$

c'est à dire que la série $\sum v_n^{(\nu)}(z)\,v_n(\xi)$ est uniformément sommable par le procédé de Poisson.[27]) En vertu de (53), la limite de l'expression (54) doit être égale à zéro.

Soit maintenant (46) la différence des deux s. S. L. mentionnées dans l'énoncé du théorème. La fonction Φ_2 correspondant á cette série s'évanouit dans (α,β). En vertu des remarques sur la limite des expressions $\Gamma(z,\xi,r)$ et $\Gamma^{(\nu)}(z,\xi,r)$, on a uniformément dans $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$

(55) $$\sum\frac{a_n v_n}{\lambda_n^2}=0;\quad \sum\frac{a_n v_n'}{\lambda_n^2}=0;\quad \sum\frac{a_n v_n''}{\lambda_n^2}=0;\quad \sum\frac{a_n v_n'''}{\lambda_n^2}=0;\quad \sum\frac{a_n v_n^{(\mathrm{IV})}}{\lambda_n^2}=0,$$

les séries du membre gauche étant sommables par le procédé de Poisson. De la troisième et de la première égalité il résulte (en tenant compte de (1')) que

(56) $$\sum\frac{a_n v_n}{\lambda_n}=0.$$

La quatrième égalité dans (55) peut être écrite comme

$$\sum a_n\frac{[(Q+\lambda_n)v_n]'}{\lambda_n^2}=0.$$

Il en résulte, en vertu de (55) et (56), que

(57) $$\sum\frac{a_n v_n'}{\lambda_n}=0.$$

La cinquième égalité (55) peut être écrite dans la forme

$$\sum a_n\frac{[(Q+\lambda_n).v_n]''}{\lambda_n^2}=0$$

$$\sum a_n\frac{(Q''+\lambda_n)v_n}{\lambda_n^2}+2\sum a_n\frac{(Q'+\lambda_n)v_n'}{\lambda_n^2}+\sum a_n\frac{(Q+\lambda_n)v_n''}{\lambda_n^2}=0.$$

On en déduit, d'après (55), (56), (57), que

$$\sum a_n\frac{(Q+\lambda_n)v_n''}{\lambda_n^2}=-\sum a_n\frac{(Q+\lambda_n)^2 v_n}{\lambda_n^2}=0,$$

donc, en vertu de (55) et (56),

$$(P)\qquad \sum a_n v_n=0.$$

Cette égalité a lieu uniformément dans $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$. Maintenant il suffit de s'appuyer sur le théorème 13. Si $-1<\gamma<0$, on peut se servir du théorème 12.

[27]) Par exemple, pour $\nu=2$, la série du membre droit dans (54) peut être écrite dans la forme

$$\sum(Q+\lambda_n)v_n(z)\,v_n(\xi),$$

et il suffit de démontrer la sommabilite P (pour $z\neq\xi$) de la série

$$\sum\lambda_n v_n(z)\,v_n(\xi).$$

Cette sommabilité résulte de la formule (39 a) (pour $k=2$) et de l'évaluation asymptotique des λ_n:

$$\lambda_n^{\frac12}=n+\gamma_1/n+O(n^{-3}) \qquad (\gamma_1=\text{const.}).$$

Remarquons que, si la fonction Q dans (1') possède des dérivées d'ordre suffisamment élevé, on a

$$\lambda_n^{\frac12}=n+\gamma_1/n+\gamma_3/n^3+\ldots+\gamma_{2k-1}/n^{2k-1}+O(n^{-2k-1}).$$

Chapitre III.

Polynômes de Legendre.

§ 1.

1. Ce nom portent les polynômes définis par l'égalité

(1) $$(1-2xz+z^2)^{-\frac12}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,z^n.$$

On sait que

$$\int_{-1}^{+1}P_m P_n\,dx=0 \qquad (m\neq n)$$

$$=\frac{2}{2n+1} \qquad (m=n),$$

c'est a dire que les fonctions $\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ forment un système orthogonal et normal dans $(-1,1)$.

On a

$$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x);\quad |P_n(x)|\leqslant 1;\quad P_n(1)=1.$$

En posant $x=\cos\theta$ $(0<\theta<\pi)$, nous avons la formule suivante[1]):

(2) $$P_n(\cos\theta)=\frac{4}{\pi.A_n^{(\frac12)}}\cdot\left\{\frac{\cos(n\theta+\frac12\alpha)}{\sqrt{2\sin\theta}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2.(2n+3)}\cdot\frac{\cos(n\theta+\frac32\alpha)}{(\sqrt{2\sin\theta})^3}+r_n(\theta)\right\}\quad\left(\alpha=\theta-\frac{\pi}{2}\right),$$

où $r_n(\theta)=O(n^{-2})$, le symbole O ayant lieu uniformément dans tout intervalle $(\varepsilon,\pi-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ et $A_n^{(\alpha)}$ désignant le coefficient de Cesàro:

$$A_n^{(\alpha)}=\frac{(\alpha+1)\ (\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}\sim\frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

En particulier $A_n^{(\frac12)}\sim\frac{2n^{\frac12}}{\sqrt{\pi}}$. La formule (2) est le cas très spécial du développement général

[1]) Pour la démonstration de cette formule, ainsi que de la formule (2'), plus générale, voir Stieltjes [1]. Dans les raisonnements qui vont suivre on peut se servir aussi d'autres formules asymptotiques pour P_n, par exemple de celle donnée par Darboux (voir Darboux [1]).

$$(2')\quad P_n(\cos\theta)=\frac{4}{\pi\,.\,A_n^{(\frac{1}{2})}}\left[\frac{\cos\left(n\theta+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2\sin\theta}}+\frac{1^2}{2\,(2n+3)}\cdot\frac{\cos\left(n\theta+\frac{3}{2}\alpha\right)}{\sqrt{(2\sin\theta)^3}}\right.$$
$$\left.+\frac{1^2\,.\,3^2}{2\,.\,4\,.\,(2n+3)\;(2n+5)}\cdot\frac{\cos\left(n\theta+\frac{5}{2}\alpha\right)}{\sqrt{(2\sin\theta)^5}}+\ldots\right]\quad\left(\alpha=\theta-\frac{\pi}{2}\right).$$

La série du membre droit converge pour $\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{5}{6}\pi$. Elle diverge dans les autres points de l'intervalle $(0,\pi)$. Toutefois, si l'on ne considère que les p premiers termes de la série (2'), l'erreur commise est plus petite qu'une constante multipliée par le premier terme negligé dans lequel on a remplacé le cosinus du numérateur par 1. Cette erreur est donc $O\left(n^{-p-\frac{1}{2}}\sin^{-p-\frac{1}{2}}\theta\right)$. Dans les cas les plus intéressants la formule (2) nous suffit complètement.

2. Nous appelons série de Legendre (ou bref: s. L.) toute série de la forme

$$(3)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}a_n P_n(x)$$

où les coeficients a_n ne dépendent pas de x. Si ces coefficients sont donnés par la formule

$$(4)\qquad a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}f(t)\,P_n(t)\,dt,$$

c'est à dire si cette série est le développement de Fourier de $f(x)$ suivant les polynômes P_n, nous la désignerons par $\mathfrak{S}_L[f]$.

E étant un ensemble arbitraire situé dans l'intervalle $-1\leqslant x\leqslant 1$, nous désignerons par E^* l'ensemble de points de l'intervalle $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ obtenu de E par la transformation $x=\cos\theta$.

L'ensemble E situé dans $(-1,1)$ sera dit d'unicité du type U (resp. U') si toute série (2), convergente dans CE vers zéro (resp. vers une fonction $f(x)$ finie et intégrable), possède tous ses coefficients nuls (resp. est $\mathfrak{S}_L[f]$). Comme il est évident que tous les ensembles du type U ou U' (mesurables) sont de mesure nulle, il résulte de la convergence de la série (3) dans CE et de la formule (2) que $a_n=o(\sqrt{n})$.

Les définitions des ensembles U_M et U'_M (c'est-à-dire des ensembles d'unicité pour un procédé de sommation M) sont tout-

à-fait analogues à celles de U et U'; il faut y ajouter seulement l'hypothèse que $a_n=o(\sqrt{n})$.

Le plus souvent il nous sera commode d'écrire la série (3) sous la forme

$$(3\,a)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}a_n P_n(\cos\theta)\qquad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

Pour cette raison, si E est un U (resp. U'), il nous sera commode d'appeler U (resp. U') l'ensemble E^* situé dans $(0,\pi)$ et obtenu de E par la transformation $x=\cos\theta$. Pour éviter tout malentendu nous pourvoirrons d'un astérisque la dénomination de tout ensemble situé dans $(0,\pi)$.

Théoréme 1. Si E^* est un U_M pour les s. t., il l'est aussi pour les s. L.

Théorème 2. Si E^* est un U'_M pour les s. t., il l'est aussi pour les s. L.

Les théorèmes réciproques sont aussi vrais mais il nous sera plus commode de remettre leur démonstrations à la troisième partie de ce travail. Toutes ces propositions nous montrent que les ensembles d'unicité pour les s. t. et pour les s. L. sont les mêmes. Pour fixer les idées nous donnons les démonstrations seulement pour la convergence ordinaire mais les théorèmes subsistent pour un quelconque des procédés M considérés dans le Chap. I, 5b. Les démonstrations restent les mêmes, étant même un peu plus simples pour certains procédés (tels que $(C,1)$ ou P) qui nous permettent de sommer $\mathfrak{S}[f]$ pour f continue. Nous nous bornons d'abord aux fonctions intégrables L.

3. Les démonstrations des théorèmes 1 et 2 s'appuyent sur deux lemmes.

Lemme ζ. Étant donnée une série (3) à coefficients $o(\sqrt{n})$, supposons que

$$(5)\qquad \sum_{n=0}^{x}a_n\int_0^x P_n(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt,$$

où f est une fonction intégrable et la série du membre gauche converge uniformément[2]) dans tout intervalle $(-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$. La série (3) est alors $\mathfrak{S}_L[f]$.[3])

[2]) L'hypothèse que la convergence est uniforme n'est pas essentielle, mais elle simplifie légèrement la démonstration.

[3]) La proposition subsiste — à plus forte raison — si la série (3) converge uniformément vers f dans tout intervalle $(-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$.

Ce lemme (qui est d'ailleurs assez trivial) montre que les séries (3) qui, intégrées, convergent vers une fonction absolument continue, sont celles de Fourier.

Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que

$$\int_{-1}^{+1} f\,dt = 0. \tag{6}$$

En intégrant l'égalité connue

$$(2n+1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{7}$$

et en posant

$$P_n^*(x) = P_n(x) - P_n(0) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

nous avons

$$\int_0^x P_n(t)\,dt = \frac{1}{2n+1}[P_{n+1}^*(x) - P_{n-1}^*(x)] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

L'égalité (5) peut être donc écrite sous la forme

$$\int_0^x f(t)\,dt = a_0 P_1^* + \frac{a_1}{3}(P_2^* - P_0^*) + \frac{a_2}{5}(P_3^* - P_1^*) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_{k-1}}{2k-1} - \frac{a_{k+1}}{2k+3}\right)P_k^*. \tag{8}$$

Désignons par $b_k (= o(k^{-1/2}))$ $(k = 1, 2, \ldots)$ le coefficient de P_k^* dans la dernière série. Cette série, qui converge uniformément dans $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$, peut être considérée comme la différence des deux séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k P_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k P_k(0) \qquad \left(b_k = \frac{a_{k-1}}{2k-1} - \frac{a_{k+1}}{2k+3}\right). \tag{9}$$

La seconde série converge[4]); désignons par s sa somme et posons

$$\sigma = \int_{-1}^{0} f\,dt.$$

[4]) Pour le voir, il suffit d'intégrer encore une fois la série $\sum b_k P_k^*$ dans l'intervalle $(0, x)$. On obtient alors la série convergente de la forme $\sum (c_k P_k^* + b_k P_k(0)x)$, où les c_k sont formés des b_k de la même façon que les b_k des a_k. Comme $c_k = o(k^{-3/2})$, la série à termes $c_k P_k^*$ converge, d'où résulte notre proposition.

Nous pouvons alors écrire, en désignant par $F(x)$ l'intégrale de f dans l'intervalle $(-1, x)$,

$$(\sigma - s)P_0 + \left(a_0 - \frac{a_2}{5}\right)P_1 + \ldots + \left(\frac{a_{n-1}}{2n-1} - \frac{a_{n+}}{2n+3}\right)P_n + \ldots = \int_{-1}^{x} f\,dt = F(x). \tag{10}$$

D'après le théorème de Fischer-Riesz[5]) la série du membre gauche est une $\mathfrak{S}_L[F]$, en posant donc

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(t)\,P_n\,dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

en intégrant par parties et en tenant compte du fait que $F(-1) = F(1) = 0$, nous avons (cf. la formule (7)) que

$$\frac{a_{n-1}}{2n-1} - \frac{a_{n+1}}{2n+3} = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} F(t)\,P_n(t)\,dt \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F(t)\,(P'_{n+1} - P'_{n-1})\,dt = \frac{A_{n-1}}{2n-1} - \frac{A_{n+1}}{2n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\sigma - s = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F\,dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} t f\,dt = -\frac{A_1}{3}. \tag{13}$$

Donc

$$\sigma - s = -\frac{A_1}{3};\ a_0 - \frac{a_2}{5} = A_0 - \frac{A_2}{5};\ \frac{a_1}{3} - \frac{a_3}{7} = \frac{A_1}{3} - \frac{A_3}{7} \ldots; \tag{14}$$

Il en résulte pour n pair que

$$a_0 - \frac{a_n}{2n+1} = A_0 - \frac{A_n}{2n+1}. \tag{15}$$

En tenant compte de l'ordre de grandeur de a_n et A_n[6]) on obtient, pour $n \to \infty$, que $a_0 = A_0$, donc $a_n = A_n$ (n pair). Le même raisonnement nous donne pour n impair

[5]) En intégrant encore une fois on pourrait se passer du théorème de Riesz-Fischer.

[6]) Nous nous appuyons ici sur le fait, facile à démontrer, que $A_n = o(n)$ (Cf. p. ex. Chap. VI). Cependant on peut se passer de cette proposition. Cf. le Chap III, 8 où nous considérons le cas de l'intégrale D, pour laquelle l'égalité $A_n = o(n)$ n'est pas vraie en général.

$$\sigma - s + \frac{a_1}{3} - \frac{a_n}{2n+1} = -\frac{A_n}{2n+1}, \tag{16}$$

ce qui nous donne $a_n = A_n$ $(n = 3, 5, 7, \ldots)$ et

$$\sigma - s + \frac{a_1}{3} = 0. \tag{17}$$

Des relations (8) et (17) il résulte que $a_1 = A_1$. Le lemme est donc démontré.

4. Remarque. Pour les considérations ultérieures il nous sera commode de généraliser un peu le lemme que nous venons de démontrer et, en particulier, de nous débarasser des conditions trop restrictives concernant l'ordre de grandeur des a_n. Cette généralisation s'obtient facilement des raisonnements précédents. A cet effet remarquons d'abord que dans la démonstration du lemme ζ on peut remplacer l'hypothèse de convergence de la série (5) par celle de sommabilité P ou $(C, 1)$. La formule (8) subsiste, car, comme il résulte de la transformation d'Abel, les deux séries en question sont uniformément équiconvergentes dans tout $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$, pourvu que $a_n = o\left(n^{\frac{3}{2}}\right)$ [7]). Il en résulte que la différence (9), où $b_n = o\left(\sqrt{n}\right)$, est uniformément sommable P dans $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$. On en déduit la sommabilité de la première des séries (9) et, en conservant les notations précedentes, nous avons la formule 10) où la série du membre gauche est uniformément sommable P dans $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$. Maintenant on peut appliquer le lemme ζ et on obtient que la série (10) est $\mathfrak{S}_L[F]$. Si l'on suppose d'abord que $a_n = o(n)$, le raisonnement dans la démonstration du lemme ζ subsiste et on a $a_n = A_n$.

Si l'on conserve cependant l'hypothèse précedente (plus générale) que $a_n = o(n^{3/2})$, il résulte des formules (14) et du fait que $A_n = o(n)$ que le quotient $\frac{a_n}{2n+1}$ (n-pair) tend vers une limite que nous pouvons désigner par $\frac{C}{2}$. Il en résulte donc que

$$a_n = (2n+1)\frac{C}{2} + A_n. \qquad (n = 0, 2, 4, \ldots).$$

De même nous avons que

$$a_n = (2n+1)\frac{C_1}{2} + A_n, \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots),$$

C_1 désignant aussi une constante. En résumant: si $a_n = o(n^{3/2})$ la série considéreé (3) diffère de $\mathfrak{S}_L[f]$ par une série de la forme

$$C \cdot \frac{1}{2} P_0 + C_1 \cdot \frac{3}{2} P_1 + C \cdot \frac{5}{2} P_2 + C_1 \cdot \frac{7}{2} P_3 + \ldots, \tag{18}$$

C et C_1 désignant des constantes.

Il est facile de voir que la série (18) est uniformément sommable P $\left(\text{ou, même, } (C, k)\ \left(k > \frac{1}{2}\right)\right)$ vers zéro dans $(-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$ quelles que soient les constantes C, C_1. En effet, prenons $C = C_1 = 1$; nous obtenons alors la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right) P_n(x), \tag{19}$$

dont la sommabilité P vers zéro à l'intérieur de $(-1, 1)$ résulte immédiatement de la formule (cf. (1)):

[7]) Nous nous servons de l'inégalité $P_n(x) = O(n^{-\frac{1}{2}})$, $(-1 < x < 1)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right) P_n(x)\, r^n = \frac{1-r^2}{(1-2xr+r^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{20}$$

Maintenant il suffit de remarquer que la série (18) est une combinaison linéaire des parties paire et impaire de la série (19), qui, toutes deux, représentent zéro, sauf pour $x = \pm 1$.

Remarquons encore que la série (19) est un cas particulier (pour $\xi = 1$) d'une série plus générale

$$K(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\xi) P_n(x), \qquad (-1 \leqslant \xi \leqslant 1) \tag{21}$$

qui, comme on sait, est uniformément sommable vers zéro sauf dans le voisinage du point $x = \xi$ et qui joue le même rôle que la série

$$\frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} \cos n(x - \xi)$$

dans la théorie des séries trigonométriques.

5. Lemme η. Soit $\varphi(\theta)$ une fonction continue avec quelques unes de ses dérivées à l'intérieur de $(0, \pi)$. Alors, pour toute série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta) \cdot \varphi(\theta) \qquad (a_n = o(n^{\frac{1}{2}})) \tag{22}$$

et pour tout $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, il existe une s. t.

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \qquad \left(\sqrt{A_n^2 + B_n^2} = o(1)\right) \tag{23}$$

uniformément équiconvergente avec (22) dans $(\delta, \pi - \delta)$.

Remarque. Dans la démonstration du théorème 2 il suffit de s'appuyer sur un lemme moins général, mais un peu plus facile à démontrer, notamment, que les séries (22) et (23) sont uniformément équiconvergentes au sens large dans $(\delta, \pi - \delta)$.

Nous ne nous y arrêtons pas (cf. la situation analogue pour les s. S. L.).

6. Démonstration du lemme. En nous appuyant sur la formule (2) nous pouvons écrire:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta)\,\varphi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widetilde{P}_n(\cos\theta) \cdot \varphi(\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\theta), \tag{24}$$

où $\widetilde{P}_n(\cos\theta)$ désigne la somme des deux premiers termes du membre droit dans la formule (2) et la série à termes $R_n(\theta)$ converge absolument et uniformément dans $(\delta, \pi - \delta)$ vers une fonction $R(\theta)$, qui y est continue. En laissant, à l'instant, de côté les proprietés de la fonction $R(\theta)$, occupons nous de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \widetilde{P}_n(\cos\theta)\,\varphi(\theta). \tag{25}$$

D'après (2), la série (25) peut être traitée comme la somme de 4 séries:

$$(26)\qquad g_1(\theta)\sum \alpha_n \cos n\theta\,,\quad g_2(\theta)\sum \alpha_n \sin n\theta\,,$$

$$g_3(\theta)\sum \frac{\alpha_n}{2(2n+3)}\cos n\theta\,,\quad g_4(\theta)\sum \frac{\alpha_n}{2(2n+3)}\sin n\theta\,,$$

où $\alpha_n = 4a_n/A_n^{(\frac{1}{2})} \longrightarrow 0$ et les fonctions g_i $(i=1,2,3,4)$ peuvent être écrites facilement. Ces fonctions se comportent régulièrement dans $(\delta, \pi-\delta)$. Désignons par $\lambda_i(\theta)$ $(i=1,2,3,4)$ des fonctions de période 2π, suffisamment régulières et égales respectivement à $g_i(\theta)$ dans $(\delta, \pi-\delta)$. D'après la proposition (R_3) (Chap. I, 8), chacune des séries (26) est uniformément équiconvergente dans $(\delta, \pi-\delta)$ avec le produit formel correspondant (l'un des facteurs dans ce produit est $\mathfrak{S}[\lambda_i]$).

Nous avons ainsi prouvé l'équiconvergence (au sens large) de la série (22) et d'une s. t.

Pour achever la démonstration du lemme il suffit de prouver qu'il existe une fonction $R^*(\theta)$, continue et de période 2π, coïncidant avec $R(\theta)$ dans $(\delta, \pi-\delta)$, et telle que $\mathfrak{S}[R^*]$ converge uniformément.

A cet effet il suffit de prouver que la fonction $R(\theta)$ vérifie dans $(\delta, \pi-\delta)$ la condition de Lipschitz avec un exposant positif. Ceci résulte du fait suivant: on a (cf. (2))

$$r_n(\theta) = \frac{\varrho_n(\theta)}{n^2}\,,$$

où $|\varrho_n(\theta)| \leqslant M$ $(M = M(\delta))$, et aussi

$$(27)\qquad |\varrho_n'(\theta)| \leqslant M_1 n \qquad (M_1 = M(\delta))\,.$$

Cette dernière inégalité est connue [8]). Elle peut être obtenue de la comparaison des deux formules pour $P_n'(\cos\theta)$, dont la première nous donne l'expression asymptotique pour $P_n'(\cos\theta)$ (semblable à la formule (2) pour $P_n(\cos\theta)$) et peut être obtenue, par exemple, par la methode de Stieltjes ou de Darboux et dont la seconde s'obtient par la différentiation de la formule (2). La démonstration du fait que R vérifie la condition de Lipschitz d'ordre positif reste la même que pour les s. S. L. (Cf. le Chap. II, 9).

[8]) Cf. par ex. G. Darboux [1], p. 53, où elle est démontrée pour les polynômes de Jacobi, plus généraux que ceux de Legendre.

6. Passons maintenant à la démonstration des théorèmes annoncés et bornons nous au théorème 2 (la démonstration du théorème 1 étant presque la même). Considérons une série (3) convergente dans CE vers une fonction $f(x)$ finie et intégrable dans $(-1,1)$, E^* étant un ensemble U' pour les s. t. (rappelons encore une fois que $E \subset (-1,1)$ et que $E^* \subset (0,\pi)$). Pour la démonstration du théorème 2 il suffit de prouver que la série (3) vérifie les prémisses du lemme ζ. A cet effet remarquons d'abord que la fonction $f(\cos\theta)\sin\theta$ est intégrable dans $(0,\pi)$. En écrivant la série (3) sous la forme (3a), en la multipliant par $\sin\theta$, en remplaçant la série obtenue (en vertu du lemme η) par une série (23) uniformément équiconvergente dans $(\delta, \pi-\delta)$, nous pouvons appliquer le lemme β. Ce lemme nous prouve que la série (23), donc aussi (22), peut être intégrée dans $(\delta, \pi-\delta)$ terme à terme. En revenant à la série (3), nous voyons qu'on a l'égalité (5) uniformément dans $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$; ε étant arbitraire, le théorème 2 est démontré.

7. La définition des ensemble d'unicité U'' est évidente: un ensemble E situé dans $(-1,1)$ est un U'', si toute s. L. convergente (ou sommable M, si l'on veut définir U_M'') dans CE vers une fonction finie $f(x)$, qui est majorante pour une fonction intégrable $\varphi(x)$ (c'est-à-dire que $f \geqslant \varphi$), est $\mathfrak{S}_L[f]$.

Théorème 3. Si E^* est un U_M'' pour les s. t., il l'est aussi pour les s. L.

Démonstration. Bornons nous de nouveau au cas de convergence. Si une s. t. à coefficients tendant vers zéro converge dans tous les points d'un intervalle (a,b), n'appartenant pas à un ensemble du type U'', vers une fonction f finie et $\geqslant \varphi$ (φ intégrable), alors f est intégrable dans $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ et cette série est uniformément équiconvergente dans $(a+2\varepsilon, b-2\varepsilon)$ avec $\mathfrak{S}[f^*]$, f^* étant égale à f dans $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ et à zéro ailleurs (mod 2π).

En particulier, la série considérée peut être intégrée terme à terme à l'intérieur de (a,b). En répétant donc, sans aucune modification, la démonstration du théorème 2, on voit que, si une s. L. (3) converge dans CE — où E^* est un U'' pour les s. t. — vers une fonction $f \geqslant \varphi$ (f finie, φ intégrable), on a l'égalité (10), la série du membre gauche convergeant uniformément dans tout intervalle $(-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$. Il nous suffit de démontrer que f est

intégrable dans $(-1,1)$. En effet, dans le cas contraire, pour x tendant vers une des extremités de l'intervalle $(-1,1)$, p. ex. pour $x\to 1$, on aurait

$$\lim_{x\to 1-0}\int_0^x f(t)\,dt=+\infty. \tag{28}$$

Pour démontrer l'impossibilité de (28) remarquons que l'égalité (5) entraîne (8). Du théorème de Fischer-Riesz il résulte que la série (9) est celle de Fourier de la fonction $g=\int_0^x f\,dt$, continue à l'intérieur de $(-1,1)$ et même (dans le sens généralisé) pour $x=1$, où elle admet la valeur $+\infty$.

La série (8) sommée, pour $x=1$, par le procéde de Poisson possède une somme égale à

$$\lim_{r\to 1}\int_{-1}^{+1} g(t)\,L(r,t)\,dt, \quad \text{où } L(r,t)=\frac{1-r^2}{(1-2rt+r^2)^{3/2}}\geqslant 0, \tag{29}$$

(cf. (20)). La formule (20) nous donne, pour $0\leqslant r<1$,

$$\int_{-1}^{+1} L(r,t)\,dt=1, \quad \text{donc } \lim_{r\to 1}\int_{-\varepsilon}^{1} L(r,t)\,dt=1,$$

car $L(r,t)\to 0$, uniformément pour $-1\leqslant t\leqslant 1-\varepsilon$. On a donc

$$\int_{-1}^{+1} g(t)\,L(r,t)\,dt=\int_{-1}^{1-\varepsilon}+\int_{1-\varepsilon}^{1},$$

$$\left|\int_{-1}^{1-\varepsilon}\right|\leqslant \operatorname*{Max}_{-1\leqq t\leqq 1-\varepsilon} L(r,t)\int_{-1}^{+1}|g(t)|\,dt\to 0,$$

$$\int_{1-\varepsilon}^{1}\geqslant \operatorname*{Min}_{1-\varepsilon\leqq t\leqq 1} g(t)\int_{1-\varepsilon}^{1} L(r,t)\,dt\to \operatorname*{Min}_{1-\varepsilon\leqq t\leqq 1} g(t).$$

Comme $g(x)\to+\infty$, pour $x\to 1-0$, on en déduit que l'expression (29) est égale à $+\infty$.

La série (9) pour $x=1$ est donc sommable P vers $+\infty$. Nous avons ici abouti à une contradiction car, du fait que $P_n(1)=1$

et de la définition des b_k il résulte que la série (9) converge pour $x=1$ vers une somme finie.

La considération des limites d'indétermination ne demande aucune modification des raisonnements. En nous appuyant sur le théorème correspondant pour les s. t.[9]) nous avons donc le

Théorème 4. Considérons pour une série (3), où $a_n=o(\sqrt{n})$, les fonctions

$$\underline{\lim_{r\to 1}}\sum_0^\infty a_n P_n(x)\,r^n=\underline{f}(x), \quad \overline{\lim_{r\to 1}}\sum_0^\infty a_n P_n(x)\,r^n=\overline{f}(x). \tag{30}$$

Si les fonctions $\underline{f}$ et $\overline{f}$ sont finies partout, sauf dans un ensemble E au plus dénombrable, et si, de plus, $\underline{f}\geqslant\varphi$, où φ est intégrable[10]), la série (3) est $\mathfrak{S}_L[f]$.

Ce théorème contient, comme un cas particulier, les théorèmes analogues à ceux de M. de la Vallée Poussin pour les s. t.[11]).

8. Jusqu'à présent dans ce chapitre nous avons employé l'intégrale au sens de Lebesgue; cependant il est facile de démontrer que les théorèmes 1, 2, 3 subsistent si l'on y employe une notion de l'intégrale plus générale, notamment celle de M. Denjoy (au sens étroit ou large). La démonstration de ces théorèmes s'appuye sur la multiplication formelle des séries trigonométriques et sur le lemme ζ. Il suffit donc de démontrer que le lemme ζ subsiste pour lesdites intégrales. La démonstration reste la même jusqu'aux égalités (15) et (16). Maintenant, pour démontrer que $a_n=A_n$, on ne peut s'appuyer sur l'évaluation $A_n=o(n)$, car ceci, en général, n'est pas vrai pour les intégrales de M. Denjoy. Cependant cette difficulté n'est pas essentielle car de l'inégalité (15) il résulte que la suite $A_n/(2n+1)$ (n-pair) tend vers une limite finie. Il en est de même si n parcourt les valeurs impaires. Pour démontrer que — dans notre cas — ces deux limites sont nulles (c'est à dire que $A_n=o(n)$), ce qui permet d'achever sans aucune difficulté la démonstration, il suffit de s'appuyer sur la proposition suivante.

Lemme θ. Si les nombres A_n sont des coefficients de Fourier d'une fonction f intégrable dans le sens de M. Denjoy

---

[9]) Cf. A. Rajchman [4]. Les démonstrations sont reproduites dans Zygmund [2].

[10]) En particulier il suffit de supposer qu'une des fonctions $\underline{f}$, $\overline{f}$ est intégrable.

[11]) Cf. aussi M. Plancherel [2].

(étroit ou large), la suite $A_n/(2n+1)$ est sommable vers zéro par le procéde de Poisson, c'est à dire que

$$\lim_{r\to 1}\left[(1-r)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{2n+1}r^n\right]=0.$$

La démonstration s'appuye sur le fait que le théorème sur l'intégration par parties subsiste pour les intégrales de M. Denjoy. Posons $F(x)=\int_{-1}^{x} f\,dt$. Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que $F(1)=0$.

De la formule (1), il résulte donc que

$$(1-r)\sum_{0}^{\infty}\frac{A_n}{2n+1}r^n=\frac{(1-r)}{2}\int_{-1}^{+1}f(t)\frac{dt}{(1-2rt+r^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$=-\frac{(1-r)}{2}\int_{-1}^{+1}F(t)\frac{d}{dt}(1-2rt+r^2)^{-1/2}dt.$$

Mais

$$\frac{d}{dt}(1-2rt+r^2)^{-1/2}=\frac{r}{(1-2rt+r^2)^{3/2}}\geqslant 0 \tag{31}$$

et, de plus, cette dernière expression est bornée dans tout intervalle $(-1,\ 1-\varepsilon)$.

Comme F est continue et $F(-1)=F(1)=0$, il suffit, pour achever le démonstration du lemme, de prouver que l'expression

$$(1-r)\int_{-1}^{+1}\left|\frac{d}{dt}\,(1-2rt+r^2)^{-1/2}\right|dt=(1-r)\int_{-1}^{+1}\frac{d}{dt}\,(1-2rt+r^2)^{-1/2}\,dt$$

est bornée — ce qui est évident. En particulier nous avons prouvé, en nous appuyant sur le théorème analogue pour les s. t., que le théorème 4 subsiste pour l'intégrale de M. Denjoy au sens étroit[12]).

§ 2.

9. Passons maintenant au cas des séries (3) où les coefficients a_n ne sont pas forcément $o(\sqrt{n})$.

[12]) Probablement le théorème analogue subsiste pour l'intégrale D au sens large, mais, pour le prouver, il nous manque le théorème correspondant pour les s. t.

Théorème 5. Le théorème 4 subsiste même pour $a_n=o\left(n^{3/2-\delta}\right)$ $(\delta>0)$ pourvu que l'ensemble exceptionnel en question soit vide[13]).

La démonstration diffère peu de celle du théorème 4. Il est commode de poser, dans (2), $\theta=2u$ car ceci nous permet d'éviter des facteurs fractionnaires dans les arguments.

La série (3) peut être écrite alors sous la forme $(x=\cos 2u)$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\sin 2u}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{2\sqrt{2}}{\pi A_n^{(\frac{1}{2})}}\left\{\cos\left[(2n+1)\,u-\frac{\pi}{4}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+3}\cos\left[(2n+3)\,u-\frac{3\pi}{4}\right]+\tilde{r}_n(u)\right\} \tag{32}$$

et le second facteur est évidémment équiconvergent dans $\left(\varepsilon,\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$ avec une s. t. en u, à coefficients $O\left(n^{\frac{3}{2}-\delta}\right)$. Cette dernière série peut être, en vertu des théorèmes connus pour les s. t.[14]), intégrée terme à terme dans $\left(\varepsilon,\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$ et la série obtenue est uniformément sommable P dans $\left(2\varepsilon,\ \frac{\pi}{2}-2\varepsilon\right)$ vers une fonction qui y est absolument continue (ou, plus généralement, est une intégrale D au sens étroit). On peut donc intégrer terme à terme dans $\left(2\varepsilon,\ \frac{\pi}{2}-2\varepsilon\right)$ le second facteur dans (32). Il en résulte que la série (3) elle-même peut être intégrée terme à terme; on a donc l'égalité (5) (où f doit être remplacé par $\underline{f}$ ou $\overline{f}$ (cf. (30)), la série du membre gauche étant uniformément sommable P dans tout intervalle $(-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$. La fonction $\underline{f}$ est intégrable dans $(-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$ et il suffit de démontrer qu'elle est intégrable dans $(-1,\ 1)$.

Supposons, au contraire, que $\underline{f}$ n'est pas intégrable, par exemple dans le voisinage du point $x=1$. Commençons par

[13]) Ce théorème, ainsi que les théorèmes subséquents du type analogue, subsiste si l'on y remplace la condition $a_n=o\left(n^{\frac{3}{2}-\delta}\right)$ par $\sum|a_n|\,n^{-\frac{5}{2}}<\infty$. La question (non résolue jusqu'à présent) si le théorème subsiste pour $a_n=o\left(n^{3/2}\right)$ dépend entièrement de la résolution du problème an logue pour les s. t. Si ce dernier problème possède une solutution positive, une démonstration complètement analogue à celle du théorème 5, (en utilisant la formule pour P_n plus précise que (2)), prouve qu'on peut y supposer $\delta=0$.

(Ajouté 15. X. 1930). Tout récemment M. S. Verblunsky a publié un travail (Proc. London Math Soc. **31** (1930), part 5) où il prouve des théorèmes d'unicité pour les s. t. sommables P, à coefficients $o(n)$. Les théorèmes analogues subsistent donc pour les s. S. L. et les s. L. En particulier dans les théorèmes 5 et 6 en peut poser $\delta=0$.

[14]) Cf. A. Zygmund [1], p. 93, théorème VI.

démontrer que la fonction $g(x)=\int_0^x \underline{f}\,dt$ est intégrable dans $(-1,1)$.

En effet, cette fonction représente (pour $-1<x<1$) la somme de la série (9). Si $a_n=O\left(n^{\frac{3}{2}-\delta}\right)$, alors, pour démontrer que g est intégrable, nous ne pouvons nous appuyer sur le théorème de Riesz-Fischer; on peut cependant raisonner de la manière suivante. La fonction g est continue à l'intérieur de $(-1,1)$, et, comme $\underline{f}\geqslant\varphi$, où φ est intégrable, g tend (pour $x\longrightarrow 1-0$) vers une limite finie ou $+\infty$. La série (9) peut être écrite comme

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k P_k(x), \quad b_k=\frac{a_{k-1}}{2k-1}-\frac{a_{k+1}}{2k+3} \quad (k=1,2,\ldots), \tag{33}$$

$$b_0=-\sum_{1}^{\infty} b_k P_k(0).$$

Si l'on intègre terme à terme la série (33) dans $(0,x)$, on obtient la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x), \quad c_k=\frac{b_{k-1}}{2k-1}-\frac{b_{k+1}}{2k+3} \quad (k=1,2,\ldots), \tag{34}$$

$$c_0=-\sum_{1}^{\infty} c_k P_k(0).$$

La somme de la série (34) est égale à l'intégrale de $g(t)$ dans $(0,x)$. Désignons la par $G(x)$. D'après le théorème de Fischer-Riesz la série (34) est $\mathfrak{S}_L[G]$. Si $g(x)$ n'était pas intégrable dans le voisinage de $x=1$, nous aurions $G(1-0)=\infty$ et la série (34) serait sommable P vers $+\infty$ pour $x=1$. Ceci est impossible, car cette série converge vers une somme finie pour $x=1$.

La fonction (33) est donc intégrable au sens de M. Lebesgue et la série (33) est $\mathfrak{S}_L[g]$. Si $g(1-0)=+\infty$, nous aurions

$$(P)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_{k-1}}{2k-1}-\frac{a_{k+1}}{2k+3}\right)=+\infty. \tag{35}$$

D'autre part, les deux nombres $\underline{f}(+1)$, $\overline{f}(+1)$ sont finis, c'est à dire

[15]) En s'appuyant sur les théorèmes analogues pour les s. t. (voir Zygmund [2]), on peut introduire aussi dans le théorème 4 un ensemble dénombrable exceptionnel, pourvu que l'on suppose que dans cet ensemble on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)\cdot r^n = o(1-r)^{-1}.$$

$$-M\leqslant\sum_{1}^{\infty} a_n r^n\leqslant M, \qquad (0\leqslant r<1).$$

M désignant une constante positive. En multipliant les termes de cette inégalité par $r^{\frac{1}{2}}$ et en intégrant par rapport à r, nous obtenons que la série à termes $a_n/2n+1$ est sommable P, ce qui contredit à (35). Remarquons encore que, si $a_n=o(n)$, l'impossibilité de (35) est évidente.

Remarque. On voit de cette démonstration que, si $a_n=o(n)$, on peut se passer de l'hypothèse que $\underline{f}(+1)$ et $\overline{f}(+1)$ soient finis. Il en résulte que, si $a_n=o(n)$, les théorèmes d'unicité subsistent même si l'on introduit l'ensemble exceptionnel composé des deux points frontiers ± 1.

10. Comme le montre l'exemple de la série (21), dans le cas de $a_n=O(\sqrt{n})$ il n'y a pas, en général, d'ensembles d'unicité.

Théorème 6. Si, pour une série (3) avec $a_n=O\left(n^{\frac{3}{2}-\delta}\right)$ $(\delta>0)$ les fonctions $\underline{f}$ et $\overline{f}$, définies dans (30), sont finies partout sauf, peut-être, dans un ensemble E composé d'un nombre fini de points ξ:

$$-1=\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_p=1$$

et si f est intégrable L (ou D au sens étroit), la série considérée diffère de $\mathfrak{S}_L[\underline{f}]$ par une combinaison linéaire des séries (21), où $\xi=\xi_i$ $(i=1,2,\ldots,p)$.

Démonstration. Soit

$$\underline{f}\sim\Sigma b_n P_n. \tag{36}$$

Si $\underline{f}$ est intégrable L, on a $b_n=o(n)$; si $\underline{f}$ est intégrable D, on peut prouver (Cf. le Chap. VI) que $b_n=o\left(n^{\frac{3}{2}}\right)$. Le raisonnement analogue à celui du théorème 4 prouve qu'on a

$$\sum_{0}^{\infty} a_n\int_0^x P_n\,dt=\int_0^x \underline{f}(t)\,dt+C \qquad x\neq\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_p, \tag{37}$$

la constante C changeant, en général, si x passe d'un des intervalles

$$(\xi_1,\xi_2),\ (\xi_2,\xi_3),\ldots,\ (\xi_{p-1},\xi_p) \tag{38}$$

à un autre. La série (37) est sommable $(C,1)$, ou, même, convergente si $\underline{f}$ est intégrable L.

D'autre part on sait que la série de Fourier (36) peut être intégrée terme à terme (Cf. par ex. le Chap. VI). On a donc

$$\sum_{0}^{\infty} b_n\int_0^x P_n\,dt=\int_0^x \underline{f}\,dt,$$

où la série du membre gauche converge ou est sommable $(C,1)$. Retranchons la série (36) de (3) et soit $a_n-b_n=d_n$. La série à termes $d_n P_n$ peut être intégrée terme à terme et nous obtenons ainsi que la série

$$\sum_{0}^{\infty} d_n\int_0^x P_n\,dt=d\cdot P_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d_{n-1}}{2n-1}-\frac{d_{n+1}}{2n+3}\right)P_n \tag{39}$$

(d est une constante) est sommable $(C, 1)$ vers une fonction φ, constante à l'intérieur de chacun des intervalles (38). En s'appuyant sur les théorèmes d'unicité on voit que la série du second membre dans (39) est $\mathfrak{S}_L[\varphi]$. Nous avons $\varphi = C\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \ldots + C_{p-1}\varphi_{p-1}$, φ_i désignant la fonction égale à 1 à l'intérieur de (ξ_i, ξ_{i+1}) et à zéro ailleurs. Posons $\Delta_n(x) = P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Un calcul simple montre que

$$\varphi_i \sim \frac{1}{2}(\xi_{i+1} - \xi_i) P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} [\Delta_n(\xi_{i+1}) - \Delta_n(\xi_i)] P_n(x).$$

La comparaison de la série (39) et de $\mathfrak{S}_L[\varphi]$ nous donne (pour $n \geqslant 1$)

$$\begin{aligned} (40) \qquad \frac{d_{n-1}}{2n-1} - \frac{d_{n+1}}{2n+3} &= \frac{C_1}{2}[\Delta_n(\xi_2) - \Delta_n(\xi_1)] + \frac{C_2}{2}[\Delta_n(\xi_3) - \Delta_n(\xi_2)] \\ &+ \ldots + \frac{C_{p-1}}{2}[\Delta_n(\xi_p) - \Delta_n(\xi_{p-1})] = \frac{C_1}{2}\Delta_n(\xi_2) \\ &+ \sum_{i=2}^{p-2} \frac{C_i}{2}[\Delta_n(\xi_{i+1}) - \Delta_n(\xi_i)] - \frac{C_{p-1}}{2}\Delta_n(\xi_{p-1}). \end{aligned}$$

Supposons, pour l'instant, que $a_n = o(n)$. Alors, en ajoutant les égalités (40) pour des valeurs consécutives de n et en passant à la limite, nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{d_{n-1}}{2n-1} &= -\frac{C_1}{2}P_{n-1}(\xi_2) - \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{p-2} C_i [P_{n-1}(\xi_{i+1}) - P_{n-1}(\xi_i)] + \frac{C_{p-1}}{2}P_{n-1}(\xi_{p-1}) \\ &= \frac{D_2}{2}P_{n-1}(\xi_2) + \frac{D_3}{2}P_{n-1}(\xi_3) + \ldots + \frac{D_p}{2}P_n(\xi_{p-1}), \end{aligned}$$

$D_2, \ldots, D_{p-1}$ désignant des constantes. Le théorème est donc démontré. Si $d_n = O(n^{\frac{3}{2}-\delta}) = o(n^{\frac{3}{2}})$ le raisonnement ci-dessus prouve l'existence des limites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{2n}}{4n+1} = D_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{d_{2n+1}}{4n+3} = D_p.$$

Il en découle que la série $\sum d_n P_n$ est une combinaison linéaire des séries

$$\sum \frac{2n+1}{2} P_n(x) P_n(\xi_i), \qquad i = 2, 3, \ldots, p-1,$$

$$\sum \frac{4k+1}{2} P_{2k}(x), \qquad \sum \frac{4k+3}{2} P_{2k+1}(x) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

§ 3.

11. Passons maintenant aux théorèmes de localisation pour les s. L. et commençons par le cas des coefficients $o(\sqrt{n})$. Des lemmes η, γ, α_1 on déduit les deux théorèmes suivants:

Théorème 7. Si une série (3a) à coefficients $o(\sqrt{n})$ est sommable M vers zéro dans les points de l'intervalle $\alpha < \theta < \beta$ $(0 < \alpha < \beta < \pi)$ n'appartenant pas à un ensemble E^* du type U_M[16]), cette série converge uniformément dans $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$.

[16]) Pour les s. t. De même dans le théorème 8.

Théorème 8. Si une série (3a), à coefficients $o(\sqrt{n})$, est sommable M dans (α, β) $(0 < \alpha < \beta < \pi)$, sauf, peut être, pour θ appartenant à un ensemble E^* du type U'_M vers une fonction finie et intégrable (L ou D) dans (α, β), cette série est uniformément équiconvergente dans $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$ avec $\mathfrak{S}[f\lambda]$, où λ est une fonction suffisamment régulière, égale à 1 dans $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$ et à 0 en dehors de (α, β).

De même nous avons la proposition suivante:

Théorème 9. Posons pour une série (3a)

$$(41) \quad \underline{f}(\theta) = \varliminf_{r\to 1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta)\, r^n\right], \quad \overline{f}(\theta) = \varlimsup_{r\to 1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta)\, r^n\right].$$

Si $\underline{f}$ et $\overline{f}$ sont finies dans (α, β) $(0 < \alpha < \beta < \pi)$, sauf dans un ensemble au plus dénombrable de points et si $\underline{f}$ est intégrable L (ou D au sens étroit) dans (α, β), alors, en supposant que $a_n = o(\sqrt{n})$, la série considérée est uniformément équiconvergente dans $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$ avec $\mathfrak{S}[\underline{f}\lambda]$, où λ est définie comme dans le théorème 8.

On a aussi le théorème suivant

Théorème 10. Si pour une série (3a) à coefficients $o(n^\gamma)$ $(-1 < \gamma < 1)$ les fonctions $\underline{f}$ et $\overline{f}$ (cf. (41)) sont, toutes deux, finies pour $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ $(0 < \alpha < \beta < \pi)$ et si $\underline{f}$ y est intégrable L, la série considérée est uniformément équisommable (C, γ) dans $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$ avec $\mathfrak{S}[\underline{f}\lambda]$, où λ est définie comme dans le théorème 8.

Nous ne nous y arrêtons pas car la démonstration de ce théorème utilise la multiplication formelle des s. t. à coefficients $o(n^\gamma)$ $(-1 < \gamma < 1)$.

Pour les séries (3a) dont les coefficients sont $o(n^{\gamma+\frac{1}{2}})$ $(\gamma > 0)$ on a le

Théorème 11. Si une série (3a) dont les coefficients sont $o(n^{\gamma+1/2})$ $(\gamma > 0)$ est uniformément sommable P dans un intervalle (α, β) $(0 < \alpha < \beta < \pi)$, cette série est uniformément sommable (C, γ) dans tout intervalle $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$.

Ce théorème est analogue au théorème 10 (Chap. I) pour les s. S. L. et se démontre de manière analogue (il est commode de poser, dans la démonstration, $\theta = 2u$) [17]).

[17]) Esquissons seulement la démonstration dans le cas de $0 < \gamma < 1$. En multipliant la série considérée par $\sqrt{\sin\theta}$ et en l'intégrant terme à terme, nous obtenons (cf. (2)) que la série

$$(*) \qquad \sum \frac{a_n \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{A_n^{(\frac{1}{2})} \cdot (n + 1/2)}$$

est uniformément sommable P dans (α, β).

D'autre part, en tenant compte du fait que de la sommabilité P d'une série $\sum c_n$ il résulte celle de la série $\sum c_n / \left(n + \frac{1}{2}\right)$, on obtient, que la série

§ 4.

12. Les polynômes P_n de Legendre vérifient l'équation différentielle

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0. \tag{42}$$

Cette équation possède une seconde intégrale, linéarement indépendante qu'on appelle ordinairement fonction de Legendre de seconde éspèce et qu'on désigne par Q_n. Q_n est liée avec P_n par la relation

$$Q_n=\frac{1}{2}P_n.\log\frac{z+1}{z-1}+R_{n-1} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

où R_n est un polynôme de degré n à coefficients réels. $Q_n(z)$ est regulière et uniforme dans le plan de la variable z découpé le long du segment $(-1,1)$. Sur le segment $(-1,1)$ lui-même elle est indéterminée. Ordinairement on pose pour $-1<x<1$:

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}Q_n(x+0i)+\frac{1}{2}Q_n(x-0i)=\frac{1}{2}P_n.\log\frac{1+x}{1-x}+R_{n-1}.$$

En posant $x=\cos\theta$ $(0<\theta<\pi)$ on a la formule asymptotique suivante [18])

$$Q_n(\cos\theta)=-\frac{2}{A_n^{(\frac{1}{2})}}\left[\frac{\sin\left(n\theta+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2\sin\theta}}+\frac{1^2}{2.(2n+3)}\cdot\frac{\sin\left(n\theta+\frac{3}{2}\alpha\right)}{\sqrt{(2\sin\theta)^3}}\right.$$
$$\left.+\frac{1^2.3^2}{2.4.(2n+3)(2n+5)}\cdot\frac{\sin\left(n\theta+\frac{5}{2}\alpha\right)}{\sqrt{(2\sin\theta)^5}}+\ldots+\right] \qquad \left(\alpha=\theta-\frac{\pi}{2}\right). \tag{43}$$

$$\sum\frac{a_n\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{A_n^{(\frac{1}{2})}\left(n+\frac{1}{2}\right)} \tag{**}$$

et uniformément sommable P dans (α,β). On en déduit, tour à tour, la sommabilité P des séries

$$\sum\frac{a_n}{A_n^{(\frac{1}{2})}}\cdot\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{3\pi}{4}\right]}{2n+1}, \qquad (S)\quad \sum\frac{a_n}{A_n^{(\frac{1}{2})}}\cdot\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{3\pi}{4}\right]}{2n+3}$$

donc, d'après la formule (2), aussi celle de

$$(T) \qquad \sum\frac{a_n}{A_n^{(\frac{1}{2})}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right].$$

Le séries (S) et (T) peuvent être considérées comme des s. t. (en posant $\theta=2u$). D'après le théorème de M. Riesz [1] elles sont sommables (C,γ), d'où, en vertu de (2), il résulte le théorème annoncé.

[18]) Stieltjes [1].

Ce développement converge pour $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5\pi}{6}$. L'évaluation de l'erreur, qu'on commet en gardant dans la série (43) seulement les p premiers termes, est la même que pour la série (2'). En particulier

$$Q_n(\cos\theta)=-\frac{2}{A_n^{(\frac{1}{2})}}\left[\frac{\sin\left(n\theta+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2\sin\theta}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2(2n+3)}\cdot\frac{\sin\left(n\theta+\frac{3}{2}\alpha\right)}{\sqrt{(2\sin\theta)^3}}+\varrho_n(\theta)\right], \tag{44}$$

où $\varrho_n=O\left(\frac{1}{n^2\sin^{5/2}\theta}\right)$.

De la forme du membre droit dans l'égalité (44) il résulte que le lemme η et les théorèmes 6, 7, 8, 9, 10 subsistent pour les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nQ_n(\cos\theta). \tag{45}$$

Nous ne nous y arrêtons pas. On trouvera peut-être un peu plu d'intêret dans la dépendance mutuelle des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(\cos\theta), \tag{46}$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_nQ_n(\cos\theta). \tag{47}$$

En effet, en comparant les expressions (2') et (43), on voit q les numérateurs correspondants sont des expressions trigonon triques conjuguées. Ceci rend probable que les proprietés mutuel des séries (46) et (47) à l'intérieur de $(0,\pi)$ sont analogues à ce des s. t. conjuguées:

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta), \tag{48}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin n\theta-B_n\cos n\theta). \tag{49}$$

Nous allons prouver qu'il en est ainsi, en nous bornant, pour plus de simplicité, au cas $a_n=o(\sqrt{n})$. Il nous sera commode d'appeler la série (47) conjuguée à (46).

Lemme ι. Si les deux séries (46) et (48) ($a_n = o\sqrt{n}$; A_n, $B_n \to 0$) sont uniformément équiconvergentes dans (α, β) $(0 < \alpha < \beta < \pi)$, les séries conjuguées (47) et (49) sont uniformément équiconvergentes au sens large dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$.

Démonstration. Des théorèmes sur la multiplication formelle[19]) il résulte que, si une s. t. converge uniformément vers zéro dans un intervalle (α, β), la série conjuguée converge uniformément dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$ (en général pas vers zéro). Il en résulte que, si deux s. t. sont équiconvergentes dans (α, β), leurs conjuguées sont équiconvergentes au sens large dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$. Il suffit donc de démontrer le lemme ι dans le cas spécial où la série (48) est celle que nous avons construit dans la démonstration du lemme η (en y posant $\varphi(\theta) \equiv 1$). De même nous pouvons supposer que l'intervalle (α, β) coïncide avec l'intervalle $(\delta, \pi-\delta)$ considéré dans le lemme η.

Pour prouver le lemme ι il suffit de répéter la démonstration du lemme η, en tenant compte des théorèmes sur la multiplication formelle des s. t. conjuguées (Cf. Chap. I, 9, 2°). La série (23) était la somme de cinq s. t.: notamment des quatre produits formels obtenus de (26) (où les fonctions $g_i(\theta)$ ont été changées en dehors de $(\delta, \pi-\delta)$, afin que les fonctions nouvelles λ_i soient suffisamment régulières dans $(0, 2\pi)$) et de $\mathfrak{S}[R^*]$. Désignons ces s. t. respectivement par $S^{(i)}$ $(i=1, 2, 3, 4, 5)$, leur somme par S, et leurs conjuguées par $\overline{S^{(i)}}$ et $\overline{S}$.

La série (47), considéré dans $(\delta, \pi-\delta)$, peut être décomposée — conformément à la formule (44) — en somme de 5 séries, dont les 4 premières sont (en se servant des notations de la démonstration du lemme η):

$$(50) \qquad \lambda_1(\theta) \sum a_n \sin n\theta; \quad \lambda_2(\theta) \sum -a_n \cos n\theta;$$

$$\lambda_3(\theta) \sum \frac{a_n}{2(2n+3)} \sin n\theta; \quad \lambda_4(\theta) \sum \frac{-a_n}{2(2n+3)} \cos n\theta.$$

Comparons les expressions (26) et (50) (en rappelant que dans $(\delta, \pi-\delta)$ on a $\lambda_i = g_i$). Les fonctions λ_i dans (26) et (50) sont multipliées par des s. t. respectivement conjuguées. En nous appuyant sur les théorèmes sur la multiplication formelle des s. t. nous voyons donc que les séries (50) sont respectivement

[19]) Cf. le Chap. I, 8, 9.

équiconvergentes (au sens large) avec $\overline{S^{(1)}}$, $\overline{S^{(2)}}$, $\overline{S^{(3)}}$, $\overline{S^{(4)}}$. Maintenant nous pouvons raisonner comme il suit. La série (47) est équiconvergente au sens large avec

$$\sum_1^4 \overline{S^{(i)}} + T$$

(T étant une série absolument et uniformément convergente, provenant du terme $\varrho_n(\theta)$ dans (44)), donc avec $\sum_1^4 \overline{S^{(i)}}$, enfin avec $\left(\sum_1^4 \overline{S^{(i)}}\right) + \overline{S^{(5)}} = \overline{S}$[20]) c. q. f. d.

13. Du lemme ι on déduit immédiatement le théorème suivant.

Théorème 12. Si une série (46) (où $a_n = o(\sqrt{n})$) converge vers zéro dans un intervalle (α, β) $(0 < \alpha < \beta < \pi)$, sa conjuguée (47) converge uniformément dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$.

Il est evident que ce théorème subsiste si l'on y remplace la série (46) par sa conjuguée (47) et réciproquement. La même situation a lieu dans tous les théorèmes qui suivent.

Théorème 13. Sous les hypothèses du théorème 8 (resp. 9), la série conjuguée à (3a) est uniformément équiconvergente au sens large dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$ avec $\mathfrak{S}[f\lambda]$ (resp. $\mathfrak{S}[\underline{f}\lambda]$).

§ 5.

14. En posant dans (42) $x = \cos\theta$, nous obtenons l'équation différentielle des $P_n(\cos\theta)$:

$$(51) \quad \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta \cdot \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta)\right] + n(n+1) P_n(\cos\theta) = 0 \quad (n=1, 2, \ldots)$$

Soit donnée une s. L.

$$(52) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta)$$

et supposons d'abord que $a_0 = 0$. Il est naturel de supposer que la fonction

[20]) Nous nous servons ici de la proposition suivante: la série conjuguée à $\mathfrak{S}[f]$, où f vérifie la condition de Lipschitz d'ordre positif, converge uniformément.

(53) $$\Phi(\theta)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}P_n(\cos\theta)$$

joue un rôle analogue à celui de la fonction F obtenue par la double intégration formelle des séries trigonométriques [21]). De la relation (51) on déduit que

$$-n(n+1)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}du\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}P_n(\cos t)\,dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}du\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{1}{\sin t}\frac{d}{dt}\left[\sin t\,.\,\frac{d}{dt}P_n(\cos t)\right]dt$$

$$=P_n(\cos\theta)-\lambda_n+\mu_n\,.\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{ctg}u\,.\,P_n(\cos u)\,du$$

(54) $$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}du\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{P_n(\cos t)}{\sin^2 t}\,dt,$$

où $\lambda_n=P_n(0)=O(n^{-1/2})$; $\mu_n=P_n'(0)=O(n^{\frac{1}{2}})$.

D'après le lemme η ($\varphi(\theta)\equiv 1$), pour tout $\delta>0$, donné d'avance, il existe une s. t. (23) uniformément équiconvergente avec (52) dans $(\delta,\pi-\delta)$. On en déduit que

(55) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}du\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\left[\sum_{n=1}^{N}a_nP_n(\cos t)-\frac{A_0}{2}-\sum_{n=1}^{N}(A_n\cos nt+B_n\sin nt)\right]dt\longrightarrow 0$$

avec $\frac{1}{N}(\delta\leqslant\theta\leqslant\pi-\delta)$. Soit

(56) $$F(\theta)=\frac{A_0\theta^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta}{n^2}.$$

De la relation (55) on déduit, en tenant compte de (54), (cf. le raisonnement analogue pour les s. S. L., Chap. I, 25):

(57) $$F(\theta)=A\theta+B+\Phi(\theta)+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{ctg}u\,.\,\Phi(u)\,du$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}du\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\,dt\qquad(\delta\leqslant\theta\leqslant\pi-\delta),$$

où A, B sont des constantes.

[21]) La fonction Φ définie par (53) était déjà utilisée par M. Plancherel dans ses recherches sur l'unicité des s. L. (voir Plancherel [1], [2]).

Supposons maintenant que $a_0\neq 0$. Nous définissons $\Phi(\theta)$ par la relation

(58) $$\Phi(\theta)=a_0\,\xi(\theta)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}P_n(\cos\theta)$$

et choisissons la fonction $\xi(\theta)$ de façon que la relation (57) soit conservée.

La fonction $\xi(\theta)$ doit alors satisfaire à l'égalité

$$\frac{a_0\theta^2}{4}=A_1\theta+B_1+a_0\,\xi(\theta)+a_0\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{ctg}u\,.\,\xi(u)\,du+a_0\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{\xi(t)}{\sin^2 t}\,du\,dt.$$

En différentiant cette égalité deux fois nous obtenons l'équation différentielle

$$\xi''+\xi'\operatorname{ctg}t=1.$$

En choisissant convenablement les constantes d'intégration, on obtient la solution

(59) $$\xi(\theta)=-2\lg\cos\frac{\theta}{2}\,.$$

En résumant: pour toute s. L. (52) (où $a_n=o(\sqrt{n})$) nous définissons la fonction Φ par l'égalite:

(60) $$\Phi(\theta)=-2a_0\lg\cos\frac{\theta}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nP_n(\cos\theta)}{n(n+1)}\,.$$

Cette fonction vérifie la relation (57), où F est donnée par l'égalité (56), la série (23) étant uniformément équiconvergente avec (52) dans $(\delta,\pi-\delta)$.

15. Théorème 14. Si deux s. L. à coefficients $o(\sqrt{n})$ possèdent des fonctions Φ égales dans un intervalle (α,β) $(0<\alpha<\beta<\pi)$, alors 1° ces deux séries sont uniformément équiconvergentes dans $(\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon)$, 2° leurs conjuguées y sont aussi uniformément équiconvergentes mais au sens large.

Ce théorème prouve que la façon dont se comporte une s. L. dans un intervalle (intérieur à $(0,\pi)$) ne dépend que des propriétés de la fonction Φ dans un intervalle un peu plus large. Mutatis mutandis pour les séries conjuguées.

Démonstration. Supposons que la série (52) est la différence des deux séries considérées. La fonction Φ définie par (60) est donc nulle dans (α, β). Nous avons à démontrer que la série (52), ainsi que sa conjuguée (47), convergent uniformément dans $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$, la somme de la première étant zéro. Prenons un nombre $\delta>0$ suffisamment petit; alors l'intervalle $(\delta, \pi-\delta)$ contient (α, β). Soit (23) une s. t. uniformément équiconvergente avec (52) dans $(\delta, \pi-\delta)$. Les fonctions $\Phi(\theta)$ et $F(\theta)$ (cf. (60), (56)) sont liées par la relation (57). Comme $\Phi(\theta)$ est nulle dans (α, β) la fonction $F(\theta)$ y est linéaire. D'après le théorème de Riemann la série (23), donc aussi (52), est uniformément convergente vers zéro dans $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$ et la proposition 1° est démontrée. Pour démontrer 2°, il suffit de remarquer que la série conjuguée à (23) converge uniformément dans $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$ et ensuite d'appliquer le lemme ι.

16. Remarque. La forme de $\xi(\theta)$ dans (59) peut être encore déduite des considérations suivantes. Soit $\eta(\theta)$ une fonction arbitraire de θ. Posons

$$\omega[\eta] = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\cdot\frac{d\eta}{d\theta}\right].$$

L'opération ω appliquée formellement à la série (53) (où $a_0=0$) nous donne (52). Cette operation est donc analogue à la double différentiation formelle dans le cas des s. t. Si l'on veut définir ξ d'une manière tout à fait naturelle, on doit la choisir parmi les intégrales de l'équation différentielle $\omega[\eta]=1$, ce qui nous donne, en particulier, (59). Nous obtenons l'intégrale générale en ajoutant $C_1 \log \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+C_2$. L'introduction de ce terme supplémentaire dans le second membre de l'égalité (60) joue le même rôle que l'introduction de la fonction linéaire de θ dans le second membre de l'égalité (56). Le théorème 14 subsiste, évidemment, si les fonctions Φ en question diffèrent dans (α, β) par une fonction de la forme $C_1 \operatorname{lgtg}\frac{\theta}{2}+C_2$.

17. Pour les s. L. à coefficients $o(n^\gamma)$ $(\gamma>-1)$ on a une proposition analogue au théorème 14, si l'on introduit des fonctions Φ_k plus générales:

$$\Phi_k(\theta) = a_0\,\xi_k(\theta) + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^k(n+1)^k} P_n(\cos\theta), \tag{61}$$

la fonction ξ_k désignant une intégrale de l'équation différentielle

$$\omega_k[\eta] = 1,$$

où $\omega_k[\eta] = \omega[\omega_{k-1}[\eta]]$, $\omega_1 \equiv \omega$.

Nous ne nous arrêtons pas sur l'intégration de cette équation différentielle.

Théorème 15. Si deux s. L. à coefficients $o\left(n^{\gamma+\frac{1}{2}}\right)$ $(\gamma>-1)$ ont dans un intervalle $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ $(0<\alpha<\beta<\pi)$ des fonctions Φ_k égales $(2k>\gamma+1)$, alors: 1° ces deux séries sont uniformément équisommables (C,γ) dans $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$, 2° leurs conjuguées y sont uniformément équisommables (C,γ) mais au sens large.

1° On sait que, pour $0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\theta'\leqslant\pi$,

$$P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\,du$$

où $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos u$. On a donc

$$(-1)^k n^k (n+1)^k P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta') \tag{62}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-1)^k n^k (n+1)^k P_n(\cos\gamma)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega_k[P_n(\cos\gamma)]\,du \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

où l'opération ω_k est prise par rapport à la variable γ. Supposons que la série (52) soit la différence des séries mentionnées dans l'énoncé du théorème 15. Nous avons à prouver qu'elle est uniformément sommable (C,γ) vers zéro dans tout intervalle $(\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon)$. La fonction Φ_k correspondant à la série (52) est donnée par la formule (61). De la formule (62) nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta)\, r^n \tag{63}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k n^k (n+1)^k \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi} (\Phi_k(\theta') - a_0\,\xi_k(\theta'))\,P_n(\cos\theta')\,P_n(\cos\theta)\sin\theta'\,d\theta'$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} (\Phi_k(\theta') - a_0\,\xi_k(\theta'))\sin\theta'\,d\theta' \int_0^{2\pi} \omega_k\left[\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\psi+r^2)^{\frac{3}{2}}}\right] d\varphi',$$

où $\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi'$. Soit K la sphère dont le rayon est égal à 1. En désignant par (θ', φ') les coordonnées des points situés sur la surface, nous avons pour l'élément d'aire de cette surface l'expression $d\sigma' = \sin\theta' d\theta' d\varphi'$. Posons, par définition, $\Phi_k(\theta', \varphi') = \Phi_k(\theta')$, $\xi_k(\theta', \varphi') = \xi_k(\theta')$ $(0\leqslant\theta'\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi'\leqslant 2\pi)$. La dernière expression dans (63) peut être écrite sous la forme.

$$\frac{1}{4\pi}\int\int_K [\Phi_k(\theta', \varphi') - a_0\,\xi_k(\theta', \varphi')]\,\omega_k[P(r,\psi)]\,d\sigma', \tag{64}$$

où

$$P(r,\psi) = \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\psi+r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'expression (64) est la différence des intégrales

$$(65\,a)\quad \frac{1}{4\pi}\iint_K \Phi_k(\theta',\varphi')\,\omega_k[P(r,\psi)]\,d\sigma', \qquad (65\,b)\quad \frac{a_0}{4\pi}\iint_K \xi_k(\theta'\,\varphi')\,\omega_k[P(r,\psi)]\,d\sigma'.$$

Il résulte de la définition de l'opération ω_k que $\omega_k[P(r,\psi)]$ tend uniformément vers zéro pour $\gamma \geqslant \delta$, quel que petit que soit $\delta > 0$. Comme $\Phi_k('\theta, \varphi') = 0$ pour $\alpha \leqslant \theta' \leqslant \beta$, il en résulte que l'intégrale (65 a) tend uniformément vers zéro pour $\alpha+\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \beta-\varepsilon$. Nous allons prouver que l'intégrale (65 b) tend vers a_0.

Soit $g(x)$ la fonction définie dans $(-1, 1)$ et telle que $g(\cos\theta) = \xi_k(\theta)$. Soit $g^*(x)$ une fonction définie dans $(-1, 1)$ et vérifiant les deux conditions suivantes: a) Les coeficients de $\mathfrak{S}_L[g^*]$ sont $O(n^{-2k-2})$, b) Pour $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ on a: $\xi^*(\theta) = \xi_k(\theta)$, où $\xi^*(\theta) = g^*(\cos\theta)$. La fonction $g^*(x)$ éxiste sûrement, ξ_k étant analytique à l'intérieur de $(0, \pi)$. On a

$$\frac{1}{4\pi}\iint_K \xi_k\,\omega_k[P(r,\psi)]\,d\sigma' = \frac{1}{4\pi}\iint_K \xi^*\,\omega_k[P(r,\psi)]\,d\sigma'$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_K (\xi_k-\xi^*)\,\omega_k[P(r,\psi)]\,d\sigma' = A + B.$$

Comme $\xi_k - \xi^* = 0$ pour $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, on obtient que $B \longrightarrow 0$ uniformément pour $\alpha+\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \beta-\varepsilon$. Considérons maintenant $\mathfrak{S}_L[g^*]$ et posons $x = \cos\theta$. Comme les coefficients de cette série sont $O(n^{-2k-2})$, l'opération ω_k appliquée formellement nous donne une série convergente dont la somme est égale à $\omega_k[\xi^*]$. Pour $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ on a $\omega_k[\xi^*] = \omega_k[\xi_k] = 1$. Il en résulte que pour $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ on a $A \longrightarrow 1$.

Nous avons donc obtenu que

$$\lim_{r\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta)\, r^n = 0$$

uniformément dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$ et maintenant il suffit d'appl quer le théorème 11. Ajoutons encore que le théorème 11 cesse d'être vrai pour $-1 < \gamma \leqslant 0$. Cependant, si l'on suppose que la somme de la série mentionnée dans l'énoncé de ce théorème est assez régulière dans (α, β) (par exemple si elle y est à variation bornée, ou, à plus forte raison, si elle y est égale à zéro), le théorème subsiste pour $-1 < \gamma \leqslant 0$.

2° La démonstration de la seconde partie du théorème 15 est analogue à la démonstration du théorème 14. Faisons une remarque préliminaire. Soit $S(\theta)$ une s. t. uniformément sommable P dans $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ vers une fonction continue $\varphi(\theta)$. Nous allons prouver que la série $\overline{S}(\theta)$, conjuguée à $S(\theta)$, est dans tout intervalle $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$ uniformément équisommable P avec la série de Fourier d'une fonction de carré intégrable; il en résulte, en particulier, que la série $\overline{S}(\theta)$, intégrée terme à terme, est uniformément sommable P dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$ vers une fonction absolument continue et vérifiant la condition de Lipschitz d'ordre $\frac{1}{2}$ [22]). Ceci est évident si la série S est celle de Fourier d'une

[22]) Nous nous appuyons ici sur la proposition bien connue que, si f^2 est integrable, la fonction $F(x) = \int_x f\,dt$ vérifie la condition de Lipschitz d'ordre $\frac{1}{2}$. La démonstration s'obtient par l'application de l'inégalité de Schwarz.

fonction partout continue. Dans le cas général il suffit de retrancher de S la série $\mathfrak{S}[\varphi^*]$, où φ^* est partout continue et égale à φ dans (α, β). La série $\Delta = S - \mathfrak{S}[\varphi^*]$ est uniformément sommable P vers zéro dans (α, β). D'après le principe de Schwarz elle est la partie réelle (pour $z = e^{i\theta}$) d'une série de puissances pour laquelle l'arc $\alpha < \theta < \beta$ est celui de régularité. Il en résulte que la série $\overline{\Delta}$, conjuguée à Δ, est uniformément sommable P dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$. Le raisonnement analogue prouve que, si la somme (par le procédé P) de la série $\overline{S}(\theta)$ pour $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ vérifie la condition de Lipschitz d'ordre positif, la série $\overline{S}(\theta)$ est uniformément sommable P dans tout intervalle $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 15, 2°. Considérons deux séries

$$(66)\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi}\cdot\frac{a_n}{A_n^{(\frac{1}{2})}}\left[\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2\sin\theta}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(2n+3)}\cdot\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{3\pi}{4}\right]}{\sqrt{(2\sin\theta)^3}}+r_n(\theta)\right],$$

$$(67)\quad -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{a_n}{A_n^{(\frac{1}{2})}}\left[\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2\sin\theta}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(2n+3)}\cdot\frac{\sin\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{(2\sin\theta)^3}}+\varrho_n(\theta)\right],$$

où $a_n = o\left(n^{\gamma+\frac{1}{2}}\right)$, $r_n(\theta)$ et $\varrho_n(\theta) = O(n^{-2})$ dans $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$. Nous allons prouver que, si la première d' elles est uniformément sommable P vers zéro pour $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ $(0 < \alpha < \beta < \pi)$, la seconde est uniformément sommable (C, γ) dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$. Bornons nous au cas $0 < \gamma < 1$ et reprenons le raisonnement de la note 17) de ce chapitre. Nous y avons prouvé que la série

$$(68)\quad \sum b_n \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right] \qquad \left(b_n = a_n / A_n^{(\frac{1}{2})}\right)$$

est uniformément sommable P dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$. En posant $\theta = 2u$ nous obtenons une s. t. en u, uniformément sommable P dans $\left(\frac{1}{2}\alpha+\varepsilon, \frac{1}{2}\beta-\varepsilon\right)$. D'après la remarque que nous venons de faire, la série conjuguée, intégrée terme à terme, est sommable P vers une fonction lipschitzienne d'ordre $\frac{1}{2}$. En posant $u = \frac{1}{2}\theta$, nous voyons que la série

$$(69)\quad \sum b_n \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{2n+1}$$

est sommable P dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$ vers une fonction vérifiant la condition de Lipschitz d'ordre $\frac{1}{2}$. Le même est vrai, évidemment, pour la serie

$$(70)\qquad \sum b_n \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{2n+1}$$

qui s'obtient par l'intégration formelle de la série (68). Il en résulte que les séries

$$(71)\qquad \sum b_n \frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{2n+1}, \qquad \sum b_n \frac{\sin\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{3\pi}{4}\right]}{2n+1}$$

sont uniformément sommables P dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$ vers des sommes vérifiant la condition de Lipschitz d'ordre $\frac{1}{2}$. La même proposition subsiste pour les séries qu'on obtient de (71) en y remplacant dans les dénominateurs $2n+1$ par $2n+3$. La somme de la série $\sum b_n r_n(\theta)$ vérifie la condition de Lipschitz d'ordre positif (cf. p. 148). La série (66), qui est sommable P vers zéro dans (α, β), peut être décomposé en une somme de trois séries dont la deuxième et troisième convergent vers des fonctions lipschitziennes. Il en est donc de même de la première de ces séries. D'apres la remarque que nous venons de faire, la série à termes $b_n \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]$ est donc uniformément sommable P dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$. La série (67) est la somme de trois séries dont la troisième converge absolument; la prèmière et la deuxième sont des s. t. uniformément sommables P dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$. D'après le théorème cité de M. Riesz, toutes ces séries, donc aussi leur somme, sont uniformément sommables (C, γ) dans $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$. [23])

Liste des travaux cités.

N. BARY, [1], *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, Fund. Math .9 (1927) p. 62—115.

G. DARBOUX, [1], *Mémoire sur l'approximation des fonctions des trés grands nombres et sur une classe étendue de développements en séries*, Jour. de Math. 4 (1878) p. 5—56 et 377—416.

P. FATOU, [1], *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta Math. 20 (1906) p. 335—400.

A. HAAR, [1], *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*; Erste Mitteilung, Math. Ann. 69 (1910) pp. 331—371; Zweite Mitteilung, Math. Ann. 71 (1911) p. 38—53.

E. W. HOBSON, [1], *A General Convergence Theorem and the Theory of the Representation of a Function by Series of Normal Functions*, Proc. London Math. Soc. 6 (2) (1908) p. 349—395.

E. KOGBETLIANTZ, [1], *Recherches sur l'unicité des séries uttrasphériques*, Jour. de Matn. 5 (9) (1926) p. 125—196.

[23]) Pour $\gamma \geqslant 1$ la démonstration est analogue (on doit se servir des formules plus exactes pour P_n et Q_n). Si $-1 < \gamma < 0$ la démonstration est analogue à celle du théorème 12.

E. MENCHOFF, [1], *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, C. R. 163 (1916) p. 433—436.

L. NEDER, [1], *Zur Theorie der trigonometrischen Reihen*, Math. Ann. 84 (1921) p. 117—136.

M. PLANCHEREL, [1], *Les problèmes de Cantor et Du Bois Reymond dans la théorie des séries de polynômes de Legendre*, Ann. de l'École Normale 31 (3) (1914) p. 224—262.

[2], *Sur l'unicité du développement d'une fonction en série de polynômes de Legendre et en série de fonctions de Bessel*, Ann. de l'École Normale 39 (3) (1922) p. 273—316.

A. RAJCHMAŃ, [1], *Sur le principe de localisation de Riemann* (en polonais), C. R. de la Soc. Scientif. de Varsovie, 11ème année (1918) p. 115—132.

[2], *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, Fund. Math. 3 (1922) p. 287—302.

[3], *Sur la multiplication des séries trigonométriques et sur une classe remarquable des ensembles fermés*, Math. Ann. 95 (1926) p. 388—408.

[4], *Séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson* (en polonais), Prace Mat.-Fiz. 30 (1919) p. 19—88.

B. RIEMANN, [1], *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*, Gesammelte Werke, 2. Aufl. Leipzig (1892) p. 227—271.

M. RIESZ, [1], *Sur les séries de Dirichlet et les séries entières*, C. R. 149 (1909) p. 909—912.

[2], *Über einen Satz des Herrn Fatou*, Journ. für Math., 140 (1911) p. 89—94.

[3], *Über summierbare trigonometrische Reihen*, Math. Ann., 71 (1911) p. 54—75.

[4], *Sätze über Potenzreihen*, Arkiv for mat., astr. och fysik, 11 (1916) Nr. 12

H. STEINHAUS, [1], *Sur le développement du produit de deux fonctions en une série de Fourier*, Bull. Intern. de l'Acad. de Cracovie (1913) p. 113—116.

[2], *Quelques propriétés des séries trigonométriques et des séries de Fourier* (en polonais), Rozprawy Akademji Umiejętności, Cracovie, 56 (1915) p. 175—225.

Th. STIELTJES, [1], *Sur les polynômes de Legendre*, Ann. de la Fac. de Sc. de Toulouse, 4 (1890) G. 1—17.

G. SZEGÖ, [1], *Entwickelung einer willkürrlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems*, Math. Zeitschr., 12 (1922) p. 61—94.

Ch. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, [1], *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, Bull. de l'Ac. de Belgique (classe de sciences) (1912) p. 702—718.

W. H. YOUNG, *On trigonometrical Series whose Cesàro Partial Summations oscillate finitely*, Roy. Soc. Proc. 89 (1913) p. 150—157.

[2], *On the Connexion between Legendre Series and Fourier Series*, Proc. Lond. Math. Soc., 18 (2) (1919) p. 141—162.

A. ZYGMUND, [1], *Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques.* Math. Zetschr., 24 (1925) p. 47—1 4.

[2], *Sur les séries trigonométriques sommables par le procedé de Poisson*, Math. Zeitschr., 25 (1926) p. 274—290.

[3], *Über einseitige Lokalisation*, Jahresb. d. Deutsch. Math. Ver., 39 (1930) p. 47—52.

[4], *A Note on Sine Series*, Quarterly Journal 1930.

(Reçu par la Rédaction le 10. 4. 1930).

Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen

von

J. SCHAUDER (Lwów).

Das Problem, welches in der vorliegenden Arbeit bis zu einem gewissen Abschluss gebracht wird, haben zuerst die Herren Birkhoff und Kellogg behandelt[1]). Die obengenannten Verfasser haben bereits die Richtigkeit des Fixpunktsatzes in den einfachsten Feldern erkannt, wobei aber noch für jedes einzelne Funktionenfeld der Beweis von Anfang an geführt werden musste[2]).

In meiner Arbeit über stetige Abbildungen in Funktionalräumen[3]) habe ich die Untersuchungen auf eine allgemeinere Grundlage gestellt und den Fixpunktsatz in allen solchen Räumen bewiesen, die eine lineare Basis besitzen[4]). Ich benützte dabei nur die Kompaktheit und Konvexität der in Betracht kommenden Mengen. In einer zweiten Arbeit[5]) wurden die Untersuchungen weitergeführt. Durch die dort eingeführten Begriffe der Schwachkompaktheit und Schwachstetigkeit konnten die Sätze

---

[1]) Invariant points in function space, Transactions of the Amer. Math. Soc. 23 (1922).

[2]) So z. B. für das Feld aller stetiger Funktionen, der Folgen $\{c_i\}$, deren „Quadratsumme" $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ endlich ist. Nicht erledigt wurde das Feld der integrierbaren, der mit α-ter Potenz integrierbaren Funktionen, das Feld der absolut konvergenten Reihen u. s. w.

[3]) Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Zeitschr. 26 (1927) p. 47 - 65.

[4]) Zur Definition einer linearen Basis siehe die unter [3]) zitierte Arbeit, insbesonde p. 47—51.

[5]) Diese Arbeit trägt den unglücklichen Titel: Bemerkungen zu meiner Arbeit „zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen", obwohl sie nur weitere neue Resultate enthält. Math. Zeitschr. 26 (1927) p. 417—431.