Jetzt werden wir folgendermaßen eine beschränkte Funktion $h(t)=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} h_\nu(t)$ definieren:

Zuerst definieren wir $h_1(t)$, indem wir $h_1(t)=\operatorname{sign}\varphi_{k_1}(t)$ (wir setzen $k_1=k_{r_1}$) auf der Menge E_1 und 0 in CE_1 setzen. Da unserer Voraussetzung zufolge die Orthogonalentwicklung von $h_1(t)$ wesentlich gleichmäßig konvergiert, können wir einen Index k_{r_2} finden, so daß die Ungleichung

$$\left|\int_0^1 h_1(x)\varphi_{k_{r_2}}(x)\,dx\right| M_{r_2}<\frac{1}{8}$$

besteht. Dann setzen wir $h_2(t)=\operatorname{sign}\varphi_{k_{r_2}}(t)$ in der Menge E_{r_2} und $h_2(t)=0$ in CE_{r_2}. Jetzt können wir einen Index k_{r_3} finden, so daß

$$\left|\int_0^1 [(h_1(x)+h_2(x)]\,\varphi_{k_{r_3}}(x)\,dx\right| M_{r_3}<\frac{1}{8}$$

ist, und wir setzen $h_3(t)=\operatorname{sign}\varphi_{k_{r_3}}(t)$ für $t\in E_{r_3}$ und $h_3(t)=0$ für $t\in CE_{r_3}$. Das weitere Verfahren ist evident. Es wird allgemein gelten

$$\left|\int_0^1\left[\sum_{\nu=1}^{n-1} h_\nu(x)\right]\varphi_{k_{r_n}}(x)\,dx\right| M_{r_n}<\frac{1}{8}. \tag{5}$$

Die Orthogonalentwicklung der Funktion $h(t)$, die, wie aus der Definition folgt, absolut genommen $\leqslant 1$ ist, ist nicht wesentlich gleichmäßig konvergent. Wir werden nämlich noch mehr zeigen: Das allgemeine Glied (2) der Entwicklung (1) strebt nicht wesentlich gleichmäßig gegen Null.

Mit R_n bezeichnen wir den n-ten Rest der Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} E_{r_\nu}$. Es gilt (nach (5), 3), 4)) die Abschätzung

$$\begin{aligned}M_{r_n}\left|\int_0^1 h(x)\varphi_{k_{r_n}}(x)dx\right| = M_{r_n}\Bigg|\int_0^1\left[\sum_{\nu=1}^{n-1} h_\nu(x)\right]\varphi_{k_{r_n}}(x)dx+\int_0^1 h_n(x)\varphi_{k_{r_n}}(x)dx+\\ +\int_0^1\sum_{\nu=n+1}^{\infty} h_\nu(x)\varphi_{k_{r_n}}(x)dx\Bigg|\geqslant-\frac{1}{8}+\\ +M_{r_n}\int_{E_{r_n}}|\varphi_{k_{r_n}}(x)|dx-M_{r_n}\int_{R_{n+1}}|\varphi_{k_{r_n}}(x)|\,dx\geqslant-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4},\end{aligned}$$

woraus die letztgenannte Behauptung ohne weiteres folgt. Diese widerspricht aber unserer Voraussetzung.

(Reçu par la Rédaction le 10. 4. 1930).

Zur Theorie der Fourierschen Doppelreihe

von

S. KACZMARZ (Lwów).

In dieser Note wird der folgende Satz aus der Theorie der einfachen Fourierschen Reihen auf die Fourierschen Doppelreihen übertragen:

Wenn die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x)$ die Bedingung

$$\sum_1^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\lg n<+\infty$$

erfüllen, dann konvergiert fast überall die Reihe

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_1^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ ^{1)}.$$

Zu diesem Zwecke sei $f(x,y)$ eine Funktion, die im Grundquadrat Q mit den Seiten $\langle 0,2\pi\rangle$, $\langle 0,2\pi\rangle$ quadratisch integrierbar ist. Ihre Doppelreihe sei

$$\sum_{m,n\,|\,0}^{\infty}\lambda_{mn}[a_{mn}\cos mx\cos ny+b_{mn}\sin mx\cos ny+c_{mn}\cos mx\sin ny+\\ +d_{mn}\sin mx\sin ny],$$

wo

$$\lambda_{mn}=\begin{cases}\frac{1}{4} & \text{für } m=n=0,\\ \frac{1}{2} & \text{für } m=0,\ n>0 \text{ oder } m>0,\ n=0\\ 1 & \text{für } m>0,\ n>0.\end{cases}$$

$$a_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(x,y)\cos mx\cos ny\,dx\,dy \quad \text{u. s. w.}$$

[1]) A. Plessner, Crelles Journal 155 (1925) p. 15—25.
A. Kolmogorow et G. Seliwerstow, Rend. R. Acc. dei Lin. 3 (1926) p. 307—310.

Die Teilsummen dieser Reihe werden von folgenden Formeln dargestellt:

$$s_{m,n}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int\int_Q f(\alpha,\beta)\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(x-\alpha)\sin\frac{2n+1}{2}(y-\beta)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}\sin\frac{y-\beta}{2}}\,d\alpha\,d\beta=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\int f(\alpha,\beta)\,K_{mn}(x,y,\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta\,.$$

Hilfssatz I. Es gilt fast überall

$$s_{m,n}(x,y)=O(\sqrt{\lg m\lg n})\,.$$

Beweis. Es sei

$$v_{mn}(x,y)=\max_{\substack{0\leq i\leq m\\0\leq k\leq n}}\frac{s_{i,k}(x,y)}{\sqrt{\lg i\lg k}}=\frac{s_{p,q}(x,y)}{\sqrt{\lg p\lg q}}\,,$$

wo $p=p(x,y)$, $q=q(x,y)$.

Da die Folge $v(x,y)$ monoton ist, genügt es zu beweisen, daß

$$I_{mn}=\int\int v_{mn}(x,y)\,dx\,dy\leqslant\text{Konstante}.$$

Wir haben

$$I_{mn}=\int\int\int\int f(\alpha,\beta)\frac{K_{pq}}{\sqrt{\lg p\lg q}}\,dx\,dy\,d\alpha\,d\beta=$$

$$=\int\int f(\alpha,\beta)\left[\int\int\frac{K_{pq}}{\sqrt{\lg p\lg q}}\,dx\,dy\right]d\alpha\,d\beta\,.$$

Wenn wir $A=\int\int f^2(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta$ setzen, so ist

$$I_{mn}^2\leqslant A\int\int\left[\int\int\frac{K}{\sqrt{\lg p\lg q}}\,dx\,dy\right]^2 d\alpha\,d\beta=$$

$$=A\int\ldots\int\frac{K_{pq}K_{p'q'}}{\sqrt{\lg p\lg q\lg p'\lg q'}}\,d\alpha\,d\beta\,dx\,dy\,dx'\,dy'$$

$$=A\int\int\int\int\frac{dx\,dy\,dx'\,dy'}{\sqrt{\lg p\lg q\lg p'\lg q'}}\int\int K_{pq}K_{p'q'}\,d\alpha\,d\beta\,.$$

Es ist aber

$$\int\int K_{pq}(x,y,\alpha,\beta)\,K_{p'q'}(x',y',\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta=K_{rs}(x,y,x',y')\,,$$

wo

$$r=\min[p(x,y),\ p'(x',y')]\,,$$
$$s=\min[q(x,y),\ q'(x',y')]\,.$$

Es ist also

$$I_{mn}^2\leqslant A\int\ldots\int\frac{K_{rs}}{\sqrt{\lg p\lg q\lg p'\lg q'}}\,dx\,dy\,dx'\,dy'\leqslant$$

$$\leqslant 4A\int\int dx\,dy\int\int\left|\frac{K_{rs}}{\lg p'\lg q'}\right|dx'\,dy'\,.$$

Da aber die Lebesguesche Konstante

$$\int|K_{m\,o}(x,\alpha)|\,d\alpha=O[\lg m]$$

ist, so ist

$$\int\int|K_{mn}(x,y,\alpha,\beta)|\,d\alpha\,d\beta=O[\lg m\,.\lg n]\,.$$

Wir erhalten also die Abschätzung

$$I_{mn}^2\leqslant 4A\,O(1)\,,$$

was zu beweisen war.

Hilfssatz II. Wenn wir zur Abkürzung die Bezeichnung einführen

$$C_{mn}^2=\lambda_{mn}^2(a_{mn}^2+b_{mn}^2+c_{mn}^2+d_{mn}^2)\,,$$

dann konvergiert unter der Voraussetzung

$$\sum_0^\infty\sum_0^\infty C_{mn}^2\lg m\lg n<\infty$$

fast überall die Teilfolge

$$S_{m,n}(x,y)=s_{2^{m^2},\,2^{n^2}}(x,y)$$

gegen $f(x,y)$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die Reihe

$$\sum\sum u_{i,k}\,,\quad\text{mit } u_{i,k}=S_{i,k}-S_{i,k-1}-S_{i-1,k}+S_{i-1,k-1}\,,$$

fast überall konvergiert. Durch Anwendung des Riesz-Fischerschen Satzes und der Schwarzschen Ungleichung erhalten wir

$$\int\int|u_{ik}|\,dx\,dy\leqslant\frac{1}{\pi}\sqrt{\sum_{s=2^{i^2}+1}^{2^{(i+1)^2}}\ \sum_{t=2^{k^2}+1}^{2^{(k+1)^2}}C_{st}^2}\,,$$

$$\left(\sum\sum\int\int u_{ik}\,dx\,dy\right)^2\leqslant\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\sum_1^\infty C_{st}^2\lg s\lg t\,.\sum_1^\infty\sum_1^\infty\frac{1}{i^2k^2}.$$

Es konvergiert also fast überall die Folge $S_{m,n}(x,y)$, da aber

$$\iint (f - s_{i,k})^2\, dx\, dy \longrightarrow 0,$$

so ist ihre Grenze $f(x,y)$.

Hilfssatz III. Wenn die numerische Folge

$$\sum\sum \alpha_{ik} \quad (\alpha_{ik} \geqslant 0),$$

konvergiert, dann existiert eine monotone Folge $\{p_n\}$

$$p_n < p_{n+1}, \quad p_n \longrightarrow \infty,$$

mit der Beschaffenheit, daß

$$\sum\sum \alpha_{ik} p_i p_k < \infty .$$

Beweis. Wir setzen

$$A_i = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik},$$

$$\sum_i A_i < +\infty .$$

Dann existiert eine monotone Folge $q_i \longrightarrow \infty$, so daß

$$\sum_1^{\infty} A_i q_i < +\infty .$$

Wir setzen weiter

$$B_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} q_i$$

und die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k$$

ist konvergent, es existiert also eine monotone Folge

$$r_k \longrightarrow \infty,$$

so daß

$$\sum B_k r_k < \infty .$$

Wenn wir mit p_n das Minimum von q_n, r_n bezeichnen, erhalten wir

$$\sum\sum \alpha_{ik} p_i p_k < \infty .$$

Jetz können wir den folgenden Hauptsatz beweisen:

Satz. *Wenn die Fourierkoeffizienten* a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik} *die Eigenschaft besitzen, daß*

$$\sum_1^{\infty}\sum_1^{\infty} C_{ik}^2 \lg i \lg k < \infty, \quad \sum_1^{\infty} C_{ok}^2 \lg k < \infty, \quad \sum_1^{\infty} C_{io}^2 \lg i < \infty$$

ist, dann konvergiert fast überall die Fouriersche Doppelfolge

$$s_{m,n}(x,y).$$

Beweis. Nach Hilfssatz II konvergiert fast überall die Teilfolge $S_{m,n}(x,y)$. Wir betrachten $s_{m,n}$, wo m, n die Ungleichung erfüllen

$$2^{i^2} \leqslant m \leqslant 2^{(i+1)^2}, \quad 2^{k^2} \leqslant n \leqslant 2^{(k+1)^2}.$$

Es bleibt zu zeigen, daß die Differenz

$$s_{m,n} - S_{i,k}$$

mit $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ gegen Null strebt.

Wir zeigen zuerst, daß

$$s_{m,2^{k^2}} - S_{i,k} \longrightarrow 0.$$

Es ist in der Tat auf Grund der Abelschen Transformation und des Hilfssatzes III

$$s_{m,2^{k^2}} - S_{i,k} = \sum_{2^{i^2}+1}^{m} \sum_1^{2^{k^2}} \lambda_{rs} (a_{rs} \cos rx \cos sy + \ldots + d_{rs} \sin rx \sin ry)$$

$$= \sum\sum A_{rs} \frac{1}{\sqrt{\lg m \lg s \,.\, p_m \,.\, p_s}}, \text{ wenn}$$

$$A_{rs}^2 = \lambda_{rs}^2 (a_{rs} \cos rx \cos sy + \ldots + d_{rs} \sin rx \sin ry)^2 \lg m \lg s \,.\, p_m \,.\, p_s$$

und daher

$$s_{m,2^{k^2}} - S_{i,k} = b_m \sum_{s=1}^{2^{k^2}} \varDelta b_s \,.\, \sigma_{m,s} + b_m \,.\, b_{2^{k^2}+1} \,.\, \sigma_{m,2^{k^2}},$$

wo

$$b_s = \frac{1}{\sqrt{p_s \lg s}}, \quad \sigma_{m,s} = \sum_{\mu=2^{i^2}+1}^{m} \sum_{\nu=1}^{s} A_{\mu\nu} .$$

Das zweite Glied rechts ist gleich $o(1)$ nach Hilfssatz I, das erste ist gleich

$$b_m \sum_{1=s}^{2^{k^2}} (\sigma_{m,1} + \sigma_{m,2} + \ldots + \sigma_{m,s}) \varDelta^2 b_s + (\sigma_{m,1} + \ldots + \sigma_{m,2^{k^2}}) \,.\, b_m .$$

Das zweite Glied ist ebenfalls gleich $o(1)$, und dasselbe betrifft das erste Glied auf Grund der Relationen

$$\sum s\,\Delta^2 b_s < +\infty$$

$$\sigma_{m,1} + \sigma_{m,2} + \ldots + \sigma_{m,p} = O\left(p\sqrt{\lg m}\right).$$

Ganz analog erhalten wir

$$s_{m,n} - s_{m,2^k} \longrightarrow 0.$$

(Reçu par la Rédaction le 14. 4. 1930).

Sur la théorie riemannienne de certains systèmes orthogonaux. I.

par

A. ZYGMUND (Varsovie).

Chapitre I.

§ 1.

1. Soit $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ une suite de fonctions réelles, définies dans un intervalle (a, b). Si l'on a

$$\int_a^b \varphi_m \varphi_n \, dx \begin{matrix} = 0 \ (m \neq n) \\ = 1 \ (m = n) \end{matrix} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

on dit que les fonctions $\varphi_i \, (i = 0, 1, \ldots)$ forment un système orthogonal et normal dans l'intervalle (a, b). On connaît beaucoup de systèmes orthogonaux: système trigonométrique, fonctions de Sturm-Liouville, polynômes de Legendre, fonctions de Bessel etc.

Dans la théorie des séries de la forme

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$$

on peut distinguer deux points de vue. Le premier d'eux — on peut l'appeler celui de Fourier — s'occupe des séries (1), où les coefficients a_n sont donnés par la formule

$$a_n = \int_a^b f \varphi_n \, dx,$$

f désignant une fonction définie dans (a, b). Dans ce cas on appelle les a_n – coefficients de Fourier de f, et la série (1) – série de