die Koeffizienten einer jeden integrierbaren Funktion gegen Null streben, es müsste also $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varphi_\nu(t_0) = 0$ sein und das ist ein Widerspruch. Aus dem vorigen folgt, daß die entsprechende Menge A, da sie jedenfalls M enthält, von positivem Maße sein muss. Nun können wir den Satz 2 bezw. 2′ anwenden.

Der Satz 4 ist in gewissem Sinne, wenn wir beliebige gleichmässig beschränkte Orthogonalsysteme betrachten, nicht weiter verallgemeinerungsfähig. Einerseits wissen wir nach ihm, daß zu jedem solchen System eine beschränkte Funktion mit der Divergenzpunktmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums existiert. Andererseits existieren gleichmässig beschränkte Orthogonalsysteme, bei welchen diese Divergenzpunktmengen immer Nullmengen sein müssen. Ein solches ist z. B. das bekannte Rademachersche Orthogonalsystem [15]), welches die Eigenschaft hat, daß die Entwicklung jeder quadratisch integrierbaren Funktion fast überall konvergiert.

[15]) Ich verstehe darunter das von Herrn H. Rademacher definierte Orthogonalsystem; H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Math. Ann. 87 (1922), insbes. p. 130—138.

(Reçu par la Rédaction le 9. 4. 1930).

Eine Bemerkung über Divergenzphänomene von Orthogonalentwicklungen

von

W. ORLICZ (Lwów).

Fragt man sich über Divergenzphänomene von Orthogonalentwicklungen gewisser Funktionenklassen bei beliebigen Orthogonalsystemen, so ist von vornherein zu erwarten, daß man keine weitgehenden Aussagen wird machen können. So kann man bekanntlich nicht behaupten, daß für jedes Orthogonalsystem eine *stetige* Funktion existiert, deren Orthogonalentwicklung in mindestens einem Punkte divergiert. Ebensowenig darf man im allgemeinen die Existenz einer stetigen Funktion behaupten, deren Orthogonalentwicklung im Definitionsintervall nicht *gleichmäßig* konvergiert [1]). Wie stehen nun die Sachen bei der allgemeineren Klasse der *beschränkten* Funktionen? Unter zusätzlichen Bedingungen von recht allgemeinem Typus (gleichmäßige Beschränktheit der Funktionen des Systems [2]), Abgeschlossenheit des Systems im Bereiche der quadratisch integrierbaren Funktionen [3]) existiert immer eine *beschränkte* Funktion, deren Orthogonalentwicklung in mindestens einem Punkte divergiert. Im Allgemeinen ist aber auch das nicht der Fall. Das lehrt das folgende triviale Beispiel:

Wir setzen die n-te Funktion des Systems $\varphi_n(t)$ gleich $\sqrt{2^{n+1}}$ in $\langle\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\rangle$ und sonst im Intervalle $\langle 0,1\rangle$ gleich 0. Offensichtlich

[1]) Das bekannte Haarsche Orthogonalsystem (A. Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann. 69 (1910) Kap. III, p. 361—369) hat die Eigenschaft, daß die Entwicklung jeder stetigen Funktion gleichmäßig konvergiert.

[2]) W. Orlicz, Einige Bemerkungen über die Divergenzpunktmengen von Orthogonalentwicklungen, Studia Math. 2 (1930) p. 72—86, Satz 4.

[3]) W. Orlicz, Zur Theorie der Orthogonalreihen, Bull. Acad. Pol. Ser. A, (1927) p. 95, Satz 2.

bilden die Funktionen $\{\varphi_n(t)\}$ ein Orthogonalsystem und man sieht auch ohne Weiteres, daß die Orthogonalentwicklung jeder integrierbaren Funktion *überall* konvergiert.

Der Reihe nach kann man sich jetzt noch für gleichmäßige Konvergenz von Orthogonalentwicklungen beschränkter Funktionen interessieren. In dieser Hinsicht kann man die folgende, allgemeine Tatsache behaupten:

Satz. *Für jedes Orthogonalsystem $\{\varphi_n(t)\}$ existiert eine beschränkte Funktion, deren Orthogonalentwicklung nicht wesentlich gleichmäßig* [4] *konvergiert.*

Beweis. Wir werden zwei Fälle unterscheiden:

$$1^\circ.\quad \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x)|\,dx > 0,$$

$$2^\circ.\quad \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x)|\,dx = 0.$$

Zuerst setzen wir voraus, daß der Fall 1° vorliegt.

Wir nehmen an, daß die Orthogonalentwicklung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 h(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx\,.\,\varphi_\nu(t) \tag{1}$$

jeder beschränkten Funktion $h(t)$ wesentlich gleichmäßig konvergiert. Da für jedes beschränkte $h(t)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h(x)\,\varphi_n(x)\,dx\,.\,\varphi_n(t) = 0 \tag{2}$$

gleichmäßig in t nach Ausschluß einer Nullmenge gilt, so folgt daraus nach einer bekannten Schlußweise [5] die Existenz einer Zahl $M>0$, so daß fast überall in $\langle 0,1\rangle$ die Ungleichung

$$\int_0^1 |\varphi_n(x)|\,dx\,.\,|\varphi_n(t)| \leqslant M \qquad n=1,2,3\ldots \tag{3}$$

[4] Eine Funktionenfolge $\{f_i(t)\}$ heißt wesentlich gleichmäßig konvergent, wenn die Konvergenz, nach Ausschluß höchstens einer Nullmenge, gleichmäßig im Definitionsintervalle stattfindet.

Überhaupt, man sagt, eine Eigenschaft bestehe „wesentlich", wenn sie in der ganzen Definitionsmenge mit Ausnahme einer Nullmenge besteht.

[5] Vgl. H. Hahn, Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale, Mitt. II, Denkschr. d. Ak. d. Wiss. in Wien, 93 (1916).

besteht. Es bezeichne $a>0$ die untere Schranke aller Zahlen $\int_0^1 |\varphi_n(x)|\,dx$; aus (3) folgt $|\varphi_n(t)| \leqslant \frac{M}{a}$, dieses System ist also wesentlich gleichmäßig beschränkt. Es gibt aber für ein solches System eine Menge A von positivem Maße mit der Eigenschaft, daß für jedes $t \in A$ eine beschränkte Funktion existiert, deren Orthogonalentwicklung in t divergiert [6]. Es sei $\overline{A}$ eine Untermenge von A von positivem Maße, auf welcher alle Funktionen $\varphi_n(t)$ stetig sind [7]. Wenn $h(t)$ eine beschränkte Funktion bedeutet, deren Orthogonalentwicklung in einem zu $\overline{A}$ gehörigen Punkte divergiert, so kann auch offensichtlich diese Entwicklung, im Gegensatz zu der Voraussetzung, nicht wesentlich gleichmäßig konvergieren.

Jetzt gehen wir von der Voraussetzung 2° aus.

Aus 2° folgt die Existenz einer Teilfolge $\{\varphi_{p_n}(t)\}$, für welche

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{p_n}(t) = 0 \tag{4}$$

fast überall gilt. Nach dem bekannten Egoroffschen Satze [8] existiert zu jedem ε eine Menge E, deren Maß $>1-\varepsilon$ ist, auf welcher die Folge $\{\varphi_{p_n}(t)\}$ gleichmäßig konvergiert. Indem wir diesen Satz, den Lusinschen Satz und die normierende Bedingung $\int_0^1 \varphi_n^2(x)\,dx = 1$ auf (4) anwenden, beweisen wir leicht die Existenz einer Folge $\{E_n\}$ und einer Teilfolge $\{\varphi_{k_n}(t)\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1) $E_i\,.\,E_j = 0 \qquad i \neq j$,
2) $\varphi_{k_n}(t)$ ist auf der Menge E_n beschränkt,
3) $\int_{E_n} \varphi_{k_n}^2(x)\,dx \geqslant \frac{1}{2}$,
4) es ist $\int_{\sum_{\nu=n+1}^{\infty} E_\nu} |\varphi_{k_n}(x)|\,dx\,.\,M_n < \frac{1}{8}$,

wo M_n die wesentliche obere Grenze der Funktion $|\varphi_{k_n}(t)|$ auf der Menge E_n bezeichnet.

[6] l. c. [2], Satz 4, Beweis.

[7] Die Existenz einer solchen Menge folgt leicht aus dem bekannten Lusinschen Satz (Einen einfachen Beweis des Lusinschen Satzes findet man bei L. W. Cohen, A new proof of Lusin's theorem, Fund. Math. 9 (1927) p. 122—123).

[8] D. Th. Egoroff, Sur les suites de fonctions mesurables, C. R. 152 (1911) p. 244.

Jetzt werden wir folgendermaßen eine beschränkte Funktion $h(t)=\sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu(t)$ definieren:

Zuerst definieren wir $h_1(t)$, indem wir $h_1(t)=\operatorname{sign}\varphi_{k_1}(t)$ (wir setzen $k_1=k_{r_1}$) auf der Menge E_1 und 0 in CE_1 setzen. Da unserer Voraussetzung zufolge die Orthogonalentwicklung von $h_1(t)$ wesentlich gleichmäßig konvergiert, können wir einen Index k_{r_2} finden, so daß die Ungleichung

$$\left|\int_0^1 h_1(x)\varphi_{k_{r_2}}(x)\,dx\right| M_{r_2}<\frac{1}{8}$$

besteht. Dann setzen wir $h_2(t)=\operatorname{sign}\varphi_{k_{r_2}}(t)$ in der Menge E_{r_2} und $h_2(t)=0$ in CE_{r_2}. Jetzt können wir einen Index k_{r_3} finden, so daß

$$\left|\int_0^1 [(h_1(x)+h_2(x)]\,\varphi_{k_{r_3}}(x)\,dx\right| M_{r_3}<\frac{1}{8}$$

ist, und wir setzen $h_3(t)=\operatorname{sign}\varphi_{k_{r_3}}(t)$ für $t\in E_{r_3}$ und $h_3(t)=0$ für $t\in CE_{r_3}$. Das weitere Verfahren ist evident. Es wird allgemein gelten

$$\left|\int_0^1\left[\sum_{\nu=1}^{n-1} h_\nu(x)\right]\varphi_{k_{r_n}}(x)\,dx\right| M_{r_n}<\frac{1}{8}. \tag{5}$$

Die Orthogonalentwicklung der Funktion $h(t)$, die, wie aus der Definition folgt, absolut genommen $\leqslant 1$ ist, ist nicht wesentlich gleichmäßig konvergent. Wir werden nämlich noch mehr zeigen: Das allgemeine Glied (2) der Entwicklung (1) strebt nicht wesentlich gleichmäßig gegen Null.

Mit R_n bezeichnen wir den n-ten Rest der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} E_{r_\nu}$. Es gilt (nach (5), 3), 4)) die Abschätzung

$$M_{r_n}\left|\int_0^1 h(x)\varphi_{k_{r_n}}(x)dx\right|=M_{r_n}\left|\int_0^1\left[\sum_{\nu=1}^{n-1} h_\nu(x)\right]\varphi_{k_{r_n}}(x)dx+\int_0^1 h_n(x)\varphi_{k_{r_n}}(x)dx+\right.$$
$$\left.+\int_0^1\sum_{\nu=n+1}^{\infty} h_\nu(x)\varphi_{k_{r_n}}(x)dx\right|\geqslant-\frac{1}{8}+$$
$$+M_{r_n}\int_{E_{r_n}}|\varphi_{k_{r_n}}(x)|dx-M_{r_n}\int_{R_{n+1}}|\varphi_{k_{r_n}}(x)|\,dx\geqslant-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4},$$

woraus die letztgenannte Behauptung ohne weiteres folgt. Diese widerspricht aber unserer Voraussetzung.

(Reçu par la Rédaction le 10. 4. 1930).

Zur Theorie der Fourierschen Doppelreihe

von

S. KACZMARZ (Lwów).

In dieser Note wird der folgende Satz aus der Theorie der einfachen Fourierschen Reihen auf die Fourierschen Doppelreihen übertragen:

Wenn die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x)$ die Bedingung

$$\sum_1^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\lg n<+\infty$$

erfüllen, dann konvergiert fast überall die Reihe

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_1^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ ^{1)}.$$

Zu diesem Zwecke sei $f(x,y)$ eine Funktion, die im Grundquadrat Q mit den Seiten $\langle 0,2\pi\rangle$, $\langle 0,2\pi\rangle$ quadratisch integrierbar ist. Ihre Doppelreihe sei

$$\sum_{m,n\,|\,0}^{\infty}\lambda_{mn}[a_{mn}\cos mx\cos ny+b_{mn}\sin mx\cos ny+c_{mn}\cos mx\sin ny+$$
$$+d_{mn}\sin mx\sin ny],$$

wo

$$\lambda_{mn}=\begin{cases}\frac{1}{4} & \text{für } m=n=0,\\ \frac{1}{2} & \text{für } m=0,\ n>0 \text{ oder } m>0,\ n=0\\ 1 & \text{für } m>0,\ n>0.\end{cases}$$

$$a_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(x,y)\cos mx\cos ny\,dx\,dy \quad \text{u. s. w.}$$

[1]) A. Plessner, Crelles Journal 155 (1925) p. 15—25.
A. Kolmogorow et G. Seliwerstow, Rend. R. Acc. dei Lin. 3 (1926) p. 307—310.