Einige Bemerkungen über die Divergenzpunktmengen von Orthogonalentwicklungen

von

W. ORLICZ (Lwów).

Angenommen, ein Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ besitze die folgende Eigenschaft:

Zu jedem Punkte einer unendlichen Punktmenge K des Definitionsintervalls existiert eine Funktion, die wir z. B. als stetig voraussetzen, deren Orthogonalentwicklung in diesem Punkte divergiert. Ein allgemeiner Satz der Herren S. Banach und H. Steinhaus[1]) über Kondensation der Singularitäten gewährleistet in diesem Falle die Existenz *einer* stetigen Funktion, deren Entwicklung in abzählbar vielen Punkten divergiert. Es beruht also in diesem Falle die Kondensation des Divergenzphänomenes auf dem Übergange von den diskreten Divergenzpunkten zu einer abzählbaren Divergenzmenge. Die erwähnte Methode gestattet aber nicht ohne weiteres die Kondensation der Divergenzpunkte zu einer Menge von der Mächtigkeit des *Kontinuums*.

Diese Arbeit bringt einige Bemerkungen zu dieser Frage.

§ 1.

Unter der Oszillation der Folge $\{s_\nu\}$ verstehen wir

$$\lim_{N\to\infty} (\underset{n,\, m>N}{\text{O. G.}} |s_n - s_m|) = \omega.$$

Natürlich konvergiert die Folge dann und nur dann, wenn $\omega = 0$; sie ist dann und nur dann nicht beschränkt, wenn $\omega = \infty$.

Hilfssatz 1. *Gegeben sei eine Folge $\{f_i(t)\}$ von Funktionen, die auf einer perfekten Menge D definiert und stetig sind. Ist in*

1) S. Banach et H. Steinhaus, Sur le principe de la condensation de singularités, Fund. Math. 9 (1937) p. 50—62, Théorème I, II. Vgl. auch Théorème 1, p. 57.

einer in D enthaltenen und überalldichten Menge die Oszillation dieser Folge $\geqslant \omega > 0$, so divergiert $\{f_i(t)\}$ in einer Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums[2]).

Beweis. Es bezeichne $\omega(t)$ die Oszillation der Folge $\{f_i(t)\}$ im Punkte t. Wir setzen

$$F^r_{nm} = E\left[|f_n(t) - f_m(t)| \leqslant \omega - \frac{1}{r}\right],\quad F^r_N = \prod_{m\geqq N}\prod_{n\geqq N} F^r_{nm}.$$

Die Mengen F^r_N sind abgeschlossen, da offenbar alle F^r_{nm} abgeschlossen sind. Die Menge aller der Punkte, wo $\omega(t) < \omega$, ist mit $E = \sum\limits_{r=1}^{\infty}{}' \sum\limits_{N=1}^{\infty}{}' F^r_N$ identisch. Wäre nun eine von den Mengen F^r_N nicht nirgendsdicht, so hieße das, daß sie in einem Stück[3]) von D überalldicht, also, wegen der Abgeschlossenheit, mit diesem Stücke identisch ist. Nach der Definition von F^r_N würde daraus in diesem Stücke $\omega(t) \leqslant \omega - \frac{1}{r}$ folgen, im Widerspruch mit der Voraussetzung. Es folgt also aus dem Vorhergehenden, daß E inbezug auf D von der ersten Baireschen Kategorie ist. Die Punktmenge, wo $\omega(t) \geqslant \omega$, ist daher von der zweiten Kategorie, also von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Der obige Beweis wurde unter der stillschweigenden Annahme geführt, daß ω endlich ist. Für $\omega = +\infty$ kann er wörtlich wiederholt werden, nur muß man statt der gegen die endliche Zahl ω konvergenten Folge $\left\{\omega - \frac{1}{r}\right\}$ irgendeine feste gegen $+\infty$ konvergierende Zahlenfolge, etwa $\{r\}$, verwenden.

Satz 1. *Gegeben sei ein im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ definiertes Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$. Existiert zu jedem Punkte t dieses Intervalls eine stetige Funktion, deren Orthogonalentwicklung in t divergiert, so existiert auch eine stetige Funktion, deren Divergenzpunktmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums ist.*

Beweis. Jedem Punkte des Intervalls $\langle 0, 1\rangle$ ordnen wir eine bestimmte stetige Funktion zu, deren Entwicklung in diesem

2) Dieser Hilfssatz ist die Verallgemeinerung eines zuerst von H. Steinhaus bewiesenen Satzes; (H. Steinhaus, Rozwiązanie pewnego zagadnienia Fatou (poln.), Rozpr. Krak., Akad. Um. Ser. A, 58 (1918)).

3) Unter einem Stück der Menge A verstehen wir den Durchschnitt von A mit einem Intervalle.

Punkte divergent ist, und zwar wählen wir eine Funktion, deren Entwicklung die Oszillation $= \varphi$ hat, sofern eine solche existiert; sonst eine beliebige. Mit A_∞ bezeichnen wir die Menge derjenigen Punkte, denen Funktionen mit der Oszillation $= \infty$ zugeordnet worden sind. Mit D bezeichnen wir weiter die perfekte Menge, von positivem Maße, auf welcher alle Funktionen $\varphi_i(t)$ gleichzeitig stetig sind. Die Existenz einer solchen Menge ist durch den bekannten Lusinschen Satz[4]) sichergestellt.

Zuerst setzen wir voraus, daß $D.A_\infty$ eine in einem Stücke $\overline{D} = D.\delta$ überalldichte Menge ist. Indem wir einen allgemeinen Satz von Banach-Steinhaus[5]) anwenden, vergewissern wir uns in diesem Falle der Existenz einer stetigen Funktion, deren Orthogonalentwicklung in einer in $\overline{D}$ überalldichten Menge die Oszillation ∞ aufweist. Aus unserem Hilfssatze folgt weiter, daß diese Entwicklung in einer Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums divergiert.

Nun, setzen wir voraus, $D.A_\infty$ sei eine inbezug auf D nirgendsdichte Menge. Mit $\{g_\nu(t)\}$ bezeichnen wir eine abzählbare Menge von stetigen Funktionen, die überalldicht ist im B-Raume[6]) der stetigen Funktionen. Wir behaupten: Es existiert eine Funktion $g_\nu(t)$ mit einer Divergenzpunktmenge von der zweiten Kategorie inbezug auf D. Denn anderenfalls existiert ein $t_0 \in [D - D.A_\infty]$, in welchem die Orthogonalentwicklung einer jeden Funktion $g_\nu(t)$ konvergiert. Da außerdem in t_0 nach einem Satze von S. Banach[7]) für jede stetige Funktion die Ungleichung $|s_n[g,t_0]| \leqslant K \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |g(x)|$ besteht, so müßte überhaupt die Orthogonalentwicklung einer jeden stetigen Funktion in t_0 konvergieren, was der Voraussetzung widerspricht.

---

[4]) Vgl. z. B. L. W. Cohen, A new proof of Lusin's theorem, Fund. Math. 9 (1927) p. 122—123.

[5]) l. c.[1]) Théorème I, Théorème 1'.

[6]) Unter einem B-Raum verstehen wir einen linearen, normierten, vollständigen Raum. Vgl. S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales, Fund. Math. 3 (1922) p. 134—136.

Bekanntlich bilden die stetigen Funktionen einen B-Raum, wenn man die Norm durch $\|g(x)\| = \max\limits_{\langle 0\,1 \rangle} |g(t)|$ definiert.

[7]) Vgl. die unter[6]) zitierte Arbeit. Der Satz ist dort nicht explicite formuliert. Der Beweis der uns interessierenden Tatsache ist dort im Beweise des Satzes 5 enthalten (s. p. 157—160).

§ 2.

Eine konvergenzerhaltende Limitierungsmethode[8]) mit der Matrix $T = (a_{pq})$ werden wir im Folgenden kurz T-Methode nennen. Die Folge $t_p = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{p\nu} d_\nu$ wollen wir als Folge der T-Transformierten von $\{d_\nu\}$ bezeichnen.

Hilfssatz 2. *Es seien abzählbar unendlich viele T-Methoden gegeben; $T_i = (a_{pq}^{(i)})$ seien die ihnen entsprechenden Matrizen. Dann und nur dann existiert eine Folge $\{d_\nu\}$, $|d_\nu| \leqslant 1$, für welche die Folge der T_i-Transformierten bei jedem i eine Oszillation $\geqslant \omega_0$ aufweist, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:*

Bei jedem i und beliebigen N, $\varepsilon > 0$ existiert eine Indizesfolge $\{q_r^{(i)}\}$, so daß

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty} |a_{q_r^{(i)}\nu}^{(i)}| > \frac{\omega_0}{2} - \varepsilon \tag{1}$$

für $r = 1, 2, 3 \ldots$

Beweis. 1°. Die Bedingung (1) ist *notwendig*. Denn, wenn für ein i_0, ε_0, N_0 die Bedingung (1) nicht erfüllt ist, so heißt das, daß für jedes $p \geqslant P$, die Ungleichung

$$\sum_{\nu=N_0+1}^{\infty} |a_{p\nu}^{(i_0)}| \leqslant \frac{\omega_0}{2} - \varepsilon_0 \tag{2}$$

besteht. Nun existiert aber nach einer bekannten Eigenschaft der T-Methoden

$$\lim_{p\to\infty} a_{pq}^{(i)} = A_q^{(i)} \tag{3}$$

bei jedem q, i. Aus (2), (3) folgt also, daß für jede beschränkte Folge (deren Glieder absolut genommen $\leqslant 1$ sind) die Folge der T_{i_0}-Transformierten eine Oszillation $\leqslant \omega_0 - 2\varepsilon_0$ aufweist und das ist ein Widerspruch mit unserer Voraussetzung.

2°. Die Bedingung (1) ist *hinreichend*. Ohne die Allgemeinheit des Beweises zu beschränken, können wir voraussetzen, daß

$$\lim_{p\to\infty} a_{pq}^{(i)} = 0, \tag{3'}$$

bei jedem i, q. Wir setzen voraus, daß die Bedingung (1) erfüllt ist, und werden eine Folge $\{d_\nu\}$, $|d_\nu| \leqslant 1$ konstruieren, für welche bei jedem i die Folge der T_i-Transformierten eine Oszillation $\geqslant \omega_0$ hat.

---

[8]) Vgl. I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, J. f. r. u. ang. Mathem. 151 (1921) p. 79—111, insbes. p. 79—82.

Es sei $\{\varepsilon_i\}$ eine fest gewählte, monotone Nullfolge von positiven Zahlen.

Nach (1), (3′) können wir die Indizes $N_1^{(1)}$, $K_1^{(1)}$, $p_1^{(1)}$ so finden, daß die Ungleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{N_1^{(1)}} |a^{(1)}_{p_1^{(1)}\nu}| < \frac{\varepsilon_{1+1}}{4},$$

$$\sum_{\nu=N_1^{(1)}+1}^{K_1^{(1)}} |a^{(1)}_{p_1^{(1)}\nu}| > \frac{\omega_0}{2} - \frac{\varepsilon_{1+1}}{2},$$

$$\sum_{\nu=K_1^{(1)}+1}^{\infty} |a^{(1)}_{p_1^{(1)}\nu}| < \frac{\varepsilon_{1+1}}{4},$$

bestehen. Weiter finden wir nach (1), (3′) die Indizes $N_1^{(2)}$, $K_1^{(2)}$, $p_1^{(2)}$ $(K_1^{(1)} \leqslant N_1^{(2)} < K_1^{(2)})$, so daß

$$\sum_{\nu=1}^{N_1^{(2)}} |a^{(2)}_{p_1^{(2)}\nu}| < \frac{\varepsilon_{2+1}}{4},$$

$$\sum_{\nu=N_1^{(2)}+1}^{K_1^{(2)}} |a^{(2)}_{p_1^{(2)}\nu}| > \frac{\omega_0}{2} - \frac{\varepsilon_{2+1}}{2},$$

$$\sum_{\nu=K_1^{(2)}+1}^{\infty} |a^{(2)}_{p_1^{(2)}\nu}| < \frac{\varepsilon_{2+1}}{4}.$$

Nun kehren wir zur Methode T_1 zurück und bestimmen $N_2^{(1)}$, $K_2^{(1)}$, $p_2^{(1)}$ $(K_1^{(2)} \leqslant N_2^{(1)} < K_2^{(1)})$, so daß

$$\sum_{\nu=1}^{N_2^{(1)}} |a^{(1)}_{p_2^{(1)}\nu}| < \frac{\varepsilon_{1+2}}{4},$$

$$\sum_{\nu=N_2^{(1)}+1}^{K_2^{(1)}} |a^{(1)}_{p_2^{(1)}\nu}| > \frac{\omega_0}{2} - \frac{\varepsilon_{2+1}}{2},$$

$$\sum_{\nu=K_2^{(1)}+1}^{\infty} |a^{(1)}_{p_2^{(1)}\nu}| < \frac{\varepsilon_{2+1}}{4}.$$

Jetzt wenden wir uns der Methode T_2, T_3, T_2, T_1 u. s. w. zu. Unser weiteres Vorgehen ist evident: Indem wir immer nach der Diagonalmethode die Doppelindizesfolge in eine Einzelfolge anordnen und unter Benutzung der Eigenschaften (1), (3′) weiter verfahren, vergewissern wir uns der Existenz von Indizesfolgen $K_r^{(i)}$, $N_r^{(i)}$, $p_r^{(i)}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{N_r^{(i)}} |a^{(i)}_{p_r^{(i)}\nu}| < \frac{\varepsilon_{i+r}}{4},\\ &\sum_{\nu=N_r^{(i)}+1}^{K_r^{(i)}} |a^{(i)}_{p_r^{(i)}\nu}| > \frac{\omega_0}{2} - \frac{\varepsilon_{i+r}}{2},\\ &\sum_{\nu=K_r^{(i)}+1}^{\infty} |a^{(i)}_{p_r^{(i)}\nu}| < \frac{\varepsilon_{i+r}}{4}.\end{aligned}\right.$$

Die Indizesfolge genügt dabei den Ungleichungen:

$$N_1^{(1)} < K_1^{(1)} \leqslant N_1^{(2)} < K_1^{(2)} \leqslant N_2^{(1)} < K_2^{(1)} \leqslant N_1^{(3)} < K_1^{(3)} \ldots.$$

Nun setzen wir bei jedem i, r

$$d_\nu = (-1)^r \operatorname{sign} a^{(i)}_{p_r^{(i)}\nu}$$

für alle ν, die zwischen $N_r^{(i)}$ und $K_r^{(i)}$ ($N_r^{(i)}$ inkl.) liegen,

$$d_\nu = 0$$

für alle anderen Indizes. Setzen wir weiter $t_r^{(i)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a^{(i)}_{p_r^{(i)}\nu} d_\nu$, so gilt

$$|t_r^{(i)} - t_{r+1}^{(i)}| \geqslant -\left|\sum_{\nu=1}^{N_r^{(i)}} a^{(i)}_{p_r^{(i)}} d_\nu - \sum_{\nu=1}^{N_{r+1}^{(i)}} a^{(i)}_{p_{r+1}^{(i)}} d_\nu\right| + \sum_{\nu=N_r^{(i)}}^{K_r^{(i)}} |a^{(i)}_{p_r^{(i)}\nu}| +$$

$$+ \sum_{\nu=N_{r+1}^{(i)}}^{K_{r+1}^{(i)}} |a^{(i)}_{p_{r+1}^{(i)}\nu}| - \left|\sum_{\nu=K_r^{(i)}+1}^{\infty} a^{(i)}_{p_r^{(i)}} d_\nu - \sum_{\nu=K_{r+1}^{(i)}+1}^{\infty} a^{(i)}_{p_{r+1}^{(i)}} d_\nu\right| > \omega_0 - 2\,\varepsilon_{i+r}.$$

Daraus folgt aber, daß bei jedem i die Oszillation der Folge der T_i-Transformierten größer oder gleich ω_0 ist. [9])

[9]) Mit Hilfe des Hilfssatzes 2 kann man leicht den folgenden Satz beweisen: Gegeben sei eine Menge M von der Mächtigkeit des Kontinuums linearer, konvergenzerhaltender Limitierungsmethoden $T(\tau) = (a_{pq}(\tau))$. Dabei durchläuft τ etwa das Interval $\langle 0 1 \rangle$ und es seien $a_{pq}(\tau)$ stetige Funktionen des Parameters τ. Existiert bei jedem τ eine beschränkte Folge, die mit der Methode $T(\tau)$ nicht limitierbar ist, so existiert auch *eine* beschränkte Folge die mit *keiner* T-Methode einer gewissen Teilmenge N von M limitierbar ist, wobei N ebenfalls die Mächtigkeit des Kontinuums hat.

Satz 2. *Gegeben sei ein in $\langle 0,1\rangle$ definiertes Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$. Existiert zu jedem Punkte t dieses Intervalles eine beschränkte Funktion, deren Orthogonalentwicklung in t divergiert, so existiert auch eine beschränkte Funktion, deren Divergenzpunktmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums ist.*

Beweis. Mit D bezeichnen wir dieselbe perfekte Menge wie im Beweise von Satz 1; ferner setzen wir noch $K_n(x,t) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x)\varphi_\nu(t)$. In jedem Punkte t der Menge D besteht eine von zwei Möglichkeiten:

(a) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\eta > 0$, so daß für jede Menge E mit dem Maße $\leqslant \eta$ die Ungleichung

$$\int_E |K_n(x,t)|\, dx \leqslant \varepsilon$$

für alle n besteht.

(b) Es existiert ein $\varepsilon_0(t) > 0$ mit der Eigenschaft, daß zu jedem Index N und beliebigen $\eta > 0$ eine Menge E mit dem Maße $< \eta$ und ein Index $n_0 > N$ existieren, für welche die Ungleichung

$$\left| \int_E K_{n_0}(x,t)\, dx \right| > \varepsilon_0(t)$$

erfüllt ist.

Zuerst setzen wir voraus, die Menge der Punkte mit der Eigenschaft (a) sei inbezug auf D von der zweiten Kategorie. Es sei in t_0 die Eigenschaft (a) erfüllt. Da der Voraussetzung zufolge eine beschränkte Funktion existiert, deren Orthogonalentwicklung in t_0 divergiert, so folgt daraus die Existenz eines Intervalles δ mit *rationalen* Endpunkten, für welche

$$\lim_{n\to\infty} \int_\delta K_n(x,t)\, dx \tag{5}$$

für $t = t_0$ *nicht* existiert.[10]) Die Menge derjenigen t, für welche bei gegebenem δ der Grenzwert (5) in D nicht existiert, ist eine Borelsche Menge; also abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums. Es ist also klar, daß mindestens für ein Intervall (mit rationalen Endpunkten) (5) in einer Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums divergiert.

[10]) Vgl. dazu H. Hahn, Über Folgen linearer Operationen, Monatshefte f. Math. u. Phys. 32 (1922), Beweis des Satzes XXI.

Ist nun (a) nicht in einer Menge der zweiten Kategorie erfüllt, so gilt (b) in einer Menge der zweiten Kategorie.

Weiter können wir dann voraussetzen, daß die Menge der Punkte, wo (b) und die Bedingung $\int_0^1 |K_n(x,t)|\, dx < L(t)$ erfüllt ist, auch von der zweiten Kategorie ist. Denn anderenfalls könnten wir, analog wie beim Beweise des Satzes 1, den Beweis zu Ende bringen. Das vorausgesetzt, können wir weiter leicht die Existenz einer Menge M von der zweiten Kategorie (inbezug auf D) und eines $\varepsilon_0 > 0$ (das von t unabhängig ist) beweisen, so daß in jedem Punkte von M $\int_0^1 |K_n(x,t)|\, dx < L(t)$ und die folgende, (b) entsprechende Bedingung erfüllt ist:

(b′) Zu jedem Index N und beliebigem $\eta > 0$ existiert eine Menge E, deren Maß $< \eta$ ist und ein $n_0 > N$, so daß die Ungleichung

$$\left| \int_E K_{n_0}(x,t)\, dx \right| > \varepsilon_0 \tag{6}$$

für alle $t \in M$ besteht.

Es existiert ein Stück $\overline{D}$ der Menge D, in welchem M überalldicht ist.

Jetzt wählen wir in $M\overline{D}$ eine abzählbare, in $\overline{D}$ überalldichte Punktmenge $\{t_i\}$. Es folgt aus (b′) die Existenz einer Doppelfolge $\{E_{ir}\}$ von Mengen mit den folgenden Eigenschaften:

1) $E_{i\,r} \subset (0,1)$, $\quad E_{i\,r} \,.\, E_{i'\,r'} = 0 \quad$ wenn $(i,r) \neq (i',r')$,

2) bei jedem i gibt es eine Folge $\{n_r^{(i)}\}$ und eine entsprechende Teilfolge E_{ik_r}, so daß

$$\left| \int_{E_{ik_r}} K_{n_r^{(i)}}(x,t_i)\, dx \right| > \varepsilon_0 \qquad r = 1,2,\dots, \tag{7}$$

3)

$$\lim_{r\to\infty} \int_{E_{jk}} K_{n_r^{(i)}}(x,t_i)\, dx \qquad i = 1,2,\dots \tag{8}$$

existiert für alle E_{jk},

4) es existiert

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\sum\limits_{j,k} E_{jk}} K_{n_r^{(i)}}(x,t_i)\, dx \qquad i = 1,2,\dots\,. \tag{9}$$

Es sei $A_1, A_2 \ldots$ die Doppelfolge $\{E_{ir}\}$, als einfache Folge geordnet. Wir setzen

$$a_{pq}^{(i)} = \int\limits_{A_q} K_{n_p^{(i)}}(x, t_i)\, dx .$$

Die Matrix $T_i = (a_{pq}^{(i)})$ entspricht einer konvergenzerhaltenden Limitierungsmethode — man verifiziert nämlich ohne Mühe, daß jedes T_i alle Eigenschaften aufweist, welche die konvergenzerhaltenden Limitierungsmethoden charakterisieren; (beachte (8), (9)). Nach (7) sind aber auch die Bedingungen des Hilfssatzes 2 erfüllt; es genügt $\varepsilon_0 = \omega_0$ zu setzen. Aus dem Hilfssatze 2 folgt also in unserem Falle: Es existiert eine beschränkte Folge $\{d_\nu\}$, die so beschaffen ist, daß bei jedem i die Oszillation der Folge

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu \int\limits_{A_\nu} K_{n_p^{(i)}}(x, t_i)\, dx \qquad p = 1, 2, 3 \ldots \tag{10}$$

größer als ε_0 ist. Wir definieren nun eine beschränkte Funktion $f(x)$, indem wir setzen:

$$f(t) = d_\nu \text{ für } t \in A_\nu,\ \nu = 1, 2, 3 \ldots ,$$

und $f(t) = 0$ für t aus der Komplementärmenge von $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$.

Die n-te Partialsumme der Orthogonalentwicklung von $f(t)$ lautet

$$s_n(t) = \int_0^1 f(x) K_n(x, t)\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu \int\limits_{A_\nu} K_n(x, t)\, dx .$$

Da die Oszillation der Folge $s_n(t_i)$ (vgl. (10)) für jedes i größer als ε_0 ist, so ist die Voraussetzung von Hilfssatz 1 erfüllt und dieser ergibt die Existenz einer Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums, in welcher die Orthogonalentwicklung von $f(t)$ divergiert.

Bemerkung. In den Sätzen 1, 2 kann man statt gewöhnlicher Divergenz die Divergenz der Orthogonalentwicklungen im Sinne gewisser zeilenfiniter Limitierungsmethoden voraussetzen. Dann gelten analoge Sätze.

§ 3.

Hilfssatz 3. *Gegeben sei ein beliebiges Funktionensystem* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$; $\varphi_\nu(x)$ *setzen wir als in* $\langle 0, 1\rangle$ *definiert und integrierbar und auf einer perfekten Menge D als stetig voraus.*

Die Menge N derjenigen Punkte von D, die bei jedem E mit dem Maße $\leqslant \eta$ *der Ungleichung*

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t) \int\limits_E \varphi_\nu(x)\, dx \right| \leqslant \varepsilon$$

genügen, ist meßbar.

Beweis. Um die Meßbarkeit der Menge N zu beweisen, wollen wir durch Induktion den Beweis für den folgenden allgemeineren Satz führen:

Die Menge M derjenigen Punkte von D, die bei einer vorgegebenen stetigen Funktion $f(x)$ und integrierbaren Funktionen $F_l(x)$ der Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t) \int\limits_E \varphi_\nu(x)\, dx \leqslant f(t) \tag{12}$$

bei jeder, die Nebenbedingungen

$$a_l \leqslant \int\limits_E F_l(x)\, dx \leqslant b_l \qquad (l = 1, \ldots, m) \tag{13}$$

erfüllenden Menge E genügen, ist *meßbar*.

Um die Induktion beginnen zu können, setzen wir noch $\varphi_0(t) \equiv 0$; so ist jedenfalls der Satz für $n = 0$ richtig. Nun setzen wir voraus, dieser Satz sei für ein $n - 1$ bei jedem stetigen $f(x)$, integrierbaren $F_l(x)$ in beliebiger endlicher Anzahl und beliebigen a_l, b_l richtig. Mit R bezeichnen wir die Menge aller Zahlen $\int\limits_E \varphi_n(x)\, dx$, wenn E den Bedingungen (13) genügt[11]; $\langle c, d\rangle$ sei ein Intervall, in welchem diese Menge liegt. Wir zerlegen schrittweise $\langle c, d\rangle$ in $2, 4, \ldots 2^n$ gleiche Teilintervalle und betrachten nur diejenigen unter ihnen, welche Punkte von R enthalten. Diese Intervalle wollen wir mit ihren Endpunkten betrachten. Bei dem i-ten Schritte seien dies

$$\delta_1^{(i)},\ \delta_2^{(i)} \ldots\ \delta_{n_i}^{(i)} \qquad 1 \leqslant n_i \leqslant 2^i .$$

Mit

$$x_1^{(i)},\ x_2^{(i)} \ldots\ x_{n_i}^{(i)}$$

bezeichnen wir noch die Mittelpunkte dieser Intervalle. Aus unserer Voraussetzung folgt die Meßbarkeit der Menge aller derjenigen Punkte t, in welchen die Ungleichung

[11]) Wir lassen hier unentschieden, ob vielleicht R mit einem Intervall identisch ist, da das für unsere Zwecke ganz belanglos ist.

$$(14)\qquad \sum_{\nu=1}^{n-1}\varphi_\nu(t)\int_E \varphi_\nu(x)\,dx \leqslant f(t) - x_r^{(i)}\varphi_n(t) + \frac{1}{k}$$

für jedes der Bedingung

$$\int_E \varphi_n(x)\,dx \in \delta_r^{(i)}$$

und den Bedingungen (13) genügende E besteht.

Wir bezeichnen diese Menge mit $A_{rk}^{(i)}$, wobei $1 \leqslant r \leqslant n_i$, $i, k = 1, 2, \ldots$ ist. Es sind also auch die Mengen

$$B_{ik} = A_{1,k}^{(i)} \ldots A_{n_i,k}^{(i)},$$

$$M_k = \sum_{i=1}^{\infty}(B_{i,k}B_{i+1,k}B_{i+2,k}\ldots)$$

meßbar. Wir behaupten, M sei mit $\prod_{k=1}^{\infty} M_k$ identisch.

Es sei $t_0 \in \prod_{k=1}^{\infty} M_k$ und E eine beliebige Menge, die nur den Bedingungen (13) unterworfen ist. Wir nehmen diejenige Intervallschachtelung $\delta_{r_1}^{(1)} \supset \delta_{r_2}^{(2)} \supset \delta_{r_3}^{(3)} \ldots$, die gegen $\int_E \varphi_n(x)\,dx$ konvergiert. Unserer Voraussetzung zufolge ist t_0 bei jedem k in $A_{r_s k}^{(s)}$, $A_{r_{s+1} k}^{(s+1)} \ldots$ enthalten, wenn wir nur s genügend groß wählen. Es sind also die Ungleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\varphi_\nu(t_0)\int_E \varphi_\nu(x)\,dx + x_{r_s}^{(s)}\varphi_n(t_0) \leqslant f(t_0) + \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, 3 \ldots,$$

erfüllt, also besteht auch (12) bei $t = t_0$, da doch $\lim_{s\to\infty} x_{r_s}^{(s)} = \int_E \varphi_n(x)\,dx$. Es ist also t_0 in M enthalten.

Nun nehmen wir ein $t_0 \in M$. Dieses t_0 gehört gleichzeitig den Mengen $C_r^{(i)}$ $(1 \leqslant r \leqslant n_i,\ i = 1, 2, 3 \ldots)$ an, wenn wir $C_r^{(i)}$ als diejenige Punktmenge definieren, wo bei jedem E, mit der Nebenbedingung $\int_E \varphi_n(x)\,dx \in \delta_r^{(i)}$ und (13), die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(t)\int_E \varphi_\nu(x)\,dx \leqslant f(t)$$

besteht. Es ist also auch für alle k und $t = t_0$ (14) erfüllt und zwar gleichzeitig für alle dem k entsprechenden, genügend groß gewählten i und $1 \leqslant r \leqslant n_i$. Bei jedem k ist also t_0 in M_k enthalten.

Ganz analog können wir natürlich die Meßbarkeit der Menge derjenigen Punkte beweisen, für welche bei jedem E unter der Voraussetzung (13), die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(t)\int_E \varphi_\nu(x) \geqslant f(t)$$

besteht.

Setzen wir nun $f(t) = +\varepsilon, -\varepsilon$, $m = 1$, $F(x) \equiv 1$, $a = 0$, $b = \eta$, so folgt aus dem Vorangehenden ohne weiteres die Meßbarkeit der Menge aller t, für welche (11) bei jeder Menge E mit dem Maße $\leqslant \eta$ besteht.

Gegeben sei ein Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ und eine Funktionenklasse S[12]). Man kann das Definitionsintervall in zwei Mengen A, B zerspalten, die folgende Eigenschaften besitzen:

Zu jedem Punkte t der Menge A existiert eine Funktion der Klase S, deren Orthogonalentwicklung in t divergiert, und in jedem Punkte der Menge B konvergiert die Entwicklung einer jeden Funktion von S.

Satz 3. *Die zu einem Orthogonalsysteme zugehörigen Mengen A, B sind meßbar.*

Beweis. Wir werden hier den Beweis nur für den Fall durchführen, wo S die Klasse der beschränkten Funktionen ist. Nur in diesem Falle bietet der Beweis gewisse Schwierigkeiten dar, da in der Klasse der beschränkten Funktionen keine abzählbare, überalldichte Menge vorhanden ist (wir denken uns beschränkte Funktionen auf die übliche Weise normiert).

Analog wie beim Beweise des Satzes 2 können wir sagen, daß in jedem Punkte des Definitionsintervalls entweder die Bedingung (a) oder (b) erfüllt ist. Die Menge der Punkte, wo (b) erfüllt ist — wir bezeichnen sie mit A_b — ist jedenfalls in A enthalten. Das folgt z. B. daraus, daß wir die weitere Beweisführung des Satzes 2 statt für die abzählbare Punktmenge $\{t_i\}$ genau analog nur für einen vorgegebenen Punkt t führen können und als Resultat die Divergenz der Entwicklung in diesem Punkte bekommen. Ist aber in einem gewissem Punkte von A_b $\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1 |K_n(x,t)|\,dx = +\infty$,

[12]) S kann hier bedeuten entweder die Klasse der Funktionen, die sammt ihrer p-ten Potenz integrierbar sind (dabei ist $p \geqslant 1$) oder stetige Funktionen oder beschränkte Funktionen.

so existiert bekanntlich umsomehr eine beschränkte (sogar stetige) Funktion, deren Orthogonalentwicklung in t divergiert.

Mit A_a bezeichnen wir die Menge der Punkte von A, für welche die Bedingung (a) erfüllt ist.

Es bezeichne C_η die Menge der Punkte t, mit der Eigenschaft, daß bei festgehaltenem n und k zu jedem t aus C_η eine Menge E_η mit dem Maße $\leqslant \eta$ existiert, für welche die Ungleichung

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t) \int_{E_\eta} \varphi_\nu(x)\, dx \right| > \frac{1}{k}$$

besteht. Aus dem Hilfssatze 3 folgt, daß C_η meßbar ist. Zuerst folgt nämlich unmittelbar die Meßbarkeit der Menge $C_\eta . D$, wo D eine perfekte Menge bezeichnet, auf welcher alle $\varphi_\nu(t)$ stetig sind. Da man aber das Maß von D beliebig wenig verschieden von der Länge des Definitionsintervalls wählen kann, so ist auch C_η meßbar. Setzen wir weiter $D_k^n = \prod_{\eta>0} C_\eta$, so ist offensichtlich A_b mit

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{n=r}^{\infty} D_k^n\right)\right)$$

identisch, also auch meßbar.

Nach dem früher gesagten existiert in keinem Punkte der Menge A_a die Grenze (5). Dabei bedeutet δ ein Intervall mit rationalen Endpunkten. Alle diejenigen Punkte, in welchen bei gegebenem δ (5) nicht existiert, bilden eine meßbare Menge, also ist auch ihre Vereinigungsmenge $\overline{A}$, gebildet über alle möglichen rationalen Intervalle δ, meßbar. Da aber $\overline{A} \subset A$ und $A_a \subset \overline{A}$, und da sich A_b bereits als meßbar erwiesen hat, so ist $A = A_a + A_b = \overline{A} + A_b$ meßbar.

Wissen wir schon einmal, daß die Menge A meßbar ist, so können wir durch eine leichte Modifizierung der Beweisführung des Satzes 2 den folgenden Satz beweisen:

Satz 2'. *Gegeben sei ein Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ und es mögen A, B die vorher eingeführten Mengen bedeuten. Wir setzen voraus, daß das Maß von A positiv ist. Dann existiert eine beschränkte Funktion, deren Orthogonalentwicklung in einer Menge divergiert, für welche jeder Punkt von A Kondensationspunkt ist.*

Mutatis mutandis gilt ein analoger Satz im Falle zeilenfiniter konvergenzerhaltender Limitierungsmethoden.

§ 4.

Als Anwendung der vorhergehenden Sätze wollen wir noch folgendes beweisen:

Satz 4. *Gegeben sei ein beliebiges unendliches Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ dessen Funktionen gleichmäßig beschränkt sind. Zu jeder zeilenfiniten, konvergenzerhaltenden Limitierungsmethode T existiert dann eine beschränkte Funktion, deren Orthogonalentwicklung in einer Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums nicht T-summierbar ist.*

Beweis. Mit M bezeichnen wir die Menge derjenigen Punkte, wo $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ nicht existiert. Diese Menge ist von positivem Maße[13]. Es sei $t_0 \in M$ und nehmen wir an, daß die Orthogonalentwicklung einer jeden beschränkten Funktion in t_0 mit der Methode T summierbar ist, d. h., daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h(x) K_n(x, t_0)\, dx$$

bei jeder beschränkten Funktion existiert. Hier bedeutet $K_n(x, t) = \sum_{\nu=1}^{N(n)} b_{p\nu} \left(\sum_{i=1}^{\nu} \varphi_i(x) \varphi_i(t) \right)$ und $(b_{p\nu})$ die der T-Methode entsprechende Matrix. Indem wir einen Hilfssatz des Herrn H. Steinhaus[14]) anwenden, schließen wir daraus auf die Existenz einer integrierbaren Funktion $f(x)$ mit den Koeffizienten

$$\int_0^1 f(x) \varphi_\nu(x)\, dx = \varphi_\nu(t_0).$$

Da aber unser System als beschränkt vorausgesetzt war, so müssen

[13]) Es kann nämlich $\lim \varphi_n(t)$ nicht fast überall existieren, was man folgendermassen einsieht. 1°. Ganz allgemein gilt für *beliebige* Orthogonalsysteme der Satz: Wenn in einer Menge von positivem Maße $\lim \varphi_n(t) = \psi(t)$ existiert, so ist in dieser Menge $\psi(t) = 0$ fast überall, denn es gilt bekanntlich [Banach, Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales, Bull. Ac. Pol. (1919) p. 66—72, vgl. auch die unter [15]) zitierte Arbeit, p. 122 (20)] $\lim \frac{\varphi_1(t) + \ldots \varphi_n(t)}{n} = 0$ fast überall im Definitionsintervall. 2°. Für beschränkte Orthogonalsysteme kann aber nicht fast überall $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 0$ sein, da sonst $\lim \int_0^1 \varphi_n^2(x)\, dx = \int_0^1 [\lim \varphi_n^2(x)]\, dx = 0$ sein müsste, was der Normierung widerspricht.

[14]) H. Steinhaus, Sur les développements orthogonaux, Bull. Ac. Pol. Ser. A. (1926) p. 14, Lemme 4.

die Koeffizienten einer jeden integrierbaren Funktion gegen Null streben, es müsste also $\lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu(t_0) = 0$ sein und das ist ein Widerspruch. Aus dem vorigen folgt, daß die entsprechende Menge A, da sie jedenfalls M enthält, von positivem Maße sein muss. Nun können wir den Satz 2 bezw. 2' anwenden.

Der Satz 4 ist in gewissem Sinne, wenn wir beliebige gleichmässig beschränkte Orthogonalsysteme betrachten, nicht weiter verallgemeinerungsfähig. Einerseits wissen wir nach ihm, daß zu jedem solchen System eine beschränkte Funktion mit der Divergenzpunktmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums existiert. Andererseits existieren gleichmässig beschränkte Orthogonalsysteme, bei welchen diese Divergenzpunktmengen immer Nullmengen sein müssen. Ein solches ist z. B. das bekannte Rademachersche Orthogonalsystem[15]), welches die Eigenschaft hat, daß die Entwicklung jeder quadratisch integrierbaren Funktion fast überall konvergiert.

[15]) Ich verstehe darunter das von Herrn H. Rademacher definierte Orthogonalsystem; H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Math. Ann. 87 (1922), insbes. p. 130—138.

(Reçu par la Rédaction le 9. 4. 1930).

Eine Bemerkung über Divergenzphänomene von Orthogonalentwicklungen

von

W. ORLICZ (Lwów).

Fragt man sich über Divergenzphänomene von Orthogonalentwicklungen gewisser Funktionenklassen bei beliebigen Orthogonalsystemen, so ist von vornherein zu erwarten, daß man keine weitgehenden Aussagen wird machen können. So kann man bekanntlich nicht behaupten, daß für jedes Orthogonalsystem eine *stetige* Funktion existiert, deren Orthogonalentwicklung in mindestens einem Punkte divergiert. Ebensowenig darf man im allgemeinen die Existenz einer stetigen Funktion behaupten, deren Orthogonalentwicklung im Definitionsintervall nicht *gleichmäßig* konvergiert [1]). Wie stehen nun die Sachen bei der allgemeineren Klasse der *beschränkten* Funktionen? Unter zusätzlichen Bedingungen von recht allgemeinem Typus (gleichmäßige Beschränktheit der Funktionen des Systems [2]), Abgeschlossenheit des Systems im Bereiche der quadratisch integrierbaren Funktionen [3]) existiert immer eine *beschränkte* Funktion, deren Orthogonalentwicklung in mindestens einem Punkte divergiert. Im Allgemeinen ist aber auch das nicht der Fall. Das lehrt das folgende triviale Beispiel:

Wir setzen die n-te Funktion des Systems $\varphi_n(t)$ gleich $\sqrt{2^{n+1}}$ in $\langle \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \rangle$ und sonst im Intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ gleich 0. Offensichtlich

[1]) Das bekannte Haarsche Orthogonalsystem (A. Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann. 69 (1910) Kap. III, p. 361—369) hat die Eigenschaft, daß die Entwicklung jeder stetigen Funktion gleichmäßig konvergiert.

[2]) W. Orlicz, Einige Bemerkungen über die Divergenzpunktmengen von Orthogonalentwicklungen, Studia Math. 2 (1930) p. 72—86, Satz 4.

[3]) W. Orlicz, Zur Theorie der Orthogonalreihen, Bull. Acad. Pol. Ser. A, (1927) p. 95, Satz 2.