Str.
H. Auerbach: Über die Vorzeichenverteilung in unendlichen Reihen 228
S. Kaczmarz et H. Steinhaus: Le système orthogonal de M. Rademacher 231
S. Banach: Reconnaissance du droit de l'auteur 248
S. Mazur: Bemerkung zu meiner Arbeit „Über die Nullstellen linearer Operationen" 249
S. Banach: Bemerkung zu der Arbeit „Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen" . . . 251

Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen

von

J. SCHAUDER (Lwów).

Eines der wichtigsten Probleme der Funktionalalgebra war seit langer Zeit der Satz von der Umkehrung der linearen, stetigen Funktionaloperationen. Er lautet:

Satz 1. *Es seien V und V' zwei lineare, normierte, vollständige Räume*[1]*. Wenn dann die lineare, stetige Funktionaloperation (Abbildung) $y = F(x)$ den ganzen Raum V auf den ganzen Raum V' eineindeutig abbildet, so ist auch ihre Umkehrung $x = F^{-1}(y)$ stetig.*

Diesen Satz hat als erster Herr Banach in einer in dieser Zeitschrift erscheinenden*) Arbeit als Folgerung aus anderen Sätzen gewonnen. Im Folgenden bringe ich einen direkten Beweis des erwähnten Theorems.

Satz 2 ist eine Verallgemeinerung auf nicht eineindeutige Abbildungen.

Ich beginne mit der folgenden Überlegung:

Es bedeute $\{k_n\}$ eine Folge von Kugeln in V mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit immer größer werdenden Radien, die in der Summe den *ganzen* Raum V erschöpfen. Sei $F(k_n)$ die Bildmenge von k_n. Die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} F(k_n)$ *erschöpft* der Voraussetzung nach den ganzen Raum V'. Nicht alle Mengen $F(k_n)$ können nirgendsdicht sein, denn sonst wäre der ganze Raum V',

[1]) Die beiden Räume sollen den Axiomen des Herrn Banach genügen. Siehe: S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs application aux équations intégrales, Fund. Math. III (1922) p. 133—181.

*) Anm. bei der Korrektur: Diese Arbeit ist inzwischen erschienen. S. Banach, Sur les fonctionnelles linéaires II, Studia Math. I (1929) p. 223—239, insbesondere p. 238, Théorème 7.

als Summe abzählbar vieler nirgendsdichter Mengen, eine Menge der ersten Kategorie, was mit der Vollständigkeit des Raumes unvereinbar ist. Eine der Mengen $F(k_n)$ ist also nicht nirgendsdicht, und wegen der Homogenität der Abbildung F sind es alle Bildmengen $F(k_n)$.

Es sei k irgend eine dieser Kugeln; es gibt also in k sicherlich einen solchen Punkt P, daß die Bildmenge $F(k)$ im Punkte $F(P)$ überalldicht ist, d. h. man kann im Raume V' um $F(P)$ eine Kugel ϱ schlagen, *so daß das Bild $F(k)$ in der Kugel ϱ überalldicht ist.*

Sei jetzt $\mathfrak{e}$ der Vektor, der vom Nullpunkt nach P führt (im Raume V). Verschieben wir die Kugel k um den Vektor $-\mathfrak{e}$, so geht k in eine andere Kugel K über, die den Nullpunkt in ihrem *Innern* enthält, indem gerade der Punkt P in den Nullpunkt übergeht. Somit sind wir — in bezug auf die Kugel K — zum folgenden Ergebnis gelangt:

Die Kugel K geht in eine Menge $F(K)$ über und es läßt sich um den *Nullpunkt* im Raume V' eine solche Kugel ϱ finden, daß das Bild $F(K)$ in der Kugel ϱ überalldicht ist. Man kann wegen der Homogenität annehmen, daß die Kugel ϱ die Einheitskugel ist[2]).

Wir werden weiterhin beweisen, daß die *ganze* Kugel ϱ zur Menge $F(K)$ gehört[3]) (und zwar *unabhängig* davon, ob die Abbildung $F(x)$ eineindeutig ist oder nicht. Die Bemerkung, daß dies auch für *nicht* eineindeutige Abbildungen zutrifft, werden wir im Satz 2 ausnützen).

Nehmen wir dies einstweilen als bewiesen an, so gestaltet sich der weitere Beweisgang wie folgt. Es genügt zu zeigen, daß die umgekehrte, lineare Funktionaloperation $x = F^{-1}(y)$ in einer Kugel *beschränkt* ist[4]). Dies trifft in der Tat für die Kugel ϱ zu, denn das ganze Urbild der Kugel ϱ gehört nach dem eben Gesagten zur Kugel K, die eine beschränkte Menge ist.

Es bleibt also nur noch zu beweisen, daß die *ganze* Kugel ϱ zu $F(K)$ gehört. Wir beweisen dazu den folgenden Hilfssatz:

[2]) Von der Kugel K kann man offenbar voraussetzen, daß ihr Mittelpunkt mit dem Nullpunkt übereinstimmt. Es gibt also eine Zahl $M > 0$ (der Radius der Kugel), so daß $\mathfrak{e} \varepsilon K$ mit $\|\mathfrak{e}\| \leqq M$ äquivalent ist.

[3]) Und nicht nur, daß $F(K)$ in ρ überalldicht ist.

[4]) Die Beschränktheit einer linearen Funktionaloperation in einer Kugel K ist, wie bekannt, mit ihrer Stetigkeit gleichbedeutend. Siehe z. B. die unter [1]) zitierte Arbeit, p. 151, Théorème I.

Hilfssatz I. *Es sei $\mathfrak{R}$ eine in der Einheitskugel überalldichte Menge. Ist $\mathfrak{e}$ ein beliebiges im Innern der Einheitskugel gelegenes Element, so lassen sich solche reelle Zahlen c_n und Elemente $\mathfrak{x}_n$ aus $\mathfrak{R}$ finden, daß die Entwicklung*

$$\mathfrak{e} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \mathfrak{x}_n \qquad \textit{mit} \ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < 1 \tag{1}$$

gilt.

Beweis[5]). Sei

$$\|\mathfrak{e}\| < 1 \tag{2}$$

Wir setzen

$$\mathfrak{e}_n = \frac{1}{2^n}\mathfrak{e}, \ n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

[5]) Dieser Beweis stammt vom Mai 1928. Bei der endgültigen Redaktion dieser Arbeit habe ich bemerkt, daß der folgende, allgemeinere Satz sich viel leichter beweisen läßt: Es seien in der Kugel ρ eine überalldichte Menge $\mathfrak{R}$, ein im Innern von ρ gelegenes Element $\mathfrak{e}$, ferner eine Zahl $\lambda_1 > \|\mathfrak{e}\|$ und beliebige positive Zahlen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ gegeben. Es läßt sich dann aus $\mathfrak{R}$ eine Folge von Elementen $\{\mathfrak{x}_n\}$ herausgreifen, so daß

$$\mathfrak{e} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mathfrak{x}_i$$

gilt.

Beweis. Man wähle die Zahlen $\varepsilon_i > 0$, so daß

$$\frac{\varepsilon_i}{\lambda_{i+1}} < 1; \quad \lim_{i=\infty} \varepsilon_i = 0.$$

Zuerst wollen wir $\mathfrak{x}_1$ bestimmen, so daß

$$\|\mathfrak{e} - \lambda_1 \mathfrak{x}_1\| < \varepsilon_1, \text{ d. h.}$$

$$\left\|\frac{\mathfrak{e}}{\lambda_1} - \mathfrak{x}_1\right\| < \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}.$$

Da aber $\left\|\frac{\mathfrak{e}}{\lambda_1}\right\| < 1$, so liegt $\frac{\mathfrak{e}}{\lambda_1}$ im Innern der Einheitskugel ρ und $\mathfrak{x}_1$ läßt sich bestimmen. Man setze jetzt

$$\mathfrak{e} - \lambda_1 \mathfrak{x}_1 = \xi_1,$$

dann soll weiter $\mathfrak{x}_2$ gefunden werden, so daß

$$\|\xi_1 - \lambda_2 \mathfrak{x}_2\| < \varepsilon_2,$$

d. h.

$$\left\|\frac{\xi_1}{\lambda_2} - \mathfrak{x}_2\right\| < \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2}.$$

Nun ist

$$\left\|\frac{\xi_1}{\lambda_2}\right\| < \frac{\varepsilon_1}{\lambda_2} < 1,$$

$\frac{\xi_1}{\lambda_2}$ liegt also wieder in der Einheitskugel, ein entsprechendes $\mathfrak{x}_2$ kann also gefunden werden. Auf dieselbe Weise findet man $\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4 \ldots$ u. s. w.

Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{e}_n = \mathfrak{e}. \tag{4}$$

Es sei jetzt ε eine beliebige, genügend kleine positive Zahl, und es bezeichne $\mathfrak{a}_n$ ein beliebiges Element, so daß

$$\|\mathfrak{a}_n\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \cdot \|\mathfrak{e}\|; \quad n = 1, 2, 3 \ldots, \ \mathfrak{a}_0 = 0. \tag{5}$$

Wir setzen

$$\mathfrak{b}_n = \mathfrak{e}_n - \mathfrak{a}_{n-1} + \mathfrak{a}_n; \quad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{6}$$

Dann ist

$$\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \ldots \mathfrak{b}_n = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{e}_2 - \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots \mathfrak{e}_n - \mathfrak{a}_{n-1} + \mathfrak{a}_n = \tag{7 a}$$
$$= \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \ldots \mathfrak{e}_n + \mathfrak{a}_n \longrightarrow \mathfrak{e} \text{ (wegen (4), (5), (6))},$$

$$\|\mathfrak{b}_n\| \leqslant \|\mathfrak{e}_n\| + \|\mathfrak{a}_n\| + \|\mathfrak{a}_{n-1}\| < \tag{7 b}$$
$$< \frac{1}{2^n}\|\mathfrak{e}\| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\|\mathfrak{e}\| + \frac{\varepsilon}{2^n}\|\mathfrak{e}\| \leqslant \frac{1+2\varepsilon}{2^n}\|\mathfrak{e}\| \text{ (wegen (3), (5))}.$$

Ich setze nun

$$c_n = \frac{1+2\varepsilon}{2^n}\|\mathfrak{e}\|; \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

dann sind diese $\{c_n\}$ die gesuchten $\{c_n\}$ des Lemmas und die ganze Schwierigkeit besteht darin, die $\mathfrak{b}_n$ so zu wählen, daß $\frac{\mathfrak{b}_n}{c_n} = \mathfrak{x}_n$ zu $\mathfrak{R}$ gehört. Die Möglichkeit einer solchen Auswahl werden wir durch Induktion beweisen.

Wir wählen zuerst $\mathfrak{x}_1$ auf folgende Weise. Die Vektoren

$$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{a}_1 \tag{9}$$

bilden wegen (5) ein *Gebiet* γ_1. Die Vektoren

$$\frac{\mathfrak{b}_1}{c_1} \tag{10}$$

bilden also auch ein *Gebiet* Γ_1, das wegen (7 b) und (8) (woraus ja

$$\left\|\frac{\mathfrak{b}_1}{c_1}\right\| < \frac{(1+2\varepsilon)\|\mathfrak{e}\|}{2} : \frac{(1+2\varepsilon)\|\mathfrak{e}\|}{2} = 1 \tag{11}$$

folgt) *ganz* in der Einheitskugel gelegen ist. Nun war aber die Menge $\mathfrak{R}$ in der Einheitskugel als *überalldicht* vorausgesetzt worden, sie ist also auch im *Gebiete* Γ_1 überalldicht. Es gibt also

einen Punkt $\mathfrak{x}_1$ aus der Menge $\mathfrak{R}$, der zum Gebiete Γ_1 gehört, d. h. es existiert ein entsprechendes $\mathfrak{b}_1$, für welches

$$\frac{\mathfrak{b}_1}{c_1} = \mathfrak{x}_1, \qquad \mathfrak{x}_1 \,\varepsilon\, \mathfrak{R}. \tag{12}$$

Nehmen wir an, daß wir schon auf diese Weise die Vektoren (Punkte) $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n$ festgelegt haben; dadurch haben wir wegen der Formeln (3), (6), (8) auch die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$ und $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_n$ mitbestimmt.

Die Vektoren

$$\mathfrak{b}_{n+1} = \mathfrak{e}_{n+1} - \mathfrak{a}_n + \mathfrak{a}_{n+1}, \tag{13}$$

wo also nur noch $\mathfrak{a}_{n+1}$ unbestimmt ist, bilden ein *Gebiet* γ_{n+1}; die Vektoren

$$\frac{\mathfrak{b}_{n+1}}{c_{n+1}} \tag{14}$$

bilden auch ein *Gebiet* Γ_{n+1}, das wegen (7 b) und (8) die zu (11) analoge Ungleichung

$$\left\|\frac{\mathfrak{b}_{n+1}}{c_{n+1}}\right\| \leqslant 1 \tag{15}$$

erfüllt, d. h. in der Einheitskugel gelegen ist. Somit gibt es, wie früher, einen Punkt $\mathfrak{x}_{n+1}$ in $\mathfrak{R}$, der zu Γ_{n+1} gehört. Der Hilfssatz ist bewiesen.

Die Menge $\mathfrak{R} = F(K)$ *ist in der Einheitskugel* ϱ *überalldicht.* Somit gilt für *jeden* Punkt y in ϱ (nach dem Hilfssatze I) die Entwicklung

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \mathfrak{x}_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < 1, \tag{16}$$
$$\mathfrak{x}_n \,\varepsilon\, F(K).$$

Es seien x_n die in K gelegenen Urbilder von $\mathfrak{x}_n$ [6]), also

$$F(x_n) = \mathfrak{x}_n, \qquad x_n \,\varepsilon\, K; \tag{17}$$

wir definieren

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot x_n; \tag{18}$$

x gehört zu K, denn es ist nach (16) und nach Anmerkung [2])

[6]) Es wird die Eineindeutigkeit von $y = F(x)$ nicht ausgenützt.

$$(19) \qquad \|x\| \leqslant \operatorname{Max}\|x_n\| . \sum_{n=1}^{\infty}|c_n| \leqslant M;$$

M bedeutet hier die in Anmerkung [2]) definierte „Schränkungskonstante“ (Radius der Kugel K). Also ist

$$x \varepsilon K,$$

d. h. ((16), (17))

$$(21) \qquad y=\sum_{n=1}^{\infty} c_n . F(x_n)=F\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n . x_n\right)=F(x). ^{7})$$

Aus dem Beweisgange des Satzes 1 folgt der folgende allgemeinere

Satz 2 *(Gebietsinvarianz). Wenn die lineare, stetige Funktionaloperation $y=F(x)$ eine eindeutige (aber nicht notwendig eineindeutige) Abbildung des linearen, normierten und vollständigen x-Raumes auf einen ebensolchen y-Raum liefert und wenn dabei die beiden Räume erschöpft werden, so geht jedes x-Gebiet in ein y-Gebiet über.*

Beweis. Der Beweis ist in der Beweisführung des Satzes 1 enthalten, wenn man noch die Bemerkung S. 2, Zeile 23—26 berücksichtigt.

---

[7]) Die Anregung, einen solchen Hilfssatz zu benützen, verdanke ich Herrn Banach.

(Reçu par la Rédaction le 15. 6. 1929).

Über die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene kompakte Menge enthält

von

S. MAZUR (Lwów).

Den Gegenstand dieser Note bildet der folgende

Satz. *Es sei Z eine kompakte Menge in einem linearen, normierten und vollständigen Raume*[1]*); dann ist die kleinste Z enthaltende konvexe Menge W ebenfalls kompakt.*

Beweis. Ist Z eine endliche Menge, so ist der Satz trivial; wir können also voraussetzen, daß Z unendlich ist. Da die Menge Z kompakt ist, so gibt es eine abzählbare Teilmenge A von Z, die in Z überall dicht ist; es sei $\{x_n\}$ die Folge aller Elemente aus A. Wir betrachten nun die Menge V aller Elemente x der Form

$$(1) \qquad x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n ,$$

wo $\{a_n\}$ eine nichtnegative Zahlenfolge ist und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gegen die Summe 1 konvergiert.

Die Menge V ist kompakt. Es sei nämlich ε eine gegebene positive Zahl. Da A als Teilmenge von Z kompakt ist, so enthält die Folge $\{x_n\}$ eine endliche Teilfolge $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots x_{n_p}$ von der Eigenschaft, daß für jedes x_n die Ungleichung

$$\|x_n - x_{n_k}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bei einem entsprechenden k $(k=1, 2, \ldots p)$ stattfindet[2]). Infolge-

---

[1]) D. h. in einem Raume, für welchen die Axiome des Herrn Banach erfüllt sind. S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math. III (1922) pp. 134—136.

[2]) F. Hausdorff, Mengenlehre, II Auflage (1927) p. 108.