where ν_n are defined by formula (25). Further, let χ be a character of G given by expression (24). From (25) and (27) follows the equality

$$(28)\quad L_{\lambda_n}(\chi^k) = \{L_{\nu_n}(\chi^k)\}^n = \Big\{\int_G \exp\Big(ik[\sqrt{n}]^{-1}\sum_{j=1}^{s} r_j a_{\xi_j}(x_{\xi_j}y_{\xi_j}^{-1})\Big)\nu(dx)\Big\}^n.$$

Taking into account equality (26), we infer that

$$\int_G \exp\Big(ik[\sqrt{n}]^{-1}\sum_{j=1}^{s} r_j a_{\xi_j}(x_{\xi_j}y_{\xi_j}^{-1})\Big)\nu(dx) = 1-\frac{k^2}{2n}\int_G\Big\{\sum_{j=1}^{s} r_j a_{\xi_j}(x_{\xi_j}y_{\xi_j}^{-1})\Big\}^2\nu(dx)+o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

whence, according to (28), we get the convergence

$$(29)\quad \lim_{n\to\infty} L_{\lambda_n}(\chi^k) = e^{-k^2 d(\chi)} \qquad (\chi\in\hat{G}),$$

where

$$d(\chi) = \tfrac{1}{2}\int_G\Big\{\sum_{j=1}^{s} r_j a_{\xi_j}(x_{\xi_j}y_{\xi_j}^{-1})\Big\}^2\nu(dx).$$

If $d(\chi)=0$, then $\sum_{j=1}^{s} r_j a_{\xi_j}(x_{\xi_j})$ is constant for almost all $x\in G$ with respect to the measure ν. Since ν is positive on open non-empty sets, the last assertion holds for all $x\in G$. Hence, in virtue of (24), it follows that the character χ is trivial. Consequently, $d(\chi)$ is positive for all non-trivial characters $\chi\in\hat{G}$. In other words, the limit in (29) is the characteristic function of a Gaussian measure on G. Thus the sequence $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ is weakly convergent to a Gaussian measure on G, which implies the assertion of the Theorem.

References

[1] S. Bochner, *Harmonic analysis and the theory of probability*, Berkeley-Los Angeles 1955.

[2] А. Г. Курош, *Теория групп*, Москва 1953.

[3] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Москва 1954.

[4] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Paris 1940.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 14. 4. 1959

STUDIA MATHEMATICA, T. XIX. (1960)

Bernsteinsche Potenzreihen

von

W. MEYER-KÖNIG (Stuttgart) und K. ZELLER (Tübingen)

Die der Funktion $f(x)$ zugeordneten Bernsteinschen Polynome

$$B_n(x) = B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\Big(\frac{k}{n}\Big) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

stehen in einer bekannten formalen Beziehung zu der durch

$$b_{nk} = b_{nk}(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad (n=1,2,\ldots;\ k=0,\ldots,n)$$

gegebenen Bernoullischen (oder binomischen) Verteilung der Wahrscheinlichkeitsrechnung (vgl. [2], S. 4). Liegt eine unbegrenzte Folge unabhängiger Bernoulli-Versuche mit der Erfolgswahrscheinlichkeit x und der Mißerfolgswahrscheinlichkeit $1-x$ vor, so ist b_{nk} die Wahrscheinlichkeit, in den n ersten Versuchen k Erfolge zu erzielen.

Mit der Bernoullischen Verteilung ist verwandt (vgl. [1] S. 155) die Pascalsche Verteilung (negative Binomialverteilung). Wieder liege eine unbegrenzte Folge unabhängiger Bernoulli-Versuche vor. Aus einem nachher einleuchtenden Grund sei diesmal die Erfolgswahrscheinlichkeit mit $1-x$, die Mißerfolgswahrscheinlichkeit mit x bezeichnet. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, den n-ten Erfolg beim k-ten Wurf zu erzielen, gegeben durch

$$p_{nk} = p_{nk}(x) = (1-x)^n\binom{k-1}{n-1}x^{k-n} \qquad (n=1,2,\ldots;\ k=n,n+1,\ldots).$$

Es erhebt sich die Frage, ob wir — in Analogie zu den b_{nk} und $B_n(x)$ — mit Hilfe der p_{nk} den $B_n(x)$ verwandte und ähnliche Eigenschaften besitzende Ausdrücke bilden können. Dies ist der Fall. Es wird sich dabei nicht um Polynome, sondern um Potenzreihen handeln, die wir als Bernsteinsche Potenzreihen bezeichnen.

Sei $f(x)$ eine komplexe, in $0 \leqslant x < 1$ definierte Funktion. Unter der $f(x)$ zugeordneten n-ten Bernsteinschen Potenzreihe $(n = 1, 2, \ldots)$ verstehen wir den formalen Ausdruck

$$P_n(x) = P_n^f(x) = \sum_{k=n}^{\infty} p_{nk} f\left(\frac{k-n}{k}\right)$$

$$= (1-x)^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} x^{k-n} f\left(\frac{k-n}{k}\right) = (1-x)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n-1} x^k f\left(\frac{k}{k+n}\right).$$

Ist $P_n(x)$ für ein x konvergent, so bezeichnen wir mit $P_n(x)$ auch den betreffenden Summenwert.

HILFSSATZ 1. *Gibt es ein $M > 0$ und ein $a > 0$, so daß*

$$|f(x)| \leqslant M e^{\frac{a}{1-x}} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant x < 1 \tag{1}$$

gilt, so ist $P_n(x)$ konvergent für $0 \leqslant x < e^{-a/n}$.

HILFSSATZ 2. *Gibt es ein $M > 0$ und ein $a > 0$, so daß*

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{(1-x)^a} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant x < 1 \tag{2}$$

gilt, so ist $P_n(x)$ konvergent für $0 \leqslant x < 1$.

HILFSSATZ 3. *Ist $f(x)$ in $0 \leqslant x \leqslant 1$ definiert und beschränkt, ferner bei $x = 1$ linksseitig stetig, so strebt*

$$P_n(x) \to f(1) \quad \text{für } x \to 1- \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Die beiden ersten Hilfssätze beweist man unmittelbar. Zum Beweis des Hilfssatzes 3 stellen wir fest, daß für jedes feste $n = 1, 2, \ldots$ das zu der Matrix

$$a(x, k) = (1-x)^n \binom{k+n-1}{n-1} x^k \begin{cases} \text{Zeilenindex} & x;\ 0 \leqslant x < 1,\ x \to 1- \\ \text{Spaltenindex} & k;\ k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

gehörige Limitierungsverfahren permanent und

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a(x, k) f\left(\frac{k}{k+n}\right) \quad (0 \leqslant x < 1)$$

ist.

Liegen die Voraussetzungen des Hilfssatzes 3 vor, so erweitern wir die Definition der dann für $0 \leqslant x < 1$ erklärten Funktion $P_n(x)$ durch die Festsetzung

$$P_n(1) = \lim_{x \to 1-} P_n(x) = f(1) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Dies ist zu beachten bei dem nachfolgenden Satz 1, in dem wir die grundlegende Konvergenzeigenschaft der Bernsteinschen Polynome auf die Bernsteinschen Potenzreihen übertragen.

Beim Beweis des Satzes 1 machen wir von einigen einfachen Tatsachen über die Pascalsche Verteilung Gebrauch. Dabei sei $0 < x < 1$. Für jedes feste n und x bilden die p_{nk} eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich 1:

$$\sum_{k=n}^{\infty} p_{nk} = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots); \tag{3}$$

den zugehörigen Mittelwert (Erwartungswert) bezeichnen wir mit μ_n, die Streuung (quadratisches Moment in Bezug auf den Mittelwert) mit σ_n^2. Es ist (vgl. [1], S. 253)

$$\mu_n = \mu_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k p_{nk} = \frac{n}{1-x} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

$$\sigma_n^2 = \sigma_n^2(x) = \sum_{k=n}^{\infty} (k-\mu_n)^2 p_{nk} = \frac{nx}{(1-x)^2} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Die Tschebyscheffsche Ungleichung (vgl. [1], S. 219) liefert

$$\sum_{k \in K} p_{nk} \leqslant \frac{nx}{(1-x)^2 t^2} \quad (n = 1, 2, \ldots; t > 0); \tag{6}$$

hierbei ist die Indexmenge K gegeben durch

$$K = \{k = n, n+1, \ldots\} \cap \{|k-\mu_n| \geqslant t\}.$$

SATZ 1. *Die in $0 \leqslant x \leqslant 1$ definierte Funktion $f(x)$ sei dort beschränkt, ferner seien alle Punkte des festen Intervalls $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ (wo $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 1$) zweiseitige Stetigkeitspunkte von $f(x)$. (Gehört die Stelle $x = 0$ bzw. $x = 1$ dem Intervall an, so sei $f(x)$ dort rechtsseitig bzw. linksseitig stetig). Dann gilt*

$$\lim_{n \to \infty} P_n(x) = f(x) \text{ gleichmäßig in } x_1 \leqslant x \leqslant x_2.$$

Beweis. Es sei $|f(x)| \leqslant M$ für $0 \leqslant x \leqslant 1$. Für $n = 1, 2, \ldots$ ist $P_n(0) = f(0)$. Ist $f(x)$ an der Stelle $x = 1$ linksseitig stetig, so ist $P_n(1) = f(1)$ für $n = 1, 2, \ldots$ (nach Festsetzung). Beim Beweis der Behauptung brauchen wir also die Fälle $x = 0$ und $x = 1$ nicht in Betracht zu ziehen. Die folgenden Abschätzungen gelten für beliebiges x mit $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

Ein $\varepsilon > 0$ sei gegeben. Dann gibt es ein von x unabhängiges $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß

$$|f(x') - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{für} \quad |x' - x| \leqslant \delta, \quad 0 \leqslant x < 1 \tag{7}$$

ist. Wegen (3) gilt

$$|P_n(x)-f(x)| \leqq S_1+S_2$$

mit

$$S_i = \sum_{k\in K_i} p_{nk}\left|f\left(\frac{k-n}{k}\right)-f(x)\right| \quad (i=1,2), \tag{8}$$

$$K_1 = \{k=n, n+1, \ldots\} \cap \left\{|k-\mu_n| < \frac{\delta n}{1-x}\right\}, \tag{9}$$

$$K_2 = \{k=n, n+1, \ldots\} \cap \left\{|k-\mu_n| \geqq \frac{\delta n}{1-x}\right\}. \tag{10}$$

Für $k\in K_1$ ist

$$\left|\frac{k-n}{k}-x\right| = \frac{1-x}{k}|k-\mu_n| < \frac{\delta n}{k} \leqq \delta;$$

wegen (7) und (3) erhalten wir also $S_1 \leqq \varepsilon$. Wegen (6) ist

$$S_2 \leqq 2M \sum_{k\in K_2} p_{nk} \leqq \frac{2Mx}{\delta^2 n} \leqq \frac{2M}{\delta^2 n}.$$

Die Behauptung ergibt sich nun unmittelbar.

So wie man mit Hilfe der Konvergenzeigenschaft der Bernsteinschen Polynome den Weierstraßschen Approximationssatz beweist, ist dies in mannigfacher Weise auch mit Hilfe des Satzes 1 möglich. Dies zeigt zum Beispiel der

Satz 2. *Die Funktion $F(x)$ sei stetig in $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$. Dann strebt*

$$F(\tfrac{1}{2})+(1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{k+n}{n}x^k\left(F\left(\frac{k}{k+n+1}\right)-F(\tfrac{1}{2})\right) \to F(x)$$

für $n\to\infty$ und zwar gleichmäßig in $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$.

Beweis. Wir setzen

$$f(x) = \begin{cases} F(x)-F(\frac{1}{2}) & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{für} \quad \frac{1}{2} < x \leqq 1, \end{cases}$$

und wenden Satz 1 mit $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$ an.

Die Konvergenzaussage des Satzes 1 ist im wesentlichen auch dann richtig, wenn die Funktion $f(x)$ nicht beschränkt ist, sondern nur der Voraussetzung (1) genügt. Es gilt nämlich

Satz 3. *Die in $0 \leqq x < 1$ definierte Funktion $f(x)$ erfülle die Voraussetzung (1), ferner seien alle Punkte des festen Intervalls $x_1 \leqq x \leqq x_2$ (wo $0 \leqq x_1 \leqq x_2 < 1$) zweiseitige Stetigkeitspunkte von $f(x)$. (Gehört die Stelle $x = 0$ dem Intervall an, so sei $f(x)$ dort rechtsseitig stetig.) Dann gibt es ein n_0, so daß $P_n(x)$ für $n \geqq n_0$ konvergent ist in $0 \leqq x \leqq x_2$; ferner ist*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \text{ gleichmäßig in } x_1 \leqq x \leqq x_2.$$

Beweis. Wir wählen die natürliche Zahl n_0 so, daß $x_2 < e^{-a/n_0}$ ist. Aus Hilfssatz 1 ergibt sich der erste Teil der Behauptung. Im folgenden sei stets $n \geqq n_0$.

Die Funktion $f(x)$ ist in einem Intervall $0 \leqq x \leqq x_2+\delta$ (wo $\delta > 0$) beschränkt. Wegen Satz 1 und wegen der Linearität des betrachteten Prozesses dürfen wir sogar annehmen, daß

$$f(x) = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq x_2+\delta) \tag{11}$$

gilt. Satz 3 nimmt damit den Charakter eines Lokalisationssatzes an.

Wir benützen wieder die beim Beweis von Satz 1 beschriebene Zerlegung in S_1 und S_2 und setzen von nun an $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $x \neq 0$, $x_2 \neq 0$ voraus. Wegen (11) verschwindet S_1. Nach Voraussetzung (1) gilt

$$\left|x^{k-n}f\left(\frac{k-n}{k}\right)\right| \leqq x^{k-n}\cdot M\cdot e^{\frac{ak}{n}} = M\cdot e^a\cdot\left(x\cdot e^{\frac{a}{n}}\right)^{k-n} = L\cdot y_n^{k-n}, \tag{12}$$

wo L und y_n zur Abkürzung eingeführt sind. Daher haben wir

$$S_2 = (1-x)^n\sum_{k\in K_2}\binom{k-1}{n-1}x^{k-n}\left|f\left(\frac{k-n}{k}\right)\right|$$

$$\leqq L\left(\frac{1-x}{1-y_n}\right)^n(1-y_n)^n\sum_{k\in K_2}\binom{k-1}{n-1}y_n^{k-n}.$$

Benützen wir wieder die Tschebyscheffsche Ungleichung (6), so erhalten wir weiter

$$S_2 \leqq L\cdot\left[\left(\frac{1-x}{1-y_n}\right)^n y_n\right]\frac{1}{n\delta^2}.$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern nimmt bei festem n seinen größten Wert für $x = x_2$ an. Wegen

$$\left(\frac{1-x_2}{1-x_2e^{a/n}}\right)^n x_2e^{a/n} \to x_2e^{ax_2/(1-x_2)} \qquad (n\to\infty)$$

ist er für $n \geqq n_0$ und $x_1 \leqq x \leqq x_2$ beschränkt. Damit ist die behauptete gleichmäßige Konvergenz bewiesen.

Hinweis *(30. 12. 1959)*. Von O. Szász [3] wurde die Poissonsche Verteilung für die Approximation nutzbar gemacht; die approximierenden Ausdrücke sind dabei Potenzreihen multipliziert mit einer Exponentialfunktion. Als neuere Arbeit, in der ein Approximationssatz auf wahrscheinlichkeitstheoretische Weise bewiesen wird, sei die Arbeit [4] von Aratò und Rényi genannt.

Literatur

[1] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. I, second ed., New York 1954.

[2] G. G. Lorentz, *Bernstein polynomials*, Toronto 1953.

[3] O. Szász, *Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval*, Journal of Research of the National Bureau of Standards 45 (1950), p. 239-245.

[4] M. Arató and A. Rényi, *Probabilistic proof of a theorem on the approximation of continuous functions by means of generalized Bernstein polynomials*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 8 (1957), p. 91-98.

Reçu par la Rédaction le 22. 4. 1959

STUDIA MATHEMATICA, T. XIX. (1960)

Generalized bases in topological linear spaces

by

M. G. ARSOVE (Seattle) and R. E. EDWARDS (Reading, England)

1. Introduction. Let $\mathcal{U}$ be a topological linear space over a scalar field a. By a *basis* in $\mathcal{U}$ we mean a sequence $\{x_n\}$ of points of $\mathcal{U}$ such that to every x in $\mathcal{U}$ there corresponds a unique sequence $\{a_n\}$ of scalars for which

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \tag{1.1}$$

convergence of the series being that of the topology on $\mathcal{U}$. Each coefficient here determines a corresponding linear functional φ_n on $\mathcal{U}$, and in this notation (1.1) can be written as

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) x_n.$$

The above definition of a basis was introduced by Schauder [15] with $\mathcal{U}$ taken as a Banach space, and in this special case the coefficient functionals are automatically continuous. In general, whenever all the coefficient functionals φ_n are continuous, we shall refer to $\{x_n\}$ as a *Schauder basis*.

Although the utility of these basis concepts has been amply demonstrated in various branches of mathematics, certain generalizations appear to be at least as important. Examples in this direction have, in fact, long been implicit in summability theory. To be specific, we need only focus attention on the Banach space of all continuous functions x of period 2π on the real line, normed by $\|x\| = \max |x|$. The functions

$$x_1(t) = 1, \quad x_{2k}(t) = \sin kt, \quad x_{2k+1}(t) = \cos kt \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

then do not constitute a basis is $\mathcal{U}$, since there do not generally exist expansions of the form (1.1). However, it is known that for appropriately chosen coefficients a_n the series in (1.1) is always summable C_1 to x in the topology of $\mathcal{U}$, so that $\{x_n\}$ behaves very much like a basis.