STUDIA MATHEMATICA, T. XIX. (1960)

Über die Mengen der regulären und singulären Punkte einer Distribution

von

Z. ZIELEŹNY (Wrocław)

Der Gegenstand unserer Betrachtungen sind die Distributionen von L. Schwartz einer Veränderlichen. Der Fall mehrerer Veränderlichen wird in einer anderen Arbeit untersucht werden.

S. Łojasiewicz führte in [2] und [3] den Begriff des Wertes einer Distribution in einem Punkte ein. Die Definition lautet: Die Distribution T hat im *Punkte* x_0 *einen Wert*, wenn der Limes

$$(*)\qquad \lim_{\lambda\to 0} T(x_0+\lambda x)$$

existiert und konstant ist.

In [9] habe ich bewiesen, daß der Limes (*), falls er existiert, eine konstante Funktion darstellt.

Die Existenz bzw. Nichtexistenz des Wertes im oben angedeuteten Sinne nehmen wir als Grundlage zur Klassifikation der Punkte auf reguläre und singuläre für die gegebene Distribution.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Charakterisation der Mengen regulärer und singulärer Punkte einer Distribution. Im § 1 führen wir für eine Distribution den Begriff *beschränkt in einem Punkte* ein und beweisen einige seiner Eigenschaften. Er wird im folgenden Teil dieser Arbeit eine grundlegende Rolle spielen. Der Beweis des Satzes, der dem klassischen Satz von A. Denjoy, G. C. Young und S. Saks über die Derivierten einer Funktion enspricht (vgl. z. B. [5], S. 25-27), und die mit diesem Satz zusammenhängenden Eigenschaften einer überall beschränkten Distribution bilden den Inhalt des § 2. Im § 3 beweisen wir die notwendigen und im § 4 die hinreichenden Bedingungen für die Menge der singulären Punkte. Schließlich wenden wir uns im § 5 dem Zusammenhang zwischen den Mengen der regulären Punkte einer Distribution, ihrer Stetigkeitspunkte und der Punkte der Differenzierbarkeit der Primitiven zu.

Bezüglich der Symbolik sowie der fundamentalen Sätze der Distributionentheorie sei auf das Buch von L. Schwartz [6] verwiesen. Wir werden auch einige Bezeichnungen der Arbeit [2] entnehmen. Insbesondere bezeichnen wir mit $\mu(E)$ das Maß der Borelschen Menge E und mit $|\mu|$ seine Totalvariation und benutzen folgende Schreibweise:

$$\mu(x_0, x) = \begin{cases} \mu((x_0, x]) & \text{für} \quad x_0 < x, \\ 0 & \text{für} \quad x = x_0, \\ -\mu((x, x_0]) & \text{für} \quad x < x_0. \end{cases}$$

Für das Lebesguesche Maß der Menge E wenden wir das Symbol $|E|$ an.

Abweichend von [6], bezeichnen wir mit $\mathcal{D}_l$ den Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen φ, deren Träger im Intervall $[-l, l]$ enthalten sind.

Das Thema verdanke ich dem Anteil an einem von Prof. J. Mikusiński und Prof. R. Sikorski geleiteten Seminar. Für die wertvollen Ratschläge der Teilnehmer möchte ich meinen herzlichen Dank aussprechen.

§ 1. Beschränktheit einer Distribution in einem Punkte

1.1. Definition. Die in einer Umgebung von x_0 definierte Distribution T heiße *im Punkte x_0 beschränkt*, wenn die Menge der Distributionen

(1.1.1) $$T(x_0 + \lambda x) \quad \text{mit} \quad 0 < \lambda < 1$$

in dem in [6] eingeführten Sinne beschränkt ist; die Distribution T heiße *in x_0 rechtsseitig* bzw. *linksseitig beschränkt*, wenn die Menge (1.1.1) in einer Umgebung von $x = 0$ für $x > 0$ bzw $x < 0$ beschränkt ist.

Die Beschränktheit einer Distribution in einem Punkte ist eine örtliche Eigenschaft. Ist T in einer Umgebung von x_0 eine im gewöhnlichen Sinne beschränkte Funktion, so ist sie auch beschränkt im Sinne der obigen Definition.

Den Definitionsbereich des Parameters λ in (1.1.1) kann man durch ein beliebiges Intervall $0 < \lambda < \varepsilon$ ersetzen; im Fall einer nicht einseitigen Beschränktheit kann man $0 < |\lambda| < \varepsilon$ nehmen.

S. Łojasiewicz zeigte in [2], daß der Begriff des Wertes und des Limes einer Distribution in einem Punkte mit dem des n-ten Differentials einer stetigen Funktion, definiert durch Denjoy in [1], in enger Beziehung steht. Die Existenz des Wertes (bzw. rechts- bzw. linksseitigen Limes) einer Distribution ist nämlich der Existenz des n-ten Differentials (bzw. rechts- bzw. linksseitigen Differentials) im Sinne von Denjoy ihrer Primitiven der hinreichend großen Ordnung n gleichwertig. Unter Anwendung derselben Schlußweise läßt sich der Begriff der Beschränktheit einer Distribution in einem Punkte auf den der Endlichkeit der extremen n-ten

Differentialkoeffizienten einer stetigen Funktion zurückführen. Das Lemma von Łojasiewicz (vgl. [2], lemme 2.1) lautet dann folgendermaßen:

Lemma 1.1. *Die Funktion $f(x)$ sei in einer Umgebung des Nullpunktes für $x > 0$ definiert und die Funktionenschar*

$$\frac{f(\lambda x) - a_0(\lambda) - \ldots - a_{n-1}(\lambda)(\lambda x)^{n-1}}{\lambda^n} \quad \textit{mit} \quad 0 < \lambda < 1$$

sei für $0 < a \leqslant x \leqslant b$ gleichmäßig beschränkt. Dann sind die Koeffizienten $a_i(\lambda)$ mit $\lambda \to 0+$ konvergent und

$$a_i(\lambda) = a_i + O(\lambda^{n-i}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Folglich ist

(1.1.2) $$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-i} + O(|x|^n) \qquad \textit{falls} \quad x \to 0+.$$

Ist die Funktion $f(x)$ in einer Nullpunktsumgebung für $x < 0$ definiert und $b < 0$, oder ist sie definiert in der ganzen Nullpunktsumgebung und $a < 0 < b$, dann gilt die Behauptung (1.1.2) für $x \to 0-$ bzw. $x \to 0$.

Aus diesem Lemma folgt unmittelbar.

Satz 1.1. *Die Distribution T ist im Punkte x_0 dann und nur dann beschränkt, wenn es eine ganze Zahl $n \geqslant 0$ und eine in der Umgebung von x_0 stetige Funktion F gibt, derart, daß*

(1.1.3) $$T = F^{(n)} \quad \textit{und} \quad F(x) = O(|x - x_0|^n).$$

T ist im Punkte x_0 dann und nur dann rechts- bzw. linksseitig beschränkt, wenn es eine ganze Zahl $n \geqslant 0$ und eine in der Umgebung von x_0 für $x > x_0$ bzw. $x < x_0$ stetige Funktion F gibt, die den Bedingungen (1.1.3) für $x > x_0$ bzw. $x < x_0$ genügen.

Folgerung. *Die Beschränktheit der Distribution T im Punkte x_0 ist der Existenz in x_0 der endlichen extremen n-ten Differentialkoeffizienten im Sinne von Denjoy*

(1.1.4) $$F(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + O(|x - x_0|^n)$$

für ihre beliebige Primitive F der hinreichend großen Ordnung n gleichwertig.

Die rechts- bzw. linksseitige Beschränktheit der Distribution T im Punkte x_0 ist der Existenz in x_0 der endlichen extremen n-ten Differentialkoeffizienten (1.1.4) von der rechten bzw. linken Seite gleichwertig.

Bemerkung. Die Bedingungen (1.1.3) und (1.1.4) bleiben gültig, wenn man n durch eine größere ganze Zahl ersetzt.

1.2. Eine in x_0 beiderseitig beschränkte Distribution T braucht nicht unbedingt in x_0 beschränkt zu sein. Es gilt jedoch

Satz 1.2. *Ist die Distribution T in x_0 rechts- und linksseitig beschränkt, dann ist*

$$T = T_0 + \sum_{j=0}^{k} c_j \delta^{(j)}(x-x_0)$$

wo T_0 in x_0 beschränkt ist, c_j Konstante und $\delta^{(j)}(x)$ die Ableitung der δ-Dirac Distribution bezeichnen.

Dieser Satz ergibt sich unmittelbar aus Satz 1.1 und der Bemerkung in 1.1.

1.3. T sei eine in x_0 beschränkte Distribution. Wir führen eine Ordnungsbeziehung für das Beschränktsein der Distribution T in x_0 ein.

Definition. T ist in x_0 *beschränkt von niedrigerer Ordnung als* n (kurz *von Ordnung* $\leqslant n$), wenn es ein solches Maß μ gibt, welches in einer Umgebung von x_0 den Bedingungen

(1.3.1) $$T = \mu^{(n)} \quad \text{und} \quad |\mu|(x_0, x) = O(|x-x_0|^{n+1})$$

genügt.

Hat T im Punkte x_0 einen Wert von Ordnung $\leqslant n$, so ist sie offensichtlich in demselben beschränkt von Ordnung $\leqslant n$, aber nicht umgekehrt. Es gibt örtlich integrierbare Funktionen mit beliebig großer Ordnung der Beschränktheit in einem Punkte, die aber trotzdem in demselben sogar keinen einseitigen Limes besitzen [1]. Wir haben also

Ordnung des Wertes $T(x_0) \geqslant$ Ordnung der Beschränktheit von T in x_0.

Aus der Bedingung (1.3.1) folgt

(1.3.2) $$\mu(x_0, x) = O(|x-x_0|^{n+1}),$$

aber umgekehrt, aus (1.3.2) ergibt sich nur, daß T in x_0 von Ordnung $\leqslant n+1$ beschränkt ist.

Ist T eine örtlich integrierbare Funktion f, so ist die Bedingung

(1.3.3) $$\int_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt = O(|x-x_0|)$$

notwendig und hinreichend dazu, daß f in x_0 von Ordnung Null beschränkt ist. In diesem Fall sind die Derivierten ihrer Primitiven in x_0 endlich. Umgekehrt, sind die Derivierten der Primitiven endlich, so ist f in x_0 beschränkt von Ordnung $\leqslant 1$. Eine im gewöhnlichen Sinne örtlich beschränkte Funktion ist überall beschränkt von Ordnung Null.

(1) Als Beispiel kann die Funktion $\sin\log|x| + f(x)$ dienen, wo $f(x)$ eine örtlich integrierbare Funktion ist, die im Nullpunkt einen Wert n-ter Ordnung hat. Vgl. hierzu die Beispiele in [2], S. 15, und S. 28-29.

Ist T in x_0 beschränkt von Ordnung $\leqslant n$, so hat ihre Primitive in x_0 einen Wert von Ordnung $\leqslant n-1$; ist T in x_0 rechts- bzw. linksseitig beschränkt von Ordnung $\leqslant n$, so hat ihre Primitive in x_0 einen rechts- bzw. linksseitigen Limes von Ordnung $\leqslant n-1$.

Ist T in x_0 beschränkt von Ordnung $\leqslant n$ und ist α eine Funktion der Klasse C^n, wobei $\alpha(x_0) = 0$, so hat das Produkt αT in x_0 den Wert Null von Ordnung $\leqslant n$.

Sei nämlich $T = \mu^{(n)}$ und $|\mu|(x_0, x) = O(|x-x_0|^{n+1})$. Es gilt also

$$|\mu\alpha|(x_0, x) \leqslant |\mu|(x_0, x) \max_{|y-x_0|\leqslant|x-x_0|} |\alpha(y)| = o(|x-x_0|^{n+1})$$

und folglich hat die Distribution $(\mu\alpha)^{(n)}$ in x_0 den Wert Null von Ordnung $\leqslant n$. Da aber $(\mu\alpha)^{(n)} = \mu^{(n)}\alpha + \binom{n}{1}\mu^{(n-1)}\alpha' + \ldots + \mu\alpha^{(n)}$ und alle $\mu^{(k)}\alpha^{(n-k)}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$, in x_0 den Wert Null von Ordnung $\leqslant k$ haben, so hat auch $\mu^{(n)}\alpha$ den Wert Null von Ordnung $\leqslant n$.

Im Falle, wenn $\alpha(x_0) \neq 0$ braucht das Produkt αT nicht unbedingt in x_0 einen Wert zu haben; wohl ist es aber beschränkt von Ordnung $\leqslant n$.

Wir beweisen nun

Lemma 1.3. *Hat die Distribution T in x_0 den Wert $T(x_0)$ und ist sie in x_0 beschränkt von Ordnung $\leqslant n$, dann existiert eine stetige Funktion f von der Eigenschaft, daß*

(1.3.4) $$T = f^{(n+2)} \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^{n+2}} = \frac{T(x_0)}{(n+2)!}.$$

Beweis. Einem Satz von Łojasiewicz (vgl. [2], S. 7, théorème 2.3) zufolge existiert dann und nur dann der Wert $T(x_0)$, wenn es eine in einer Umgebung von x_0 stetige Funktion F und eine ganze Zahl $m \geqslant 0$ gibt, so daß

(1.3.5) $$T = F^{m} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{(x-x_0)^{m}} = \frac{T(x_0)}{m!}.$$

Wir nehmen $m > n+2$ an; es wird keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeuten, wenn außerdem einfachheitshalber $x_0 = 0$ und $T(x_0) = 0$ vorausgesetzt wird.

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß die Ableitung $F'(x)$ in einer Nullpunktsumgebung eine stetige Funktion ist und

(1.3.6) $$F'(x) = o(x^{m-1}).$$

Aus der Voraussetzung folgert man die Existenz eines Maßes μ, das in einer Nullpunktsumgebung den Bedingungen

(1.3.7) $$T = \mu^{(n)} \quad \text{und} \quad |\mu|(0, x) = O(|x|^{n+1})$$

genügt.

Für die Funktionen

$$g_p(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!} d\mu(t) \quad (p = 1, 2, \ldots) \tag{1.3.8}$$

gilt $g_p^{(p)} = \mu$ und $g_p(x) = O(|x|^{n+p})$; falls $p > 1$, sind sie stetig. Insbesondere ist gemäß (1.3.7) in einer Nullpunktsumgebung $g_p^{(n+p)} = T$ und daraus folgt bei Beachtung von (1.3.5), daß die Differenz $g_{m-n}(x) - F(x)$ ein Polynom ist, dessen Grad $m-1$ nicht übersteigt. Nun aber gilt $g_{m-n}(x) - F(x) = O(|x|^m)$. Folglich ist $g_{m-n}(x) = F(x)$ und für $p \geqslant m-n$ haben wir

$$g_p(x) = o(x^{n+p}). \tag{1.3.9}$$

Da nach Annahme $m > n+2$, so ist in einer Nullpunktsumgebung $F'(x) = g_{m-n-1}(x)$ eine stetige Funktion und

$$|F''(x)| < M|x|^{m-2}, \tag{1.3.10}$$

wo M eine Konstante bezeichnet.

Es wird jetzt die Beziehung

$$x^k F'(x) - \int_0^x t^k F''(t)\, dt = o(x^{m+k-1}) \tag{1.3.11}$$

für $k = 0, 1, \ldots$ bewiesen.

Wir benutzen dazu die Induktion über k. Für $k = 1$ folgt (1.3.11) aus (1.3.9) mit $p = m-n$, denn $g_{m-n}(x) = \int_0^x (x-t) F''(t)\, dt$. Wir setzen jetzt voraus, (1.3.11) sei für $k = 1, 2, \ldots, l-1$ erfüllt. Da

$$g_{m+l-n-1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^l}{l!} F''(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{l!}\left[x^l \int_0^x F''(t)\, dt - \binom{l}{1} x^{l-1} \int_0^x t F''(t)\, dt + \ldots + (-1)^l \int_0^x t^l F''(t)\, dt\right]$$

so erhält man aus (1.3.9) und der Induktionsvoraussetzung die Beziehung (1.3.11) für $k = l$.

Andererseits haben wir wegen (1.3.10)

$$\left|\int_0^x t^k F''(t)\, dt\right| \leqslant \left|\int_0^x t^k |F''(t)|\, dt\right| \leqslant \frac{M|x|^{k+m-1}}{k+m-1}. \tag{1.3.12}$$

Es sei nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben; wir nehmen $k = E[2M/\varepsilon]$. Dann folgt aus (1.3.12)

$$\left|\int_0^x t^k F''(t)\, dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} |x|^{k+m-1}. \tag{1.3.13}$$

Wegen (1.3.11) existiert ein solches $\delta > 0$, daß für $|x| < \delta$

$$\left|x^k F'(x) - \int_0^x t^k F''(t)\, dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} |x|^{m+k-1}. \tag{1.3.14}$$

Aus (1.3.13) und (1.3.14) ergibt sich nun, für $|x| < \delta$,

$$|F'(x)| \leqslant \varepsilon |x|^{m-1},$$

also (1.3.6), w. z. b. w.

1.4. SATZ 1.4. *Hat die Distribution T in x_0 einen Wert und ist sie in diesem Punkt beschränkt von Ordnung $\leqslant n$, so ist die Ordnung des Wertes $\leqslant n+1$.*

Es ist zweckmäßig dem Beweis des Satzes ein Lemma vorauszustellen.

LEMMA 1.4. *Sei μ ein in einer Nullpunktsumgebung definiertes Maß, das die Bedingungen*

$$|\mu|(0, x) = O(|x|^{n+1}) \tag{1.4.1}$$

und

$$\int_0^x \mu(0, t)\, dt = o(x^{n+2}) \tag{1.4.2}$$

erfüllt. Dann existiert der approximative Limes

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{apr} \frac{\mu(0, x)}{x^{n+1}} = 0. \tag{1.4.3}$$

Beweis. Nehmen wir an es gäbe eine solche Menge $E \subset (0, \infty)$, daß

$$\overline{\lim_{x \to 0+}} \frac{|E \cap (0, x)|}{x} = \varrho > 0 \tag{1.4.4}$$

und daß für jedes $x \in E$ gilt

$$\mu(0, x) > \eta x^{n+1} \quad (\eta > 0). \tag{1.4.5}$$

Wegen (1.4.4) existiert eine Zahlenfolge $x_m \to 0+$, deren Glieder die Ungleichungen

$$\tfrac{5}{6} \varrho x_m < |E \cap (0, x_m)| < \tfrac{7}{6} \varrho x_m \tag{1.4.6}$$

erfüllen. Wir können voraussetzen, daß $2x_{m+1} \leqslant x_m$; dann folgt aus (1.4.6)

$$(1.4.7) \qquad |E \cap (x_{m+1}, x_m)| > \frac{\varrho}{2}(x_m - x_{m+1}) \geqslant \frac{\varrho}{4} x_m.$$

Andererseits wegen (1.4.1) haben wir

$$(1.4.8) \qquad |\mu|(0, x_m) < M x_m^{n+1}, \text{ wobei } M \text{ konstant ist.}$$

Wir behaupten, daß es ein Intervall $(\alpha_m, \beta_m) \subset (x_{m+1}, x_m)$ von folgender Beschaffenheit gibt:

$$(1.4.9') \qquad \beta_m - \alpha_m \geqslant \frac{\varrho x_m}{4N},$$

wo N eine beliebige, von m unabhängige Konstante ist, die der Forderung $E[N] > M(n+2)2^{2n+3}/\eta\varrho^{n+1}$ genügt; für $x \in (\alpha_m, \beta_m)$ gilt

$$(1.4.9'') \qquad \mu(0, x) > \frac{\eta}{2} x^{n+1}.$$

Angenommen es existiere kein Intervall $\subset (x_{m+1}, x_m)$ mit der Eigenschaft (1.4.9'), das (1.4.9'') erfüllt. Wir betrachten die Intervalle

$$\left(y - \frac{\varrho x_m}{4E[N]}, y\right] \subset (x_{m+1}, x_m)$$

mit $y \in E$. Gemäß (1.4.7) gäbe es dann mindestens $E[N]$ solche Intervalle, die fremd wären und, wegen der Annahme, (1.4.9'') nicht erfüllen würden. Wir bezeichnen ihre rechten Endpunkte mit y_k so, daß $y_k < y_{k+1}$ ($k = 1, 2, \ldots, E[N]-1$). Da

$$|\mu|\left(y_k - \frac{\varrho x_m}{4E[N]}, y_k\right) \geqslant \frac{\eta}{2} y_k^{n+1} \geqslant \frac{\eta}{2}\left(x_{m+1} + k\frac{\varrho x_m}{4E[N]}\right)^{n+1} > \frac{\eta}{2}\left(\frac{k\varrho x_m}{4E[N]}\right)^{n+1},$$

also nach Anwendung der Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{E[N]} k^{n+1} \geqslant \frac{(E[N])^{n+2}}{n+2},$$

erhalten wir

$$|\mu|(0, x_m) \geqslant |\mu|(x_{m+1}, x_m) > \frac{\eta}{2}\left(\frac{\varrho x_m}{4E[N]}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{E[N]} k^{n+1} \geqslant \frac{\eta\varrho^{n+1}E[N]}{(n+2)2^{2n+3}} x_m^{n+1},$$

was wegen der Definition der Konstante N der Bedingung (1.4.8) widerspricht. Wir haben somit gezeigt, daß für jedes m ein Intervall mit den genannten Eigenschaften existiert.

Unter Berücksichtigung von (1.4.2) wählen wir jetzt m_0 so groß, daß für $m > m_0$

$$(1.4.10) \qquad \left|\int_0^{\alpha_m} \mu(0, x)\,dx\right| < \alpha_m^{n+2} \frac{\eta\varrho}{(n+2)N2^4}$$

gilt. (1.4.9') und (1.4.9'') liefern aber

$$(1.4.11) \qquad \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \mu(0, x)\,dx > \frac{\eta}{2(n+2)}(\beta_m^{n+2} - \alpha_m^{n+2}) > \beta_m^{n+2} \frac{\eta\varrho}{(n+2)N2^3}.$$

Unter Heranziehung von (1.4.10) erhält man aus (1.4.11) für jedes $m > m_0$

$$\int_{\alpha_m}^{\beta_m} \mu(0, x)\,dx > \beta_m^{n+2} \frac{\eta\varrho}{(n+2)N2^4},$$

was (1.4.2) widerspricht. Damit ist das Lemma bewiesen.

Den Beweis des Satzes 1.4 führen wir für den Fall $x_0 = 0$ und $T(x_0) = 0$ durch. Nach Voraussetzung existiert ein Maß μ, das in einer Nullpunktsumgebung die Forderung (1.3.1) und, bei Beachtung von Lemma 1.3 und Lemma 1.4, auch (1.4.3) erfüllt. Aus (1.3.1) folgt $|\mu|(0, x) < M|x|^{n+1}$, wo M eine Konstante ist.

Es sei jetzt ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben; wir bezeichnen

$$E_1 = \left\{x \colon |\mu(0, x)| < \frac{\varepsilon}{2}|x|^{n+1}\right\}.$$

Gemäß (1.4.3) existiert ein $\delta_1 > 0$ derart, daß für $0 \leqslant x \leqslant \delta_1$

$$|CE_1 \cap (-x, x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} x$$

gilt. Folglich haben wir für $|x| < \delta_1$

$$\left|\int_0^x |\mu(0, t)|\,dt\right| \leqslant \int_{E_1 \cap (0, x)} + \int_{CE_1 \cap (0, x)}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}|x|^{n+1}|E_1 \cap (0, x)| + M|x|^{n+1}|CE_1 \cap (0, x)| \leqslant \varepsilon|x|^{n+2}$$

(falls $x < 0$, bezeichnet $(0, x)$ das Intervall $(x, 0)$), und dies bedeutet, daß die Ordnung des Wertes $\leqslant n+1$ ist.

FOLGERUNG. *Ist T in x_0 beschränkt von Ordnung $\leqslant n$ und hat sie in diesem Punkt keinen Wert von Ordnung $\leqslant n+1$, so hat T in x_0 keinen Wert.*

1.5. Mit $V(n, N, \varepsilon)$, wo n eine ganze Zahl $\geqslant 0$ ist und N, ε — reelle Zahlen > 0, bezeichnen wir die Menge der Funktionen φ, die den Bedingungen

$$(1.5.1) \qquad \varphi \in \mathcal{D}^n, \quad \text{Träger } \varphi \subset [-\varepsilon, \varepsilon], \quad |\varphi^{(n)}(x)| \leqslant N$$

genügen.

Die Distribution T sei in einer Umgebung des Punktes x_0 von Ordnung $\leqslant n$ und $V_n = V(n, N, \varepsilon)$ sei eine beliebige (festgesetzte) Funktionenmenge, die (1.5.1) erfüllt. Dann ist für jedes $\varphi \in V_n$ die Funktion

$$(1.5.2) \qquad \Phi_\varphi(\lambda, x_0) = (T(x_0 + \lambda x), \varphi)$$

der Veränderlichen λ in einer Umgebung des Nullpunktes für $\lambda \neq 0$ definiert und stetig. Es gilt der folgende

Satz 1.5. *Damit die Distribution T in x_0 beschränkt sei von Ordnung $\leqslant n$, ist notwendig und hinreichend, daß T in einer Umgebung des Punktes x_0 von Ordnung $\leqslant n$ sei, und daß für sämtliche $\varphi \in V_n$ die Funktionen $\Phi_\varphi(\lambda, x_0)$ der Veränderlichen λ in einer Umgebung von $\lambda = 0$ gleichmäßig beschränkt seien.*

Für den Fall des Wertes einer Distribution in einem Punkte bewies Łojasiewicz den folgenden Satz: *Für die Existenz des Wertes $T(x_0)$ von Ordnung $\leqslant n$ ist notwendig und hinreichend, daß T in einer Umgebung des Punktes x_0 von Ordnung $\leqslant n$ sei und daß der Limes*

$$(1.5.3) \qquad \lim_{\lambda \to 0} \Phi_\varphi(\lambda, x_0)$$

existiere, und zwar gleichmäßig in Bezug auf sämtliche $\varphi \in V_n$ (vgl. [2], S. 25, théorème 4.4). Der Beweis des Satzes 1.5 verläuft weitgehend analog bei Verwendung von Lemma 1.1.

Bemerkung. In (1.5.1) genügt es Funktionen φ aus $\mathcal{D}_s$ zu nehmen. Dann ergibt sich aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Funktionen $\Phi_\varphi(\lambda, x_0)$ in einer Umgebung des Nullpunktes für alle $\varphi \in V_n$ die Beschränktheit der Distribution T in x_0 von Ordnung $\leqslant n$.

Ist T im Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ von Ordnung $\leqslant n$, so kann im Satz 1.5 als Nullpunktsumgebung $0 < |\lambda| < 1$ genommen werden. Im folgenden werden wir stets $V_n = V(n, 1, 1)$ bezeichnen.

§ 2. Beschränktheit und Regularität. Überall beschränkte Distributionen

2.1. Satz 2.1. *Sei E die Menge der Punkte, in denen die Distribution T mindestens einseitig beschränkt ist. Dann hat T einen Wert fast überall in E.*

Beweis. Zum Beweis genügt es den Fall einer Durchschnittsmenge E^* von E mit einer beliebigen offenen Menge Ω, deren abgeschlossene Hülle $\overline{\Omega}$ kompakt ist, zu behandeln.

Es existiert eine ganze Zahl $n \geqslant 0$ und eine stetige Funktion F derart, daß auf Ω gilt $T = F^{(n)}$.

Auf Grund der Folgerung aus 1.1 ist die rechtsseitige bzw. linksseitige Beschränktheit einer Distribution T in x_0 der Existenz in x_0 der endlichen extremen n-ten Differentialkoeffizenten (im Sinn von Denjoy) von der rechten bzw. linken Seite für ihre Primitive von hinreichend großer Ordnung gleichwertig.

Sei $F^{(-k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ die k-te Primitive der Funktion F und sei E_k^* die Menge aller Punkte aus Ω, in welchen $F^{(-k)}$ endliche $n+k$-te extreme Differentialkoeffizienten von mindestens einer Seite besitzt. Offenbar ist

$$(2.1.1) \qquad E^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k^*.$$

Nach einem Satz von Denjoy ([1], S. 293, théorème VII) hat die Funktion $F^{(-k)}$ fast überall in E_k^* ein Differential von Ordnung $n+k$ und dies bedeutet (vgl. [2], S. 7, corollaire in 2.3), daß T fast überall in E_k^* einen Wert hat. Wegen (2.1.1) hat nun T einen Wert fast überall in E^*, w. z. b. w.

Insbesondere folgt aus dem obigen Satz, daß die Menge derjenigen Punkte, in denen T eine Singularität vom „δ-Dirac Typ" aufweist, d. h. die Menge der singulären Punkte ξ, in denen der Limes $\lim_{x \to \xi} T$ existiert, eine Nullmenge ist.

Bemerkung. Satz 2.1 entspricht dem bekannten Satz von A. Denjoy, G. C. Young und S. Saks über die Derivierten einer beliebigen Funktion. Man kann ihn nämlich auch folgendermaßen formulieren:

Ist E die Menge derjenigen ξ, in welchen die Primitive S der Distribution T einen mindestens einseitigen Limes $L(\xi)$ besitzt, so sind fast überall nur zwei Fälle möglich:

I. Der Quotient

$$\frac{S(x) - L(\xi)}{x - \xi}$$

(definiert für $x \neq \xi$) ist in ξ beiderseitig unbeschränkt;

II. Es existiertder Wert

$$(2.1.2) \qquad T(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{S(x) - L(\xi)}{x - \xi}.$$

Die Beziehung (2.1.2), bei Voraussetzung, daß der Wert linker Hand existiert, ergibt sich aus einem Satz von Łojasiewicz ([2], S. 16, théorème 3.4). Dem Beweis dieses Satzes entnimmt man auch, bei Berücksichtigung von Satz 1.5, daß T in ξ dann und nur dann beschränkt (bzw. rechts- bzw. linksseitig beschränkt) ist, wenn der Quotient

$$\frac{S(x)-L(\xi)}{x-\xi}$$

in ξ beschränkt (bzw. rechts- bzw. linksseitig beschränkt) ist. Die Gleichwertigkeit des Satzes 2.1 mit seiner oben angegebenen neuen Formulierung ist also ersichtlich.

2.2. Wir stellen uns jetzt die Frage: Ist eine überall beschränkte Distribution durch ihre Werte, die nach Satz 2.1 fast überall existieren bestimmt?

Die Antwort auf diese Frage ist positiv. Sei nämlich T eine in einer offenen Menge Ω überall beschränkte Distribution und sei f eine in Ω örtlich integrierbare Funktion. Der Satz von Łojasiewicz: *Ist $T(\xi)\geqslant f(\xi)$ fast überall in Ω, so ist $T\geqslant f$ in Ω (im Sinn der Distributionentheorie)*, bleibt gültig bei unserer allgemeineren Voraussetzung (2). Hieraus schließen wir, daß falls $T(\xi)=f(\xi)$ fast überall in Ω, so ist $T=f$ in Ω (im Sinne der Distributionentheorie).

Ist insbesondere T eine überall beschränkte Distribution und ist fast überall $T(\xi)=0$, so gilt $T=0$; sind S und T überall beschränkte Distributionen und ist fast überall $T(\xi)=S(\xi)$, so gilt $T=S$.

§ 3. Notwendige Bedingungen

3.1. Sei T eine Distribution, definiert auf der euklidischen Geraden R_1, und sei U_k die offene Menge derjenigen Punkte, in derer Umgebung T von höchstens k-ter Ordnung ist. Offenbar gilt

$$U_k\subset U_{k+1}\quad \text{und}\quad \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k=R_1.$$

Hat U_k einen nichtleeren Rand, so bezeichnen wir mit H_ϱ, wo $\varrho>0$ ist, die abgeschlossene Menge aller $\xi\in U_k$, deren Abstand vom Rand der Menge U_k nicht kleiner als ϱ ist. Im Fall $U_k=R_1$ wird $H_\varrho=R_1$ bezeichnet.

Wir setzen jetzt zunächst ein nichtleeres U_k (d. h. ein hinreichend großes k) und ein $\varrho>0$ fest. Dann ist für jedes λ aus dem Intervall $0<\lambda<\varrho$ und jedes $\varphi\in V_k$ die Funktion $\Phi_\varphi(\xi,\lambda)$ der Veränderlichen ξ

(2) Vgl. [2], S. 30, théorème 5.2; aus 5.3 folgt, daß T auf einer abzählbaren Menge unbeschränkt sein kann, sofern nur ihre Primitive auf dieser Menge überall einen Wert hat.

definiert und stetig in einer offenen Menge $\Omega_\lambda\supset H_\varrho$, denn gemäß (1.5.2) haben wir

$$(3.1.1)\qquad \Phi_\varphi(\lambda,\xi)=(T*\check{\varphi}_\lambda)_\xi,\quad \text{worin}\quad \varphi_\lambda(x)=\frac{1}{\lambda}\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\in\mathcal{D}_\varrho$$

und $\check{\varphi}(x)=\varphi(-x)$ ist.

Lemma 3.1. *Die Menge $\mathcal{B}(k,H_\varrho)$ aller Punkte aus H_ϱ, wo T beschränkt von Ordnung $\leqslant k$ ist, ist ein F_σ.*

Beweis. Auf Grund des Satzes 1.5 ist T im Punkte $\xi\in H_\varrho$ dann und nur dann beschränkt von Ordnung $\leqslant k$, wenn

$$(3.1.2)\qquad \sum_{m}\sum_{n>1/\varrho}\prod_{0<\lambda<1/n}\prod_{\varphi\in V_k}\{\Phi_\varphi(\lambda,\xi)\leqslant m\}.$$

Hieraus folgt

$$(3.1.3)\qquad \mathcal{B}(k,H_\varrho)=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=E[1/\varrho]+1}^{\infty}\bigcap_{0<\lambda<1/n}\bigcap_{\varphi\in V_k}F^{m,\lambda,\varphi},$$

wobei $F^{m,\lambda,\varphi}$ die abgeschlossene Menge aller $\xi\in H_\varrho$ bezeichnet, in denen $\Phi_\varphi(\lambda,\xi)\leqslant m$ ist. $\mathcal{B}(k,H_\varrho)$ ist also ein F_σ, w. z. b. w.

Wählt man nun eine Zahlenfolge $\varrho_\nu\to 0$, so erhält man eine Folge abgeschlossener Mengen H_{ϱ_ν} dergestalt, daß

$$(3.1.4)\qquad \bigcup_{\nu=1}^{\infty}H_{\varrho_\nu}=U_k.$$

Hieraus erhalten wir:

Folgerung 1. *Die Menge $\mathcal{B}(k,U_k)$ aller Punkte, in denen T beschränkt ist von Ordnung $\leqslant k$, ist ein F_σ.*

Folgerung 2. *Die Menge $\mathcal{B}(\infty,R_1)$ aller Punkte, in denen T beschränkt ist, ist ein F_σ.*

Es gilt nämlich

$$\mathcal{B}(\infty,R_1)=\bigcup_{k=0}^{\infty}\mathcal{B}(k,U_k).$$

Folgerung 3. *Die Menge aller singulären Punkte, in denen eine Distribution unbeschränkt ist, ist ein G_δ.*

3.2. Aus den in 1.3 angegebenen Eigenschaften der Beschränktheit einer Distribution ergibt sich, daß die Menge aller Punkte, in denen sämtliche Distributionen der Folge $\{T^{(n)}\}$ beschränkt sind, mit der Menge $\mathcal{M}$ der für sämtliche Distributionen der erwähnten Folge regulären Punkte, identisch ist.

Wir bezeichnen mit P_k die F_σ-Menge derjenigen Punkte, in denen $T^{(k)}$ beschränkt ist. Es gilt

$$P_k \supset P_{k+1} \quad \text{und} \quad \mathcal{M} = \bigcap_{k=0}^{\infty} P_k;$$

$\mathcal{M}$ ist also ein $F_{\sigma\delta}$.

Wir werden sagen, daß die Distribution T auf einer Menge E der Klasse $\mathcal{K}^n$ angehört, wenn in jedem Punkte $\xi \in E$ der Wert $T^{(n)}(\xi)$ existiert. Insbesondere gehört T auf E zur Klasse $\mathcal{K}^\infty$, wenn jeder Punkt aus E für sämtliche Distributionen der Folge $\{T^{(n)}\}$ regulär ist. Wir haben also

Satz 3.2. *Die Menge $\mathcal{M}$ aller Punkte, in denen eine Distribution der Klasse $\mathcal{K}^\infty$ angehört, ist ein $F_{\sigma\delta}$.*

3.3. Lemma 3.3. *Die Menge $\mathcal{R}(k, H_\varrho)$ aller Punkte aus H_ϱ, in denen T einen Wert von Ordnung $\leqslant k$ hat, ist ein $F_{\sigma\delta}$.*

Beweis. Nach dem in 1.5 angegebenen Satz von Łojasiewicz hat die Distribution T im Punkte $\xi \in H_\varrho$ dann und nur dann einen Wert von Ordnung $\leqslant k$, wenn

$$(3.3.1) \qquad \prod_{m>0} \sum_{n>1/\varrho} \prod_{0<\lambda_1,\lambda_2<1/n} \prod_{\varphi_1,\varphi_2 \in V_k} \left\{ |\Phi_{\varphi_1}(\lambda_1, \xi) - \Phi_{\varphi_2}(\lambda_2, \xi)| \leqslant \frac{1}{m} \right\}.$$

Hieraus egibt sich

$$(3.3.2) \qquad \mathcal{R}(k, H_\varrho) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=E[1/\varrho]+1}^{\infty} \bigcap_{0<\lambda_1,\lambda_2<1/n} \bigcap_{\varphi_1,\varphi_2 \in V_k} F^{m,\lambda_1,\lambda_2,\varphi_1,\varphi_2},$$

worin $F^{m,\lambda_1,\lambda_2,\varphi_1,\varphi_2}$ die abgeschlossene Menge aller $\xi \in H_\varrho$ bezeichnet, in denen die Ungleichung in der Klammer von (3.3.1) erfüllt ist. Folglich ist $\mathcal{R}(k, H_\varrho)$ ein $F_{\sigma\delta}$, w. z. b. w.

Die Vereinigung einer Folge von $F_{\sigma\delta}$-Mengen, die in abgeschlossenen Intervallen von untereinander fremdem offenen Kern enthalten sind, ist wieder eine $F_{\sigma\delta}$-Menge. Wählen wir nun (falls nicht $H_\varrho = U_k$ ist) anstatt H_{ϱ_ν} eine Folge I_{ϱ_ν} abgeschlossener Intervalle von untereinander fremden offenen Kernen, deren Abstand vom Rand der Menge U_k nicht kleiner als ϱ_ν ist, so erhalten wir

Folgerung 1. *Die Menge $\mathcal{R}(k, U_k)$ aller Punkte, in denen T einen Wert von Ordnung $\leqslant k$ hat, ist ein $F_{\sigma\delta}$.*

Unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus 3.1 erschließt man daraus, daß die Menge aller Punkte, in denen T beschränkt ist von Ordnung $\leqslant k$, ohne in ihnen einen Wert von Ordnung $\leqslant k+1$ zu haben, d. h. die Menge $\mathcal{B}(k, U_k) \setminus \mathcal{R}(k+1, U_{k+1})$ ein $G_{\delta\sigma}$ ist. Demzufolge erhält man bei Beachtung von Satz 2.1 und der Folgerung aus Satz 1.4 die

Folgerung 2. *Die Menge singulärer Punkte, in denen T beschränkt ist von Ordnung $\leqslant k$, ist ein $G_{\delta\sigma}$ und eine Nullmenge.*

Folgerung 3. *Die Menge $\mathcal{S}_b$ singulärer Punkte, in denen T beschränkt ist, ist ein $G_{\delta\sigma}$ und eine Nullmenge.*

Es gilt nämlich

$$\mathcal{S}_b = \mathcal{S}_b \cap \mathcal{B}(\infty, R_1) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_b \cap \mathcal{B}(k, U_k)$$

und $\mathcal{S}_b \cap \mathcal{B}(k, U_k)$ sind $G_{\delta\sigma}$-Mengen vom Maße Null vermöge der Folgerung 2. Obige Folgerung und Folgerung 3 aus 3.1 liefern schließlich

Satz 3.3. *Die Menge $\mathcal{S}$ aller singulären Punkte einer Distribution ist eine Vereinigung*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\infty \cup \mathcal{S}_b,$$

worin $\mathcal{S}_\infty$ ein G_δ und $\mathcal{S}_b$ ein $G_{\delta\sigma}$ vom Maße Null ist.

Mit $\mathcal{S}_\infty$ wurde die Menge der Unbeschränktheit der Distribution bezeichnet, während $\mathcal{S}_b$ aus allen singulären Punkten besteht, in denen die Distribution beschränkt ist.

§ 4. Hinreichende Bedingungen

4.1. Bekanntlich kann die Ableitung (im Sinn der Distributionentheorie) einer stetigen Funktion, die nirgends (gewöhnlich) differenzierbar ist, in gewissen Punkten einen Wert haben ([2], S. 23, und [4], S. 36). Andererseits gibt es Distributionen — Ableitungen stetiger Funktionen, die nirgends einen Wert besitzen (³). Es ist leicht zu zeigen, daß z. B. die Ableitung der nirgends (gewöhnlich) differenzierbaren Funktion von van der Waerden diese Eigenschaft besitzt. Wir geben ein einfaches Beispiel einer Distribution — Ableitung einer stetigen und periodischen Funktion, die überall unbeschränkt ist.

Beispiel. Sei f eine folgendermaßen definierte Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 2k-1 < x \leqslant 2k, \\ -1 & \text{für } 2k < x \leqslant 2k+1, \end{cases}$$

wobei k die ganzen Zahlen durchläuft. Wir ziehen die Funktionenfolge $f_n(x) = 4^n f(4^{2n} x)$, $n = 0, 1, \ldots$ in Erwägung.

Die Distribution

$$W_0 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

ist Ableitung einer stetigen, periodischen Funktion mit der Periode 2.

(³) Die Existenz solcher Distributionen bewies S. Łojasiewicz in [2], S. 12.

Wir werden zeigen, daß W_0 überall unbeschränkt ist. Zu diesem Zweck wählen wir eine Funktion $\psi \in \mathcal{D}_{1/2}$, die den Bedingungen

$$(4.1.1)\qquad \psi(x) = 1 \quad \text{für } |x| < \tfrac{15}{32} \quad \text{und} \quad \psi'(x) \neq 0 \quad \text{für } \tfrac{15}{32} < |x| < -$$

genügt und setzen $\lambda_n = 4^{-2n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Im folgenden werden wir die Bezeichnungen

$$(4.1.2)\qquad B = \{\varphi\colon \varphi(x) = \pm\psi(x-t),\ |t| \leqslant \tfrac{1}{2}\}$$

und

$$(4.1.3)\qquad (T, B) = \sup_{\varphi \in B} (T, \varphi)$$

benutzen, wobei T eine beliebige Distribution ist.

Aus der Definition von W_0 und (4.1.3) erhalten wir für jeden Punkt ξ

$$\big(W_0(\xi+\lambda_n x), B\big) \geqslant \big(f_n(\xi+\lambda_n x), B\big) - \sum_{\substack{k=0\\ k\neq n}}^{\infty} \big(f_n(\xi+\lambda_n x), B\big).$$

Nun ist aber wegen (4.1.1) und (4.1.2)

$$(4.1.4)\qquad \big(f_n(\xi+\lambda_n x), B\big) \geqslant 4^n \tfrac{15}{16},$$

sowie

$$(4.1.5)\qquad \sum_{k=0}^{n-1} \big(f_n(\xi+\lambda_n x), B\big) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} 4^k < \frac{4^n}{3}.$$

Es sei jetzt ein $k > n$, ein ξ und ein $\varphi \in B$ festgesetzt. Wir bezeichnen mit I_m $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ die Intervalle, in denen $f_k(\xi+\lambda_n x)$ konstant ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß $x \in I_m$ und $y \in I_{m+1}$ die Größenbeziehung $x < y$ nach sich zieht. Ferner definieren wir

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } x \in I_m, \\ 0 & \text{für } x \in CI_m. \end{cases}$$

Ist $\big(f_k(\xi+\lambda_n x), \varphi_{m_0}\big)$ einer der größten nichtnegativen Werte aller $\big(f_k(\xi+\lambda_n x), \varphi_m\big)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, so gilt für jede ungerade Zahl j

$$\big(f_k(\xi+\lambda_n x), \varphi_{m_0+j} + \varphi_{m_0+j+1}\big) \leqslant 0,$$

sowie

$$\big(f_k(\xi+\lambda_n x), \varphi_{m_0-j} + \varphi_{m_0-j-1}\big) \leqslant 0.$$

Daraus ergibt sich $\big(f_k(\xi+\lambda_n x), \varphi\big) \leqslant \big(f_k(\xi+\lambda_n x), \varphi_{m_0}\big)$ und wegen $|I_m| = 1/4^{2(k-n)}$ und $|f_k(x)| = 4^k$ ist dann $\big(f_k(\xi+\lambda_n x), \varphi\big) \leqslant 4^n/4^{k-n}$. Analog erhält man $\big(f_k(\xi+\lambda_n x), \varphi\big) \geqslant -4^n/4^{k-n}$. Folglich, weil $\varphi \in B$ beliebig war, haben wir $\big(f_k(\xi+\lambda_n x), B\big) \leqslant 4^n/4^{k-n}$ und

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \big(f_k(\xi+\lambda_n x), B\big) \leqslant 4^n \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} = \frac{4^n}{3}.$$

Dies liefert schließlich bei Berücksichtigung von (4.1.4) und (4.1.5)

$$\big(W_0(\xi+\lambda_n x), B\big) > 4^{n-1} \to \infty, \qquad \text{wenn } n \to \infty,$$

womit die Unbeschränkheit von W_0 in ξ bewiesen ist.

4.2. Sei γ eine Funktion aus $\mathcal{D}$ mit den Eigenschaften

$$(4.2.1)\qquad \text{Träger } \gamma = [0, 1], \quad \gamma(\tfrac{1}{2}-x) = \gamma(\tfrac{1}{2}+x), \quad \gamma(\tfrac{1}{2}) = 1.$$

Für jedes $0 < \delta \leqslant \frac{1}{2}$ gehört die Funktion

$$(4.2.2)\qquad \gamma_\delta(x) = \gamma(\delta+x)\gamma(\delta-x)$$

gewiß zu $\mathcal{D}$; Träger $\gamma_\delta = [-\delta, \delta]$ und $\gamma(-x) = \gamma(x)$. Wir setzen außerdem $\gamma_\delta'(x) > 0$ für alle $-\delta < x < 0$ und $0 < \delta \leqslant \frac{1}{2}$ voraus ([4]).

Ist I ein Intervall mit dem Mittelpunkt in c und der Länge $2\delta \leqslant 1$ und ist G eine offene Menge mit den Komponenten I_n $(n = 1, 2, \ldots)$ deren Längen $\leqslant 1$ sind, so bezeichnen wir

$$(4.2.3)\qquad \gamma(I, x) = \gamma_\delta(x-c), \qquad \gamma(G, x) = \sum_n \gamma(I_n, x).$$

Die Funktion $\gamma(G, x)$ gehört zur Klasse C^∞ und es gilt $\gamma^{(m)}(G, x) = \sum_n \gamma^{(m)}(I_n, x)$, $m = 1, 2, \ldots$

In der Tat haben wir gemäß (4.2.2) für ein $x_0 \in CG$ und alle I_n

$$|\gamma^{(m)}(I_n, x)| \leqslant \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} M_k A_{m-k}(x_0, x),$$

wobei $M_k = \sup|\gamma^{(k)}(x)|$, $A_k(x_0, x) = \sup_{y<|x-x_0|} |\gamma^{(k)}(y)|$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Hieraus folgt die Existenz der Ableitung beliebiger Ordnung von $\gamma(G, x)$ in x_0 sowie auch $\gamma^{(m)}(G, x_0) = 0$.

Die Definition der Funktion $\gamma(G, x)$ erweitern wir auf den Fall, daß G Komponenten I_{k_n} der Länge > 1 enthält, indem wir zur Summe (4.2.3) Funktionen $\beta_{k_n}(x)$ aus C^∞ hinzufügen, die auf I_{k_n} positiv und sonst gleich Null sind. Auf diese Weise wird $\gamma(G, x)$ für eine beliebige offene Menge G definiert, gehört weiter zu C^∞ und die Forderung $\gamma(G, x) > 0$ für $x \in G$ und $\gamma(G, x) = 0$ für $x \in CG$ bleibt erfüllt.

([4]) Diese Voraussetzung ist z. B. erfüllt für die Funktion gleich $e^{-\frac{(2x-1)^2}{1-(2x-1)^2}}$, wenn $0 < x < 1$ und gleich Null außerhalb dieses Intervalls.

Ist W eine überall unbeschränkte Distribution, so ist das Produkt $W\gamma(G, x)$ unbeschränkt auf der Menge G und gehört zu $\mathcal{K}^\infty$ auf ihrem Komplement. Wir gelangen also zum

SATZ 4.2. *Zu jeder offenen Menge G existiert eine Distribution, die auf G unbeschränkt ist und auf ihrem Komplement zur Klasse $\mathcal{K}^\infty$ gehört.*

4.3. Z. Zahorski zeigte in [7], daß zu jeder kein Intervall enthaltenden G_δ-Menge E eine stetige Funktion existiert, die auf CE differenzierbar ist und in jedem zu E gehörigen Punkte unendliche obere und untere Derivierten mit entgegengesetzten Vorzeichen hat (vgl. [7], S. 493, Satz II).

Unsere Aufgabe ist jetzt die Konstruktion einer solchen stetigen Funktion F, die in jedem Punkt $\xi \in CE$ ein Differential im Sinne von Denjoy beliebiger Ordnung besitzt und deren (distributionelle) Ableitung F' auf E unbeschränkt ist. Auf diese Weise beweisen wir nämlich

LEMMA 4.3. *Zu jeder kein Intervall enthaltenden G_δ-Menge E existiert eine Distribution, die auf E unbeschränkt ist und auf dem Komplement zu $\mathcal{K}^\infty$ gehört.*

Beweis. Sei I ein Intervall mit c als Mittelpunkt und der Länge $2\delta < 1$ und sei $a > 2\sup\gamma'_\tau(x)$ für alle $0 < \tau \leqslant \frac{1}{2}$. Wir definieren durch Induktion eine Punktfolge $\{l_n^I\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, so daß $c - \delta < \ldots < l_{-2}^I < l_{-1}^I < l_0^I < l_1^I < l_2^I < \ldots \to c + \delta$. Wir setzen $l_0^I = c$. Angenommen, l_k^I sei definiert für $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm 2n$, wo $n \geqslant 0$ ist. Dann setzen wir $l_{2n+2}^I = l_{2n}^I + \frac{1}{a}\gamma(I, l_{2n}^I)$, $l_{2n+1}^I = \frac{1}{2}(l_{2n}^I + l_{2n+2}^I)$ und schließlich $l_k^I = 2c - l_{-k}^I$ für $k = -2n-1, -2n-2$.

Das Längenverhältniß zweier nebeneinander liegenden Intervalle (l_{k-1}^I, l_k^I) und (l_k^I, l_{k+1}^I), und zwar des größeren zum kleineren, ist > 2. Demzufolge für $n \geqslant 0$ haben wir $\gamma(I, l_{2n}^I) \leqslant 2\gamma(I, l_{2n+2}^I)$ und daher

$$\frac{1}{2}(l_{2n+2}^I - l_{2n}^I) \leqslant \frac{1}{a}\gamma(I, l_{2n+2}^I) \leqslant \frac{1}{a} \inf_{l_{2n}^I < x < l_{2n+2}^I} \gamma(I, x).$$

Wegen der Symmetrie der Funktion $\gamma(I, x)$ bezüglich l_0^I erhalten wir also

$$l_{k+1}^I - l_k^I \leqslant \frac{1}{a} \inf_{l_k^I < x < l_{k+1}^I} \gamma(I, x) \tag{4.3.1}$$

für alle Intervalle (l_k^I, l_{k+1}^I).

Es sei jetzt eine G_δ-Menge $E = \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$ vorgegeben, wobei G_n offene Mengen sind, $G_{n+1} \subset G_n$ und die Länge jeder Komponenten von G_0 nicht größer als 1 ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir folgende Voraussetzung machen: Ist I bzw. I^* eine Komponente von G_n bzw. G_{n+1} und ist $I^* \subset I$, so existiert ein k derart, daß $I^* \subset (l_{k-1}^I, l_{k+1}^I)$ und $|I^*| < \min(l_{k+1}^I - l_k^I, l_k^I - l_{k-1}^I)$.

Wir zeigen, daß

$$\sum_{n=m}^{\infty} a^n \gamma(G_n, x) \leqslant M a^m \gamma(G_m, x), \tag{4.3.2}$$

wo M eine von m unabhängige Konstante ist.

Nehmen wir nämlich an, daß die Intervalle I und I^* der Länge 2δ bzw. $2\delta^*$ Komponenten von G_n bzw. G_{n+1} sind und $I^* \subset I$. Dann gilt $\gamma(I^*, x) \leqslant \delta^* \sup\gamma'(I^*, x)$ und es gibt ein solches k, daß $I^* \subset (l_{k-1}^I, l_{k+1}^I)$ und $\delta^* < \frac{1}{2}\min(l_{k+1}^I - l_k^I, l_k^I - l_{k-1}^I)$. Bei Beachtung von (4.3.1) erhalten wir hieraus

$$\delta^* < \frac{1}{2a} \inf_{x \in I^*} \gamma(I, x).$$

Folglich ist

$$\gamma(I^*, x) \leqslant \frac{1}{2a}\gamma(I, x) \sup\gamma'(I^*, x)$$

und, da die Intervalle I, I^* beliebig sind, haben wir also

$$\gamma(G_{n+1}, x) \leqslant \frac{1}{2a}\gamma(G_n, x) \sup\gamma'(G_{n+1}, x).$$

Nun konvergiert aber die Folge $\{\gamma'(G_n, x)\}$ gleichmäßig gegen Null, es genügt also als M das doppelte Produkt derjenigen $\sup\gamma'(G_n, x)$ zu nehmen, die größer als 1 sind.

Sei ψ eine Funktion aus $\mathcal{D}_{1/2}$, die (4.1.1) erfüllt, und sei $\chi(x) = \psi(x + \frac{1}{2}) - \psi(x - \frac{1}{2})$. Wir definieren die Folge

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in CG_n, \\ a^{n+1}\chi\left(\dfrac{x - l_{2k+1}^I}{l_{2k+1}^I - l_{2k}^I}\right) & \text{für} \quad x \in [l_{2k}^I, l_{2k+2}^I], \end{cases} \tag{4.3.3}$$

wo I alle Komponenten von G_n durchläuft.

Gehört a zu CG_n, so haben wir für $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$

$$0 \leqslant F_n(x) \leqslant a^n \gamma(G_n, x). \tag{4.3.4}$$

Da für $x \in CG_n$ stets $F_n(x) = 0$ ist und wegen der Symmetrie genügt es (4.3.4) für $x \in [l_{2k}^I, l_{2k+2}^I]$ zu zeigen, wo I eine Komponente von G_n und $k \geqslant 0$ ist.

Nun gilt aber

$$\gamma(I, l^I_{2k+2}) - \gamma(I, l^I_{2k}) > \frac{a}{2}(l^I_{2k+2} - l^I_{2k}).$$

Folglich

$$a^n \gamma(I, l^I_{2k+2}) > \frac{a^{n+1}}{2}(l^I_{2k+2} - l^I_{2k}) > \sup_{l^I_{2k}<x<l^I_{2k+2}} F_n(x)$$

und in Anbetracht, daß für $x \epsilon [l^I_{2k}, l^I_{2k+2}]$ gewiß $\gamma(I, x) \geqslant \gamma(I, l^I_{2k+2})$ ist, erhalten wir sofort (4.3.4).

Aus (4.3.2) und (4.3.4) ergibt sich, daß die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n(x)$ gleichmäßig konvergiert; ihre Summe F ist also stetig.

Wir zeigen jetzt, daß bei $a \geqslant 4$ die Distribution $T = F'$ den Forderungen unseres Satzes genügt.

I. Sei $x_0 \epsilon CE$; es gibt also ein solches N, daß $x_0 \notin G_n$ für $n \geqslant N$ und daß N die kleinste nichtnegative ganze Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Wir bezeichnen.

$$F_{\mathrm{I}}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} F_n(x), \qquad F_{\mathrm{II}}(x) = \sum_{n=N}^{\infty} F_n(x)\ ^{(5)}.$$

Da nach (4.3.2) und (4.3.4) $0 \leqslant F_{\mathrm{II}}(x) \leqslant M a^N \gamma(G_N, x)$ und $\gamma^{(k)}(G_N, x_0) = 0$, so hat F_{II} in x_0 ein Differential im Sinne von Denjoy beliebiger Ordnung gleich Null. Andererseits gehört F_{I} in einer Umgebung von x_0 zur Klasse C^∞. Die Distribution T gehört also in x_0 zu $\mathcal{K}^\infty$.

II. Ist $x_0 \epsilon E$, so existiert eine Folge von Intervallen $[l^{I_n}_{k_n}, l^{I_n}_{k_n+1}]$, $n = 0, 1, \ldots$, die x_0 einschließen, wobei I_n eine Komponente von G_n ist. Wir setzen $\lambda_n = l^{I_n}_{k_n+1} - l^{I_n}_{k_n}$; offensichtlich ist $\lambda_n \to 0$. Gemäß (4.1.1) und (4.3.3) haben wir

$$(4.3.5) \qquad \big(f_n(x_0+\lambda_n x), B\big) \geqslant \tfrac{15}{16} a^{n+1}$$

sowie

$$(4.3.6) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \big(f_k(x_0+\lambda_n x), B\big) < \frac{a^{n+1}-1}{a-1} < \frac{a^{n+1}}{3}.$$

Außerdem gilt

$$(4.3.7) \qquad \lim_{n\to\infty} a^{-(n+1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(f_k(x_0+\lambda_n x), B\big) = 0.$$

(5) Falls $N = 0$ ist, wird $F_{\mathrm{I}}(x) \equiv 0$ gesetzt.

In der Tat, für jede Funktion φ aus B ist

$$\big|\big(f_k(x_0+\lambda_n x), \varphi\big)\big| \leqslant \frac{1}{\lambda_n} \sup |\varphi'(x)| \int_{-1}^{1} F_k(x_0+\lambda_n x)\,dx$$

und daher bei Verwendung von (4.3.2) und (4.3.4) erhalten wir

$$(4.3.8) \qquad a^{-(n+1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(f_k(x_0+\lambda_n x), B\big) \leqslant \frac{\tilde{M}}{\lambda_n} \sup_{-1<x<1} \gamma(G_{n+1}, x_0+\lambda_n x),$$

wo $\tilde{M}$ eine Konstante bezeichnet. Es wurde aber $\lambda_n = l^{I_n}_{k_n+1} - l^{I_n}_{k_n}$ gesetzt, wo I_n eine Komponente von G_n ist und $x_0 \epsilon [l^{I_n}_{k_n}, l^{I_n}_{k_n+1}]$. Da das Längenverhältniß von zwei nebeneinander liegenden Intervallen (l^I_{k-1}, l^I_k) und (l^I_k, l^I_{k+1}) kleiner als 2 ist, so gilt für jede Komponente I^* der Menge G_{n+1}, für welche der Durchschnitt $I^* \cap (x_0-\lambda_n, x_0+\lambda_n)$ nicht leer ist, die Ungleichung $|I^*| < 2\lambda_n$. Mithin gilt

$$\sup_{-1<x<1} \gamma(G_{n+1}, x_0+\lambda_n x) \leqslant \sup \gamma_{\lambda_n}(x) = \gamma^2(\lambda_n)$$

und dies liefert wegen (4.3.8) und der Tatsache, daß

$$\lim_{x\to 0} \frac{\gamma^2(x)}{x} = 0$$

ist, sofort (4.3.7).

Für hinreichend große n haben wir also

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \big(f_k(x_0+\lambda_n x), B\big) < \frac{a^{n+1}}{3}$$

und bei Beachtung von (4.3.5) und (4.3.6) erhält man schließlich

$$\big(T(x_0+\lambda_n x), B\big) > \tfrac{15}{16} a^{n+1} - \frac{a^{n+1}}{3} - \frac{a^{n+1}}{3} > a^n.$$

T ist also in x_0 unbeschränkt, w. z. b. w.

Unter Berücksichtigung von Satz 4.2 erhalten wir nun

Satz 4.3. *Zu jeder G_δ-Menge existiert eine Distribution, welche auf dieser Menge unbeschränkt ist und auf ihrem Komplement zu $\mathcal{K}^\infty$ gehört.*

Wir bemerken noch, daß die im obigen Satz erwähnte Distribution die Ableitung einer stetigen, beschränkten Funktion sein kann. Von dieser Bemerkung machen wir in 4.4 Gebrauch.

4.4. Satz 4.4. *Zu jeder $F_{\sigma\delta}$-Menge existiert eine Distribution, die auf dieser Menge zu $\mathcal{K}^\infty$ gehört und in den Punkten ihres Komplements entweder keinen Wert besitzt oder zu $\mathcal{K}^n$ mit $n < \infty$ gehört.*

Beweis. Sei E eine $F_{\sigma\delta}$-Menge und sei $E = \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n$, wo P_n F_σ-Mengen sind und $P_n \supset P_{n+1}$. Nach Satz 4.3 existiert zu jedem P_n eine Distribution T_n — Ableitung einer stetigen Funktion F_n, die auf P_n zu $\mathcal{K}^\infty$ gehört und in allen Punkten aus CP_n unbeschränkt ist. Die Distributionen T_n können so gewählt werden, daß ihre Primitiven F_n in R_1 gleichmäßig beschränkt sind. Wir benutzen folgende Bezeichnungsweise:

$$F_n^{[-m]}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} F_n(t)\,dt \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

und

$$F_n^{[0]}(x) = F_n(x).$$

Für jede ganze Zahl $k \geqslant 0$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+k}^{[-n]}(x)$ fast gleichmäßig konvergent; ihre Summe $S_k(x)$ ist also stetig. Wir behaupten, daß $S_0(x)$ die Forderungen des Satzes erfüllt. Aus der Beziehung

(4.4.1) $$S_0^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{k} T_j^{(k-j)} + S_{k+1}$$

folgt nämlich, daß $S_0^{(k+1)}$ auf P_k überall einen Wert hat. Es genügt also die Unbeschränktheit von $S_0^{(k+1)}$ auf CP_k nachzuweisen.

Sei $x_0 \in CP_k$ und sei k_0 der kleinste Index von der Eigenschaft, daß T_{k_0} in x_0 unbeschränkt ist. Offenbar ist $k_0 \leqslant k$. Wegen (4.4.1) haben wir dann

(4.4.2) $$S_0^{(k_0+1)} = \sum_{j=0}^{k_0} T_j^{(k_0-j)} + S_{k_0+1}.$$

Nun sind aber alle Distributionen, die rechter Hand in (4.4.2) auftreten, außer T_{k_0}, in x_0 regulär. Folglich ist $S_0^{(k_0+1)}$ in x_0 unbeschränkt und dasselbe gilt auch für $S_0^{(k+1)}$. Damit ist der Satz bewiesen.

4.5. Wir setzen eine Funktion φ aus $\mathcal{D}_1$ fest, so daß $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$ ist. Für jedes $\lambda > 0$ genügt dann $\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ den Bedingungen:

I. $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\lambda(x)\,dx = 1$;

II. $\lim_{\lambda\to 0} \int_{-\infty}^{-\eta} + \int_{\eta}^{+\infty} |\varphi_\lambda(x)|\,dx = 0$ für jedes $\eta > 0$;

III. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_\lambda(x)\,dx < C < \infty$, wo $\sigma_\lambda(x) = \sup_{t\leqslant x} |\varphi_\lambda(t)|$ für jedes $x < 0$ und $\sigma_\lambda(x) = \sup_{t\geqslant x} |\varphi_\lambda(t)|$ für jedes $x \geqslant 0$.

Hat eine örtlich integrierbare Funktion $f(x)$ im Punkte ξ einen Wert, so konvergiert das singuläre Integral

$$g(\lambda, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\xi)\varphi_\lambda(x)\,dx \quad \text{mit} \quad \lambda \to 0.$$

Nach einem Satz von Zahorski (vgl. [8], S. 81, théorème III) existiert zu jedem Kern, das den Bedingungen I, II, III, genügt und zu jeder $G_{\delta\sigma}$-Menge E vom Maße Null, eine beschränkte Funktion $f(x)$ mit der Eigenschaft, daß $\overline{\lim_{\lambda\to 0}} g(\lambda, \xi) - \underline{\lim_{\lambda\to 0}} g(\lambda, \xi) > 0$, wenn $\xi \in E$ und $\lim_{\lambda\to 0} g(\lambda, \xi) = f(\xi)$, wenn $\xi \in CE$. Aus dem Beweis dieses Satzes ist zu ersehen, daß die Konvergenz von $g(\lambda, \xi)$ gegen $f(\xi)$ in allen Punkten aus CE gleichmäßig ist in Bezug auf jede Menge von Funktionen φ aus $\mathcal{D}_1$, die gleichmäßig beschränkt sind und die Forderung $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$ erfüllen. Es gilt also

Satz 4.5. *Zu jeder $G_{\delta\sigma}$-Menge vom Maße Null existiert eine beschränkte Funktion (also eine überall beschränkte Distribution), die auf dieser Menge singulär ist und in jedem Punkte des Komplements einen Wert von Ordnung Null besitzt.*

4.6. Eine Verbindung der Sätze 4.3 und 4.5 liefert den

Satz 4.6. *Zu jeder Vereinigung $\mathcal{S}$ einer G_δ-Menge $\mathcal{S}_1$ und einer $G_{\delta\sigma}$-Menge $\mathcal{S}_2$ vom Maße Null existiert eine Distribution, für welche $\mathcal{S}$ die Menge singulärer und $C\mathcal{S}$ die Menge regulärer Punkte ist.*

Es gibt nämlich (nach Satz 4.3) eine Distribution T_1, die auf $\mathcal{S}_1$ unbeschränkt ist und auf $C\mathcal{S}_1$ zur Klasse $\mathcal{K}^\infty$ gehört, sowie (nach Satz 4.5) eine überall beschränkte Distribution T_2, für welche $\mathcal{S}_2$ die Menge singulärer Punkte ist. Die Summe $T = T_1 + T_2$ hat die im Satz 4.6 verlangten Eigenschaften, wobei $\mathcal{S}_\infty = \mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_b = \mathcal{S}_2 \setminus \mathcal{S}_1$ ist.

§ 5. Regularität, Stetigkeit und Differenzierbarkeit

5.1. Nach Satz 1.5 folgt aus der Beschränktheit der Distribution T in ξ_0 von Ordnung $\leqslant n$, daß für alle $\varphi \in V_n$ die Funktionen $\Phi_\varphi(\lambda, \xi_0)$ der Veränderlichen λ in einer Nullpunktsumgebung gleichmäßig beschränkt sind. Es gilt sogar die schärfere Aussage:

Ist T im Punkte ξ_0 beschränkt von Ordnung $\leqslant n$ und ist M eine beliebige positive Konstante, so sind für alle $\varphi \in V_n$ die Funktionen $\Phi_\varphi(\lambda, \xi)$ (von zwei Veränderlichen) in einer Umgebung von $\lambda = 0$ $\xi = \xi_0$ für $|\xi - \xi_0| < M|\lambda|$ gleichmäßig beschränkt.

Im Fall aber, wo man die ganze Umgebung von $\lambda = 0$, $\xi = \xi_0$ in Betracht zieht, d. h. wenn alle $\Phi_\varphi(\lambda, \xi)$ für $\varphi \in \mathcal{D}$ in einer ganzen Umgebung von $\lambda = 0$, $\xi = \xi_0$ (für $\lambda \neq 0$) beschränkt sind, ist T in einer Umgebung von ξ_0 eine beschränkte Funktion. Dann existiert nämlich in einer Umgebung von ξ_0 fast überall der Wert $T(\xi)$ und er ist beschränkt. Wir beweisen jetzt

Satz 5.1. *Ist die Distribution T überall beschränkt, so ist die abgeschlossene Menge aller Punkte, in deren Umgebung die Werte $T(\xi)$ nicht beschränkt sind, nirgends dicht.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß es zu jeder nichtleeren offenen Menge Ω eine nichtleere offene Menge $\Omega_1 \subset \Omega$ und eine positive Konstante M gibt, so daß in jedem Punkte $\xi \in \Omega_1$, in welchem T einen Wert besitzt, $|T(\xi)| < M$ ist.

Zu diesem Zweck bezeichnen wir mit $E_{m,n,p}$ $(m, n, p = 1, 2, \ldots)$ die Menge aller ξ, in denen die Ungleichung $\Phi_\varphi(\lambda, \xi) \leqslant m$ für $0 < |\lambda| < 1/n$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}_1$ mit $|\varphi^{(p)}(x)| < 1$ erfüllt ist. Die Mengen $E_{m,n,p}$ sind abgeschlossen, denn für jedes $\lambda \neq 0$ und $\varphi \in \mathcal{D}$ gehört die Funktion $\Phi_\varphi(\lambda, \xi)$ der Veränderlichen ξ zur Klasse C^∞. Andererseits folgt aus der Beschränktheit der Distribution T, daß jeder Punkt aus R_1 zu mindestenz einer Menge E_{m_0,n_0,p_0} gehört. Mithin gilt

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{m,n,p=1}^{\infty} \overline{\Omega} \cap E_{m,n,p}.$$

Dem Baireschen Satz zufolge könen nicht alle Mengen $\overline{\Omega} \cap E_{m,n,p}$ nirgends dicht sein; es gibt also Indizes m_1, n_1, p_1 und eine nichtleere offene Menge Ω_1 mit der Eigenschaft, daß $\Omega_1 \subset \Omega \cap E_{m_1,n_1,p_1}$. Für jedes $\xi \in \Omega_1$ ist also $\Phi_\varphi(\lambda, \xi) \leqslant m_1$, wenn $|\lambda| < 1/n_1$, $\varphi \in \mathcal{D}_1$ und $|\varphi^{(p_1)}(x)| < 1$. Daraus ergibt sich, daß der Wert $T(\xi)$, falls er existiert, nicht größer als m_1 (von Ordnung $\leqslant p_1+1$) sein kann, w. z. b. w.

Unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus 2.2 erhalten wir hieraus

Folgerung 1. *Jede überall beschränkte Distribution ist, außerhalb einer nirgends dichten Menge, eine örtlich beschränkte Funktion.*

Eine überall beschränkte Distribution ist also, außerhalb einer nirgends dichten Menge, beschränkt von Ordnung Null (und kann deshalb einen Wert höchstens erster Ordnung haben).

Nun hat aber eine örtlich integrierbare und von oben oder von unten beschränkte Funktion f im Punkte ξ dann und nur dann einen Wert, wenn ihre Primitive in ξ eine (gewöhnliche) Ableitung besitzt ([6]). Ist

([6]) Dies folgt aus einem Satz von Łojasiewicz; vgl. [2], S. 25, corollaire 1.

also T eine überall beschränkte Distribution, S ihre Primitive und $\mathcal{R}$ die Menge aller für T regulären Punkte, so erhalten wir aus dem soeben bewiesenen Satz die

Folgerung 2. *In der Umgebung eines jeden Punktes $\xi \in \mathcal{R}$, bis auf eine nirgends dichte Menge, ist S eine totalstetige Funktion F mit der (gewöhnlichen) Ableitung $F'(\xi) = T(\xi)$.*

5.2. Es sei jetzt T eine beliebige Distribution, S ihre Primitive und $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{B}$ die Punktmenge, auf der T regulär bzw. beschränkt ist. Da $\mathcal{B}$ eine F_σ-Menge ist, haben wir

$$\mathcal{B} = G \cup P, \tag{5.2.1}$$

wo G eine offene Menge und P eine Menge von erster Kategorie bezeichnet. In der Umgebung eines jeden zu G gehörigen Punktes, bis auf eine nirgends dichte Menge, ist T eine beschränkte Funktion. Analog ist S in der Umgebung eines jeden Punktes $\xi \in G \cap R$, bis auf eine nirgends dichte Menge, eine totalstetige, differenzierbare Funktion. Folglich gilt

Satz 5.2. *In der Umgebung eines jeden zu $\mathcal{B}$ gehörigen Punktes, bis auf eine Menge erster Kategorie, ist T eine beschränkte Funktion; in der Umgebung eines jeden Punktes $\xi \in \mathcal{R}$, bis auf eine Menge erster Kategorie, ist S eine totalstetige Funkction F, mit der (gewöhnlichen) Ableitung $F'(\xi) = T(\xi)$.*

Wir wollen noch aus Satz 5.2 zwei Folgerungen ziehen:

Folgerung 1. *Ist die Distribution T auf einer Menge zweiter Kategorie beschränkt, so existiert eine offene Menge Ω, auf welcher T einer beschränkten Funktion gleicht.*

Folgerung 2. *Ist T Ableitung (im Sinne der Distributionentheorie) einer stetigen Funktion, deren Menge aller Punkte der Differenzierbarkeit wir mit Q bezeichnen, so ist $\mathcal{R} \setminus Q$ von erster Kategorie. Insbesondere kann die Ableitung einer stetigen, nirgends (gewöhnlich) differenzierbaren Funktion nur auf einer Menge erster Kategorie Werte besitzen.*

5.3. Die auf $\mathcal{R}$ definierte Funktion $T(\xi)$ ist von erster Klasse; sie ist also stetig bis auf eine Menge erster Kategorie in $\mathcal{R}$. Gehört ein Stetigkeitspunkt ξ_0 zu der in (5.2.1) auftretenden offenen Menge G, so ist T in der Umgebung von ξ_0 eine (in ξ_0 stetige) Funktion. Wir nennen dann ξ_0 den Stetigkeitspunkt der Distribution T und bezeichnen die Menge aller Stetigkeitspunkte mit $\mathcal{C}$. Es gilt

Satz 5.3. *Die Menge $\mathcal{R} \setminus \mathcal{C}$ ist von erster Kategorie.*

Als Folgerung dieses Satzes erhält man den zweiten Teil von Satz 5.2.

Literaturnachweis

[1] A. Denjoy, *Sur l'intégration des coefficients différentiels d'ordre supérieur*, Fund. Math. 25 (1935), S. 273-326.

[2] S. Łojasiewicz, *Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point*, Studia Mathematica 16 (1957), S. 1-36.

[3] — J. Wloka und Z. Zieleźny, *Über eine Definition des Wertes einer Distribution*, Bull. Acad. Polon. des Sc., Cl. III. 3 (1955), S. 479-481.

[4] J. Mikusiński and R. Sikorski, *The elementary theory of distributions (I)*, Rozprawy Matematyczne XII (1957).

[5] F. Riesz et B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest 1953.

[6] L. Schwarz, *Théorie des distributions I, II*, Paris 1950/1951.

[7] Z. Zahorski, *О множестве точек недиференцируемости непрерывной функции*, Матем. сб. 9 (51): 3 (1941), S. 487-510.

[8] — *Sur les ensembles des points de divergence de certaines intégrales singulières*, Ann. Soc. Pol. Math. 19 (1946), S. 66-105.

[9] Z. Zieleźny, *Sur la définition de Łojasiewicz de la valeur d'une distribution dans un point*, Bull. Acad. Polon. des Sc., Cl. III. 3 (1955), S. 519-520.

Reçu par la Rédaction le 31. 12. 1958

STUDIA MATHEMATICA, T. XIX. (1960)

Spaces of continuous functions (IV)

(On isomorphical classification of spaces of continuous functions)

by

C. BESSAGA and A. PEŁCZYŃSKI (Warszawà)

In this paper (Theorem 1) we give a complete isomorphical and dimensional (1) classifications of the spaces of (all) continuous functions defined on countable intervals of ordinal numbers.

Applying Theorem 1 we obtain: a) the complete isomorphical classification of the spaces $C(Q)$ (i. e. of the spaces of all continuous real functions defined on Q), Q being zero-dimensional metrisable compact spaces (Theorem 3) (2) and b) the complete dimensional classification of all the spaces $C(Q)$ for arbitrary metrisable compact spaces Q (Collorary 1).

In the last part of this paper we formulate several problems concerning the spaces of continuous functions.

1. Preliminaries. Two Banach spaces X and Y are called *isomorphic* (written $X \sim Y$), if and only if there exists a linear homeomorphic mapping of X onto Y.

It is known that $X \sim Y$ if and only if there are a linear mapping U of X onto Y and a constant K such that

$$\|x\| \leqslant \|U(x)\| \leqslant K\|x\|. \tag{1}$$

If condition (1) is satisfied for some U we shall write $X \overset{K}{\sim} Y$. In particular, $X \overset{1}{\sim} Y$ means that X and Y are isometric.

The spaces X and Y are said to *have an equal linear dimension* (written $X \underset{\dim}{=} Y$) if each of the spaces X and Y is isomorphic to some subspace of the other. We say that X *has a smaller linear dimension than* Y (written $X \underset{\dim}{<} Y$) if there is a subspace of Y isomorphic to X and no subspace of X is isomorphic to Y.

(1) i. e. classification with respect to linear dimension.

(2) Hence, in particular we obtain a solution of the problem 48 in the Scottish Book posed by Banach and Mazur.