Bibliography

[1] A. Alexiewicz, *On the two-norm convergence*, Studia Math. 14 (1954), p. 49-56.

[2] — *On sequences of operations (II)*, ibidem 11 (1950), p. 200-236.

[3] R. Arens, *Duality in linear spaces*, Duke Math. Journal 14 (1947), p. 787-794.

[4] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[5] J. Dieudonné, *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques*, Ann. Ec. Norm. Sup. III, 59 (1942), p. 107-139.

[6] W. F. Donoghue and K. T. Smith, *On the symmetry and bounded closure of locally convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1952), p. 321-344.

[7] G. Fichtenholz, *Sur les fonctionnelles linéaires continues au sens généralisé*, Mat. Sbornik 4 (1938), p. 193-214.

[8] S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (M)-spaces*, Ann. of Math. 42 (1941), p. 994-1024.

[9] C. Kuratowski, *Topologie I*, 2-ème éd., Warszawa 1948.

[10] G. W. Mackey, *On convex topological linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 60 (1946), p. 519-537.

[11] J. Mařík, *Les fonctionnelles sur l'ensemble des fonctions continues bornées, définies dans un ensemble topologique*, Studia Math. 16 (1957), p. 86-94.

[12] S. Mazur and W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires (I)*, ibidem 10 (1948), p. 184-208.

[13] — *Sur les espaces métriques linéaires (II)*, ibidem 13 (1953), p. 137-179.

[14] S. Mazurkiewicz, *Sur la dérivée faible d'un ensemble de fonctionnelles linéaires*, ibidem 2 (1930), p. 68-71.

[15] J. Musielak and W. Orlicz, *Linear functionals over the space of functions continuous in an open interval*, ibidem 15 (1956), p. 216-224.

[16] W. Orlicz, *Linear operations in Saks spaces (I)*, ibidem 11 (1950), p. 237-272.

[17] — *Linear operations in Saks spaces (II)*, ibidem 15 (1956), p. 1-25.

[18] — *Contributions to the theory of Saks spaces*, Fund. Math. 44 (1957), p. 270-294.

[19] W. Orlicz and V. Pták, *Some remarks on Saks spaces*, Studia Math. 16 (1957), p. 56-68.

[20] A. Wiweger, *A topologization of Saks spaces*, Bull. Pol. Acad. Sci. 5 (1957), p. 773-777.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES
ZAKŁAD MATEMATYKI UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
INSTITUTE OF MATHEMATICS, ADAM MICKIEWICZ UNIVERSITY IN POZNAŃ

Reçu par la Rédaction le 18. 4. 1957

STUDIA MATHEMATICA, T. XVII. (1958)

Zu linearen Limitierungsverfahren

von

W. TSCHOBANOW und G. PASKALEW (Sofia)

In der vorliegenden Mitteilung werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben, daß aus der A-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ die A-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ folgt und umgekehrt. Es wird der Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Summen $A-\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $A-\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ festgestellt. Dabei bedeutet $A = \|a_{\mu\nu}\|$ eine normale Matrix, für die der Grenzwert

$$\lim_{\mu\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\mu} a_\nu \tag{1}$$

existiert.

Bei den Betrachtungen wird wesentlich ein bemerkenswerter Satz von Mazur verwendet, der in seiner Arbeit *Über lineare Limitierungsverfahren* (Mathematische Zeitschrift 28 (1928), S. 599-611) bewiesen worden ist.

Für jede normale Matrix $A = \|a_{\mu\nu}\|$ besitzt das unendliche Gleichungssystem

$$y_\mu = \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu\nu} x_\nu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots)$$

eine einzige Lösung. Es sei

$$\xi_\nu = x_\nu \quad \text{für} \quad y_\mu = 1 \qquad (\mu, \nu = 0, 1, \ldots),$$

$$\xi_{\nu\mu} = x_\nu \quad (\mu, \nu = 0, 1, \ldots) \quad \text{für} \quad y_\nu = \begin{cases} 1 & \text{bei} \quad \nu = \mu, \\ 0 & \text{bei} \quad \nu \neq \mu. \end{cases}$$

Wenn $B = \|b_{\mu\nu}\|$ eine beliebige Matrix ist, und falls $\bar{A}$ und $\bar{B}$ die Konvergenzfelder von A und B bedeuten, so gilt folgender

SATZ 1 (von Mazur). *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß $\bar{A} \subset \bar{B}$, sind:*

1. *Es existiert* $B\text{-}\lim\limits_{\nu\to\infty} \xi_\nu = a$;
2. *es existieren* $B\text{-}\lim\limits_{\nu\to\infty} \xi_{\nu\mu} = a_\mu$ $(\mu = 0, 1, \ldots)$;
3. *es existiert für jedes* $p = 0, 1, \ldots$ *eine reelle Zahl* K_p, *so daß*

$$\sum_{\mu=0}^{r} \Big| \sum_{\nu=\mu}^{r} b_{p\nu}\, \xi_{\nu\mu} \Big| < K_p$$

für jedes $r = 0, 1, \ldots$ *ist;*

4. *es existiert eine reelle Zahl* K, *so daß*

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \Big| \sum_{\nu=\mu}^{\infty} b_{p\nu}\, \xi_{\nu\mu} \Big| < K$$

für jedes $p = 0, 1, \ldots$ *ist.*

Wenn die Bedingungen 1-4 erfüllt sind und $s = A\text{-}\lim\limits_{\nu\to\infty} s_\nu$, so ist

$$B\text{-}\lim_{\nu\to\infty} s_\nu = as + \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu [A_\mu(s_0, s_1, \ldots) - s],$$

$$\text{wobei} \quad A_\mu(s_0, s_1 \ldots) = \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu\nu} s_\nu .$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß $B\text{-}\lim\limits_{\nu\to\infty} s_\nu = A\text{-}\lim\limits_{\nu\to\infty} s_\nu$ für jede A-limitierbare Folge $\{s_\nu\}$ gilt, sind 1-4 mit $a = 1$ und $a_\mu = 0$ $(\mu = 0, 1, \ldots)$.

Zunächst beweisen wir

Hilfssatz 1. *Ist die Matrix B normal, so können die Bedingungen 3 und 4 des Satzes 1 so zusammengefaßt werden:*

Es existiert eine reelle Zahl K derart, daß die Ungleichung

$$\sum_{\mu=0}^{p} \Big| \sum_{\nu=\mu}^{p} b_{p\nu}\, \xi_{\nu\mu} \Big| < K \tag{2}$$

für jedes $p = 0, 1, \ldots$ *gilt.*

Beweis. Wegen $b_{p\nu} = 0$ für $\nu > p$, ist die Bedingung 4 mit (2) äquivalent. Es sei (2) erfüllt. Falls $r \geqslant p$ ist, so wird die Bedingung 3 zu

$$\sum_{\mu=0}^{p} \Big| \sum_{\nu=\mu}^{p} b_{p\nu}\, \xi_{\nu\mu} \Big| < K. \tag{3}$$

Falls $r < p$ ist, so folgt aus

$$\Big| \sum_{\nu=\mu}^{r} b_{p\nu}\, \xi_{\nu\mu} \Big| - \Big| \sum_{\nu=r+1}^{p} b_{p\nu}\, \xi_{\nu\mu} \Big| \leqslant \Big| \sum_{\nu=\mu}^{p} b_{p\nu}\, \xi_{\nu\mu} \Big|,$$

daß

$$\sum_{\mu=0}^{r} \Big| \sum_{\nu=\mu}^{r} b_{p\nu}\, \xi_{\nu\mu} \Big| \leqslant \sum_{\mu=0}^{r} \Big| \sum_{\nu=\mu}^{p} b_{p\nu}\, \xi_{\nu\mu} \Big| + \sum_{\mu=0}^{r} \Big| \sum_{\nu=r+1}^{p} b_{p\nu}\, \xi_{\nu\mu} \Big|. \tag{4}$$

Es sei

$$K'_p = \max_{0 \leqslant r \leqslant p-1} \sum_{\mu=0}^{r} \Big| \sum_{\nu=r+1}^{p} b_{p\nu}\, \xi_{\nu\mu} \Big|.$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\sum_{\mu=0}^{r} \Big| \sum_{\nu=\mu}^{r} b_{p\nu}\, \xi_{\nu\mu} \Big| < K + K'_p = K_p \quad \text{für jedes } r = 0, 1, \ldots$$

Es sei nun $A = \|a_{\mu\nu}\|$ eine beliebige (nicht unbedingt normale) Matrix, die (1) genügt, und es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ A-summierbar. Ist bei $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$ auch $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ A-summierbar, so existiert wegen (1) der Grenzwert

$$\lim_{\mu\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} s_{\nu+1} . \tag{5}$$

Also ist die Folge $\{s_n\}$ A'-limitierbar, wobei $A' = \|a'_{\mu\nu}\|$ die Matrix mit den Elementen

$$a'_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \mu = \nu = 0, \\ 0 & \text{für} \quad \mu\nu = 0, \qquad \mu \neq \nu, \\ a_{\mu-1,\nu-1} & \text{für} \quad \mu\nu \neq 0. \end{cases}$$

bedeutet.

Folglich ist $\bar{A} \subset \bar{A}'$ eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß aus der A-Summierbarkeit der Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ die A-Summierbarkeit der Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ folgt, und $\bar{A}' \subset \bar{A}$ dafür, daß umgekehrt aus der A-Summierbarkeit der Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ die A-Summierbarkeit der Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ folgt. Falls A normal ist, bekommt man aus dem Satz 1 von Mazur, wenn man dort $B = A'$ setzt und den Hilfssatz 1 berücksichtigt, den

Hilfssatz 2. *Es sei A eine normale Matrix für die* (1) *gilt. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß aus der A-Summierbarkeit der Reihe* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *die A-Summierbarkeit der Reihe* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ *folgt, sind:*

1. *Es existiert* $\lim\limits_{\mu\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu-1,\nu-1}\, \xi_\nu = a$;
2. *es existieren* $\lim\limits_{\mu\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu-1,\nu-1}\, \xi_{\nu m} = a_m$ $(m = 0, 1, \ldots)$;
3. *es existiert eine reelle Zahl* K, *derart daß*

$$\sum_{\mu=0}^{p} \Big| \sum_{\nu=\mu}^{p} a_{p-1,\nu-1}\, \xi_{\nu\mu} \Big| < K \quad \textit{für jedes} \quad p = 0, 1, \ldots$$

gilt, wobei

(6) $$a_{\mu-1,-1}=\begin{cases}1 & \text{für} \quad \mu=0,\\ 0 & \text{für} \quad \mu\neq 0,\end{cases}\qquad a_{-1,\nu}=0 \quad \text{für} \quad \nu>-1.$$

Sind 1-3 erfüllt und ist $A-\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu=s$, so gilt

(7) $$A-\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu=\alpha s-a_0\lim_{\mu\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\mu}a_{\mu\nu}+\sum_{\mu=0}^{\infty}\alpha_\mu\Big(\sum_{\nu=0}^{\mu}a_{\mu\nu}s_\nu-s\Big).$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß für jede A-summierbare Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu$ die Relation

(8) $$A-\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu=A-\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu-a_0$$

gilt, sind 1-3 mit

(9) $$\alpha=1,\qquad \alpha_\mu=0 \quad (\mu=0,1,\ldots),$$

(10) $$\lim_{\mu\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\mu}a_{\mu\nu}=1.$$

Wenn ξ'_ν und $\xi'_{\nu\mu}$ der Matrix A' entsprechen, so hat man $\xi'_\nu=\xi_{\nu-1}$, $\xi'_{\nu\mu}=\xi_{\nu-1,\mu-1}$ mit

$$\xi_{\nu-1,-1}=\begin{cases}1 & \text{für} \quad \nu=0,\\ 0 & \text{für} \quad \nu\neq 0,\end{cases}\qquad \xi_{-1,\mu}=0 \quad \text{für} \quad \mu>-1.$$

Es gilt also

Hilfssatz 2'. *Es sei A eine normale Matrix für die* (1) *gilt. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß aus der A-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ die A-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu$ folgt, sind:*

1'. *Es existiert* $\lim_{\mu\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\mu}a_{\mu\nu}\xi_{\nu-1}=\alpha'$;

2'. *es existieren* $\lim_{\mu\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\mu}a_{\mu\nu}\xi_{\nu-1,m-1}=\alpha'_m$ $(m=0,1,\ldots)$;

3'. *es existiert eine reelle Zahl K, so daß*

$$\sum_{\mu=0}^{p}\Big|\sum_{\nu=\mu}^{p}a_{p\nu}\xi_{\nu-1,\mu-1}\Big|<K \quad \text{für jedes} \quad p=0,1,\ldots$$

gilt.

Sind 1'-3' erfüllt und ist $s'=A-\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$, so gilt unter (6)

(11) $$A-\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu=\alpha'\Big(s'+a_0\lim_{\mu\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\mu}a_{\mu\nu}\Big)+\sum_{\mu=0}^{\infty}\alpha'_\mu\Big(\sum_{\nu=0}^{\mu}a_{\mu-1,\nu-1}s_\nu-s'\Big).$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß für jede A-summierbare Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ die Relation

(12) $$A-\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu=A-\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu+a_0$$

gilt, sind 1'-3' mit (10) und

(13) $$\alpha'=1,\qquad \alpha'_\mu=0 \quad (\mu=0,1,\ldots).$$

Als einfache Folgerung erhält man

Hilfssatz 3. *Es sei A eine normale Matrix, die* (1) *genügt. Die Bedingungen* 1-3 *mit* (9) *des Hilfssatzes* 2 *bzw.* 1'-3' *mit* (13) *des Hilfssatzes* 2' *sind notwendig und hinreichend dafür, daß*

(14) $$\lim_{\mu\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\mu}a_{\mu\nu}a_{\nu+1}=0$$

für jede A-summierbare Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu$, bzw. $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$, gilt.

Beweis ist klar wegen

$$A-\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu=\lim_{\mu\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\mu}a_{\mu\nu}(s_{\nu+1}-a_0)=\lim_{\mu\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\mu}a_{\mu\nu}(s_\nu+a_{\nu+1}-a_0)$$
$$=A-\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu+\lim_{\mu\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{\mu\nu}a_{\nu+1}-a_0\lim_{\mu\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\mu}a_{\mu\nu}.$$

Schlußfolgerung. Aus den Bedingungen 1'-3' mit (9) des Hilfssatzes 2 folgen die Bedingungen 1'-3' mit (13) des Hilfssatzes 2' und umgekehrt.

Es folgt aus Hilfssatz 3 der

Satz 2. *Es genüge die normale Matrix A der Bedingung* (1) *und* 1-3 *mit* (9) *des Hilfssatzes* 2. *Dann ist*

(15) $$\lim_{\mu\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\mu}a_{\mu\nu}\sum_{\tau=\nu+1}^{\nu+p}a_\tau=0 \quad (p=1,2,\ldots)$$

für jede A-summierbare Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu$. Die Bedingungen 1-3 *mit* (9) *sind notwendig dafür, daß* (15) *für jede A-summierbare Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu$ gilt.*

Beweis. Nach Hilfssatz 3 ist die Behauptung für $p=1$ richtig. Wenn sie für p richtig ist, so ist nach Hilfssatz 3, angewandt auf die Reihe $\sum_{\nu=p}^{\infty} a_\nu$, die, nach Hilfssatz 2, A-summierbar ist,

(16) $$\lim_{\mu\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu\nu} a_{\nu+p+1} = 0.$$

Man bestätigt also die Behauptung für $p+1$, indem man (15) und (16) addiert.

Aus dem Satz 2 folgt die Notwendigkeit des Kriteriums von Cauchy für die Konvergenz einer Reihe, wenn man statt A die Einheitsmatrix E wählt. Daher liegt die Vermutung nahe, daß (15) für die A-Summierbarkeit von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ auch hinreichend ist, falls A die genannten Bedingungen erfüllt. Die Frage nach der Richtigkeit dieser Vermutung ist noch offen.

Wenn die Matrix A regulär ist, und wenn

(17) $$\lim_{\nu\to\infty} \xi_\nu = 1, \quad \lim_{\nu\to\infty} \xi_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu = 0, 1, \ldots)$$

gilt, so reduzieren sich die Bedingungen 1-3 bzw. 1′-3′ der Hilfssätze 2 bzw. 2′ auf 3 bzw. auf 3′, und es sind dann (9) bzw. (13) erfüllt. In diesem Fall folgt 3′ aus 3 und umgekehrt. So folgt auch (15) nur aus 3 und (17).

Als Anwendung betrachten wir die (C, k)-Methode. Mazur hat bewiesen, daß für sie (17) gilt. Die Bedingung 3 des Hilfssatzes 2 ist nun

$$\frac{1}{\binom{p+k}{k}} \sum_{\mu=0}^{p} \binom{\mu+k}{\mu} \left| \sum_{\nu=0}^{p-\mu+1} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \binom{p+k-\mu-\nu}{k-1} \right| < K$$

und ist wegen

$$\sum_{\nu=0}^{p-\mu+1} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \binom{p+k-\mu-\nu}{k-1} = 0$$

erfüllt. Also ist $(C, k)-\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = (C, k)-\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu + a_0$. Aus dem Satz 2 folgt sofort die bekannte Tatsache: für jede (C, k)-summierbare Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ gilt $(C, k)\text{-}\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$.

Die direkte Anwendung des Hilfssatzes 2 ist schwierig, da er notwendige Bedingungen enthält. Es wäre nützlich einfache hinreichende Bedingungen zu finden, die die Erfüllung der Forderungen 1-3, oder wenigstens einige von ihnen garantieren. Einen solchen Fall gibt

Satz 3. *Wenn die normale Matrix A den Bedingungen*

(18) $$\xi_{\nu m} = P(m)\, \xi_{\nu-1, p(m)} \quad (\nu, m = 0, 1, \ldots)$$

genügt, wobei

(19) $$p(m) \geqslant m-1$$

eine natürliche Zahl ist, so erfüllt sie die Bedingung 2 des Hilfssatzes 2 mit $a_m = 0$ $(m = 0, 1, \ldots)$.

Beweis. Aus (18) und (19) folgt, daß

$$\sigma_{\mu m} = \sum_{\nu=m}^{\mu} a_{\mu-1,\nu-1}\, \xi_{\nu m} = P(m) \sum_{\nu=m}^{\mu} a_{\mu-1,\nu-1}\, \xi_{\nu-1, p(m)}$$
$$= P(m) \sum_{\nu=p(m)+1}^{\mu} a_{\mu-1,\nu-1}\, \xi_{\nu-1, p(m)}$$
$$= P(m) \sum_{\nu=p(m)}^{\mu-1} a_{\mu-1,\nu}\, \xi_{\nu, p(m)} = \begin{cases} P(m) & \text{für} \quad p(m) = \mu-1, \\ 0 & \text{für} \quad p(m) \neq \mu-1, \end{cases}$$

da doch $\xi_{\mu\nu} = 0$ ist für $\mu < \nu$ laut der Definition von $\xi_{\nu\mu}$. Es ist also $a_m = \lim_{\mu\to\infty} \sigma_{\mu m} = 0$ $(m = 0, 1, \ldots)$.

Es gilt auch folgender

Satz 4. *Wenn A den Bedingungen des Satzes 3 genügt und falls*

(20) $$|P(m)| < P \quad (m = 0, 1, \ldots),$$

wobei die ganzzahlige Funktion $p(m)$ die Eigenschaft hat, daß für jedes $r = 0, 1, \ldots$ der Wert $r-1$ in der Folge

(21) $$p(0), p(1), \ldots, p(r)$$

höchstens s-mal vorkommt (s ist unabhängig von r), so genügt A auch der Bedingung 3 des Hilfssatzes 2.

Beweis. Die Bedingung 3 ist jetzt

$$\sum_{\mu=0}^{p} \left| P(\mu) \sum_{\nu=\mu-1}^{p-1} a_{p-1,\nu}\, \xi_{\nu, p(\mu)} \right| < K$$

oder, wegen (19),

$$\sum_{\mu=0}^{p} \left| P(\mu) \sum_{\nu=p(\mu)}^{p-1} a_{p-1,\nu}\, \xi_{\nu, p(\mu)} \right| < K.$$

Nach der Definition von $\xi_{\nu\mu}$ ist

$$\sum_{\nu=p(\mu)}^{p-1} a_{p-1,\nu}\, \xi_{\nu, p(\mu)} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad p(\mu) = p-1, \\ 0 & \text{für} \quad p(\mu) \neq p-1. \end{cases}$$

In der Folge (21), wobei p anstatt r gesetzt ist, kommt der Wert $p-1$ höchstens s-mal vor. Nach (20) ist

$$\sum_{\mu=0}^{p}\left|P(\mu)\sum_{\nu=p(\mu)}^{p-1}a_{p-1,\nu}\xi_{\nu,p(\mu)}\right|<P\cdot s.$$

Es sei bemerkt, daß es ganzzahlige Funktionen gibt, die die Voraussetzung für $p(m)$ nicht erfüllen, obwohl (19) besteht. Betrachten wir z. B. die Funktion $f(n)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)-3$, wobei k eindeutig aus den Ungleichungen $\frac{1}{2}k(k+1)\leqslant n+1<\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ bestimmt wird. Es sei s eine beliebige natürliche Zahl. Dann kommt in der Folge (21) bei $\tau=\frac{1}{2}(s+1)(s+2)-2$ der Wert $\tau-1=\frac{1}{2}(s+1)(s+2)-3$ schon $s+1$-mal vor.

Als Anwendung der Sätze 3 und 4 betrachten wir das (C,k)-Verfahren. Nach Mazur (l. c.) hat man in diesem Falle

$$\xi_\nu=1 \quad \text{und} \quad \xi_{\nu\mu}=(-1)^{\nu-\mu}\binom{k}{\nu-\mu}\binom{\mu+k}{\mu} \quad \text{für} \quad \nu\geqslant\mu.$$

Daraus folgt

$$\xi_{\nu\mu}=\frac{\binom{\mu+k}{\mu}}{\binom{\mu-1+k}{\mu-1}}\xi_{\nu-1,\mu-1}, \quad \text{d. h.} \quad P(m)=\frac{m-1}{m+k-1}, \quad p(m)=m-1,$$

womit die Bedingungen der Sätze 3 und 4 erfüllt sind.

Als eine andere Anwendung betrachten wir die allgemeinere, Nörlundsche (N,p)-Summation. Man hat

$$\xi_{\nu\mu}=(-1)^{\nu-\mu}P_\mu\begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & \dots 0\\ p_2 & p_1 & 1 & 0 & \dots 0\\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & \dots 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ p_{\nu-\mu} & p_{\nu-\mu-1} & p_{\nu-\mu-2} & p_{\nu-\mu-3} & \dots p_1\end{vmatrix}$$

für $\nu>\mu$, $\xi_{\nu\mu}=P_\mu$ für $\nu=\mu$ und $\xi_{\nu\mu}=0$ für $\nu<\mu$, mit $P_\mu=1+\sum_{\nu=1}^{\mu}p_\nu$. Folglich ist

$$\xi_{\nu\mu}=\frac{P_\mu}{P_{\mu-1}}\xi_{\nu-1,\mu-1}, \quad \text{d. h.} \quad P(m)=\frac{P_m}{P_{m-1}}, \quad p(m)=m-1.$$

Die Bedingung (20) ergibt

(22) $$|P_m/P_{m-1}|<P.$$

Unter der Bedingung (22) gelten die Sätze 3 und 4.

Die Bedingung (22) ist z. B. dann erfüllt, wenn die Folge P_m/P_{m-1} konvergiert. Indem man für (N,p) berücksichtigt, daß $\xi_\nu=1$ $(\nu=0,1,\dots)$ und auch, daß die Bedingung 1 des Hilfssatzes 2 erfüllt ist, schließt man, daß unter (22) die Relationen

$$(N,p)-\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu=(N,p)-\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu+a_0,$$

$$(N,p)-\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu=(N,p)-\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu-a_0$$

gelten, falls die rechte Seite einen Sinn hat.

Reçu par la Rédaction le 27. 6. 1957