STUDIA MATHEMATICA, T. XVII. (1958)

Об одном нелинейном операторе в пространствах Орлича

М. М. ВАЙНБЕРГ (Москва)

При изучении нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна [1] или интегральных операторов типа Гаммерштейна

$$\Gamma u = \int_B K(x, y) g\big(u(y), y\big) dy$$

важную роль играют операторы, порожденные функциями многих переменных. Пусть $g(u, x)$ — вещественная функция, определенная для всех $u \epsilon (-\infty, +\infty)$ и всех $x \epsilon B$, где B — измеримое по Лебегу множество s-мерного эвклидова пространства конечной или бесконечной меры. Такая функция $g(u, x)$ порождает оператор h, заданный на некоторой совокупности вещественных функций $u(x)$ равенством

$$hu = g\big(u(x), x\big) \qquad (x \epsilon B).$$

В связи с изучением уравнений типа Гаммерштейна оператор h фактически был впервые исследован в работах В. В. Немыцкого [2-3]. В. В. Немыцкий показал [2], что если функция $g(u, x)$ удовлетворяет условию (H): она непрерывна по u почти при каждом фиксированном $x \epsilon B$ и измерима в B по x при каждом фиксированном $u \epsilon (-\infty, +\infty)$, то оператор h асимптотически непрерывен (непрерывен по мере), т. е. каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$, найдется такое $\delta(\varepsilon, \eta) > 0$, что из неравенства

$$|u(x) - v(x)| < \delta,$$

где почти всюду конечные функции $u(x)$ и $v(x)$ измеримы в B по x, а $u(x)$ — фиксирована, будет следовать неравенство:

$$\big|g\big(u(x), x\big) - g\big(v(x), x\big)\big| < \varepsilon,$$

имеющее место на замкнутом множестве $E \subset B$, для которого $\operatorname{mes} E > \operatorname{mes} B - \eta$. Это условие (H) было также использовано в исследованиях других авторов. В данной работе мы также будем предполагать, что функция $g(u, x)$ удовлетворяет условию (H).

Дальнейшее исследование оператора h, предпринятое автором[1]), привело к следующему простому и окончательному предложению [4-5] о действии и непрерывности оператора h в классах L^p: Для того, чтобы оператор h действовал из класса L^p в класс L^{p_1} $(0 < p < +\infty,\ 0 < p_1 \leqslant +\infty)$ или чтобы h был непрерывным оператором из L^p в L^{p_1} $(0 < p,\ p_1 < +\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$|g(u, x)| \leqslant a(x) + b|u|^r, \tag{1}$$

где $r = p/p_1$, $b > 0$, $a(x) \epsilon L^{p_1}$.

Позднее автора оператор h был исследован и другими математиками (см. [6], где указана библиография).

В работе [5], где впервые приведено доказательство необходимости условия (1), автором было отмечено, что конструкция, которая была использована при доказательстве выше сформулированной теоремы, применима к доказательству аналогичных предложений, когда оператор h действует из класса Орлича L_Φ в класс Орлича L_{Φ_1} [7]. В настоящей работе мы намерены привести полное доказательство последнего утверждения для некоторых пространств типа Орлича.

1. Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, $t \geqslant 0$, две взаимно обратные непрерывные и возрастающие[2]) функции, равные нулю в начальной точке и стремящиеся к $+\infty$. Тогда функции M и N, где

$$M(u) = \int_0^u \varphi(t)\,dt, \qquad N(v) = \int_0^v \psi(t)\,dt, \qquad u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,$$

называются *взаимно дополнительными* ([7], стр. 70). Говорят, что измеримая на множестве B функция $u(x)$ *принадлежит классу* L_M, если функция $M(|u(x)|)$ интегрируема на множестве B. Классы L_M и L_N называются *взаимно дополнительными*, если M и N — взаимно дополнительные функции. Из неравенства Юнга для $u, v \geqslant 0$,

$$uv \leqslant M(u) + N(u),$$

геометрическое доказательство которого очевидно, следует, что если $u(x) \epsilon L_M$, $v(x) \epsilon L_N$, то произведение uv интегрируемо. Взаимно дополнительные классы L_M и L_N были изучены в известной работе Бирн-

[1]) См. Доклады АН СССР 61, № 6 (1948), стр. 965-968; т. 63, № 6 (1948), стр. 605-608; Успехи матем. наук т. IV в з(31) (1949), стр. 130-132.

[2]) Можно считать, что $\varphi(t)$ не является строго возрастающей и непрерывна лишь справа; тогда обратная функция $\psi(t)$, определенная следующим образом: $\psi(t) = \sup\limits_{\varphi(\tau) \leqslant t} \tau$ также непрерывна справа и не убывает. При этом предполагается, что $\varphi(t), \psi(t) > 0$ при $t > 0$.

баума и Орлича [8]. Для случая $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, $1+\alpha = p$, класс L_M совпадает с пространством L^p, если ввести обычную в L^p норму.

В. Орлич показал [9], что классы L_M естественным образом входят в следующее им построенное полное линейное нормированное пространство, которое, следуя Орличу [10], мы будем обозначать через L^M. Измеримая на множестве B функция $u(x)$ принадлежит L^M, если произведение $u(x)v(x)$ интегрируемо для всех $v(x) \epsilon L_N$. В. Орлич показал [9], что если для функций $u(x) \epsilon L^M$ ввести норму следующим образом:

$$\|u\| = \|u\|_M = \sup \Big| \int_B u(x)v(x)\,dx \Big|$$

для всех v, для которых

$$\varrho_v = \int_B N(|v(x)|)\,dx \leqslant 1,$$

то L^M будет полным линейным нормированным пространством, причем из принадлежности $u(x)$ к L_M следует, что $u(x) \epsilon L^M$. Им также было показано, что обратное предложение не всегда имеет место, т. е. из принадлежности $u(x)$ к L^M еще не следует, что $u \epsilon L_M$. В. Орлич показал [9], что если для всех достаточно больших u функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию

$$M(2u) \leqslant CM(u), \qquad C = \text{const.},$$

то L_M и L^M совпадают[3]).

2. Мы будем рассматривать пространства Орлича L^M в предположении, что функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию для всех u, если $\operatorname{mes} B = +\infty$, или для всех достаточно больших u, если $\operatorname{mes} B < +\infty$. В этом случае вместо L^M можно рассматривать L_M, так что в дальнейшем мы будем лишь рассматривать классы L_M.

Нас будет интересовать вопрос о действии оператора h, который нами называется *оператором Немыцкого* [6], из класса L_M в класс L_{M_1}.

Если для любой последовательности $\{u_n\}$, сходящейся в L_M в среднем к u_0, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \int_B M(|u_n(x) - u_0(x)|)\,dx = 0,$$

последовательность $\{hu_n\}$ сходится в среднем в L_{M_1} к hu_0, то говорят, что h *есть в точке* u_0 *непрерывный оператор из* L_M в L_{M_1}. h называется *непрерывным оператором* из L_M в L_{M_1}, если он непрерывен в каждой точке $u_0 \epsilon L_M$.

[3]) Если $\operatorname{mes} B = \infty$, то нужно, чтобы Δ_2-условие выполнялось для всех u.

Целью настоящей работы является следующая

Теорема. *Для того, чтобы оператор Немыцкого*

$$hu = g(u(x), x)$$

действовал из класса L_M в класс L_{M_1} или чтобы он был непрерывным оператором из L_M в L_{M_1}, необходимо и достаточно, чтобы

$$|g(u, x)| \leqslant a(x)+M_1^{-1}(bM(|u|)), \tag{2}$$

где $a(x)\in L_{M_1}$, M_1^{-1} — функция, обратная к M_1, $b>0$.

Из данной теоремы следует, что если оператор h действует из класса L_M в класс L_{M_1}, то он является непрерывным оператором из L_M в L_{M_1}.

3. Доказательство необходимости. Пусть h — непрерывный оператор из L_M в L_{M_1}. Тогда оператор h преобразует каждую функцию из L_M в функцию класса L_{M_1}, т. е. h действует из L_M в L_{M_1}.

Покажем, что неравенство (2) необходимо для того, чтобы оператор h действовал из L_M в L_{M_1}.

С этой целью рассмотрим расходящуюся возрастающую последовательность положительных чисел $\{b_n\}$. Далее, положим

$$a_n(x) = \begin{cases} \max\limits_{|u|\leqslant n}|g(u, x)|, & x\in D_n, \\ |g(0, x)|, & x\notin D_n, \end{cases}$$

где D_n — куб, содержащий точки $x=(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ для которых $|x_i|\leqslant n$ $(i=1, 2, \ldots, s)$, $a_1(x) = a_1(x)$ и обозначим через E_1 множество значений x, на котором

$$|g(u, x)| > a_1(x)+M_1^{-1}(b_1M(|u|))$$

хотя бы для некоторых значений u, т. е.

$$E_1 = E\big(|g(u, x)| > a_1(x)+M_1^{-1}(b_1M(|u|))\big).$$

Затем положим

$$a_2(x) = \begin{cases} a_1(x), & x\in B\backslash E_1, \\ a_2(x), & x\in E_1, \end{cases}$$

$$E_2 = E\big(|g(u, x)| > a_2(x)+M_1^{-1}(b_2M(|u|))\big)$$

и продолжим данный процесс, полагая

$$a_n(x) = \begin{cases} a_{n-1}(x), & x\in B\backslash E_{n-1}, \\ a_n(x), & x\in E_{n-1}; \end{cases}$$

$$E_n = E\{|g(u, x)| > a_n(x)+M_1^{-1}(b_nM(|u|))\}.$$

Пусть $\psi_n(x)$, $|\psi_n(x)|\leqslant n$, есть такая функция которая удовлетворяет соотношению:

$$|g(\psi_n(x), x)| = a_n(x), \quad \psi_n(x) = 0 \quad \text{при} \quad x\notin D_n.$$

Согласно теореме 18.5 из [6] мы можем считать функции $\psi_n(x)$ измеримыми, а так как каждая измеримая ограниченная функция, равная нулю вне D_n, принадлежит классу L_M, то $\psi_n(x)\in L_M$ для всякого n. Далее, так как по условию каждая функция из L_M преобразуется оператором h в функцию класса L_{M_1}, то $a_n(x)\in L_{M_1}$ для всякого n. Отсюда следует, что и $a_n(x)\in L_{M_1}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Из самого способа построения множеств $E_1, E_2, E_3, \ldots$ следует, что $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\ldots$ Если бы $\operatorname{mes}E_n = 0$ для некоторого n, то теорема была бы доказана. Ввиду этого мы будем предполагать, что $\operatorname{mes}E_n>0$ для всякого n, положим $E_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ и покажем, что $\operatorname{mes}E_0 = 0$.

Действительно, допуская, что $\operatorname{mes}E_0 = \gamma > 0$, рассмотрим произвольное множество $e\subset E_0$, для которого $\operatorname{mes}e>0$. На множестве e выполняется неравенство

$$|g(u, x)| > a_n(x)+M_1^{-1}(b_nM(|u|)) \tag{3}$$

для всякого n и некоторых u, а поэтому среди измеримых функций семейства $u=\varphi(x)$, для которых осуществляется неравенство (3), имеется последовательность неограниченно возрастающих. Учитывая при этом, что $g(u, x)$ непрерывна по u и $M(u)$ — возрастающая функция, мы можем из семейства функций $u=\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенству (3), выбрать подсемейство, принадлежащее на некотором подмножестве $e'\subset e$ $(\operatorname{mes}e'>0)$ классу L_M, такое, что каково бы ни было положительное число P, найдется функция $\varphi(x)$ подсемейства, для которой выполняется неравенство:

$$\int\limits_{e'} M(|\varphi(x)|)dx \geqslant P, \quad e'\subset e, \quad \operatorname{mes}e'>0.$$

Используя данное неравенство, справедливое для всякого подмножества $e\subset E_0$ с положительной мерой, можно выбрать последовательность попарно не пересекающихся множеств $e_1, e_2, e_3, \ldots$, входящих в множество E_0, и такие функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{e_k} M(|\varphi_k(x)|)dx < +\infty; \quad \sum_{k=1}^{\infty}b_k\int\limits_{e_k} M(|\varphi_k(x)|)dx = +\infty. \tag{4}$$

Полагая тогда

$$(5)\qquad \psi(x)=\begin{cases}\varphi_k(x), & x\in e_k,\\ 0, & x\in B\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}e_k,\end{cases}$$

мы получим

$$(6)\qquad \int_B M(|\psi(x)|)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{e_k}M(|\varphi_k(x)|)\,dx<+\infty,$$

т. е. $\psi(x)\in L_M$. Так как функции $\varphi_k(x)$, по построению, удовлетворяют неравенствам

$$(3')\qquad |g(\varphi_k(x),x)|>a_k(x)+M_1^{-1}(b_kM(|\varphi_k(x)|)),\qquad x\in e_k,$$

то отсюд иа из (4) имеем

$$(7)\qquad \int_B M_1(|g(\psi(x),x)|)\,dx\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{e_k}M_1(|g(\psi(x),x)|)\,dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{e_k}M_1(|g(\varphi_k(x),x)|)\,dx\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}b_k\int_{e_k}M(|\varphi_k(x)|)\,dx=+\infty.$$

Таким образом $\psi(x)\in L_M$, $g(\psi(x),x)\notin L_{M_1}$, что противоречит условию теоремы, согласно которому оператор h действует из L_M в L_{M_1}. Следовательно, $\operatorname{mes}E_0=0$.

Обозначим через U_k семейство измеримых функций $u=\varphi_k(x)$ удовлетворяющих на E_k неравенствам (3). К семейству U_k мы также отнесем функции $u=\omega_k(x)$, удовлетворяющие на E_k соотношению

$$|g(\omega_k(x),x)|=\psi_k(x)=\sup_{\varphi_k\in U_k}|g(\varphi_k(x),x)|.$$

Если среди функций семейства U_k имеются такие $\tilde\varphi_k(x)$, которые не принадлежат L_M, т. е.

$$\int_{E_k}M(|\tilde\varphi_k(x)|)\,dx=+\infty,$$

то такое семейство мы обозначим через $\tilde U_k$. Разумеется, если при $k=k_0$ мы имеем $U_{k_0}=\tilde U_{k_0}$, то и при $k<k_0$ будет $U_k=\tilde U_k$. Покажем, что множество семейств, для которых $U_k=\tilde U_k$, является конечным. Доказательство проведем от противного. Допустим, что при любом k мы имеем, что $U_k=\tilde U_k$. Положим тогда $\sigma_k=E_k\setminus E_{k+1}$. Так как по доказанному $\operatorname{mes}E_0=0$, то найдется последовательность σ_{n_k} таких, что $\operatorname{mes}\sigma_{n_k}>0$. На σ_{n_k} выполняется неравенство

$$(8)\qquad a_{n_k}(x)+M_1^{-1}(b_{n_k}M(|u|))<|g(u,x)|\leqslant a_{n_{k+1}}(x)+M_1^{-1}(b_{n_{k+1}}M(|u|)),$$

причем левая часть этого неравенства имеет место для некоторых u, а правая часть — для всех u. Обозначим через V_{n_k} семейство измеримых функций $u=\varphi_{n_k}(x)$, удовлетворяющих на σ_{n_k} неравенствам (8). Так как согласно допущению при любом k существует функция $\tilde\varphi_k(x)\notin L_M$, то можно подобрать такие функции $\varphi_{n_k}(x)\in V_{n_k}$ и такие подмножества $e_{n_k}\subset\sigma_{n_k}$, для которых будут выполнены соотношения (4), если в них заменить k на n_k. Определив тогда функцию $\psi(x)$ при помощи равенства (5), в котором k заменено на n_k, мы согласно неравенствам (6) и (7), в которых под знаком $\sum_{k=1}^{\infty}$ сделана замена k на n_k, придем к противоречию с условием теоремы, что оператор h действует из L_M в L_{M_1}, так как $\psi(x)\in L_M$, а $g(\psi(x),x)\notin L_{M_1}$. Полученное противоречие доказывает, что семейства $\tilde U_k$ образуют конечное множество. Обозначим через k_0-1 наибольший из номеров k, для которых $U_k=\tilde U_k$, и рассмотрим семейство U_{k_0}. Функции $u=\varphi_{k_0}(x)\in U_{k_0}$ удовлетворяют на E_{k_0} неравенству (3), а на множестве $B\setminus E_{k_0}$

$$(9)\qquad |g(u,x)|\leqslant a_{k_0}(x)+M_1^{-1}(b_{k_0}M(|u|))$$

для всех u.

Так как функции $\omega_{k_0}(x)$, удовлетворяющие на E_{k_0} соотношению

$$|g(\omega_{k_0}(x),x)|=\psi_{k_0}(x)=\sup_{\varphi_{k_0}\in U_{k_0}}|g(\varphi_{k_0}(x),x)|,$$

принадлежат семейству $U_{k_0}\neq\tilde U_{k_0}$, то $\omega_{k_0}(x)\in L_M$. Отсюда, так как по условию оператор h действует из L_M в L_{M_1}, то из соотношения $\omega_{k_0}(x)\in L_M$ следует, что $\psi_{k_0}(x)\in L_{M_1}$ на множестве E_{k_0}. Полагая теперь

$$a(x)=\begin{cases}a_{k_0}(x), & x\in B\setminus E_{k_0},\\ \psi_{k_0}(x), & x\in E_{k_0},\end{cases}$$

мы отсюда и из неравенства (9) имеем, что

$$|g(u,x)|\leqslant a(x)+M_1^{-1}(b_{k_0}M(|u|))$$

для всех $u\in(-\infty,+\infty)$ и почти для всех $x\in B$. Необходимость доказана.

Отметим, что при доказательстве того, что неравенство (2) необходимо для действия оператора h из L_M в L_{M_1}, не было использовано Δ_2-условие, а значит неравенство (2) необходимо для того, чтобы оператор h действовал из L_M в L_{M_1}, где M и M_1 не обязательно удовлетворяют Δ_2-условию.

4. Доказательство достаточности. Если выполнено неравенство (2), то оператор h, очевидно, действует из L_M в L_{M_1}, ибо

$a(x)\in L_{M_1}$, $M_1^{-1}\left(bM(|u(x)|)\right)\in L_{M_1}$ (так как $u(x)\in L_M$), а значит и сумма

$$\left\{a(x)+M_1^{-1}\left(bM(|u(x)|)\right)\right\}\in L_{M_1}.$$

Отсюда и из (2) следует, что $hu\in L_{M_1}$ для всякой функции $u(x)\in L_M$.

Покажем, что из условия (2) следует непрерывность оператора h из L_M в L_{M_1}. С этой целью мы сначала разберем случай когда $\operatorname{mes} B < +\infty$.

Пусть

$$\lim_{n\to\infty}\int_B M(|u_n(x)-u_0(x)|)\,dx = 0. \tag{10}$$

Так как M — выпуклая функция, то согласно известному неравенству Иенсена ([7], стр. 74)

$$M\left\{\frac{\int_B |u(x)v(x)|\,dx}{\int_B |v(x)|\,dx}\right\}\leqslant\frac{\int_B M(|u(x)|)|v(x)|\,dx}{\int_B |v(x)|\,dx};$$

мы имеем, если положить $v(x)=1$,

$$\int_B |u(x)|\,dx\leqslant \operatorname{mes} B M^{-1}\left[(\operatorname{mes} B)^{-1}\int_B M(|u(x)|)\,dx\right].$$

Отсюда и из (10), учитывая, что

$$\lim_{v\to 0} M^{-1}(v)=0,$$

мы находим:

$$\lim_{n\to\infty}\int_B |u_n(x)-u_0(x)|\,dx = 0.$$

Итак, если последовательность $\{u_n\}$ сходится в L_M в среднем к u_0, то эта последовательность $\{u_n\}$ сходится к u_0 просто в среднем, т. е. в метрике L^1. Но как известно (см., например, [11], стр. 245) из обычной сходимости в среднем последовательности $\{u_n\}$ к u_0 следует, что эта последовательность асимптотически (по мере) сходится к u_0. Отсюда согласно теореме Немыцкого (см. [2], стр. 440, или [6], стр. 203) о том, что оператор h преобразует всякую последовательность $\{u_n\}$ сходящуюся асимптотически к u_0 в последовательность hu_n, которая также сходится асимптотически к hu_0, следует, что заданным $\delta>0$ и $\eta>0$ соответствует такое n_1, что для всех $n\geqslant n_1$ будет

$$|hu_n-hu_0|<\delta \tag{11}$$

на множестве F_n, где $\operatorname{mes}(B\setminus F_n)<\eta$.

Далее, так как $\lim_{v\to 0} M_1(v)=0$, из неравенства (11) следует, что заданным $\varepsilon>0$ и $\eta>0$ соответствует такое n_2, что для всех $n\geqslant n_2$ будет

$$\int_{F_n} M_1(|hu_n(x)-hu_0(x)|)\,dx<\varepsilon, \tag{12}$$

где $\operatorname{mes}(B\setminus F_n)<\eta$.

Далее, используя для выпуклой функции M неравенство Иенсена ([7], стр. 73),

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}M(u)+\frac{1}{2}M(v),$$

мы из Δ_2-условия для M находим[4]):

$$\begin{aligned}\int_G M(|u_n(x)|)\,dx &\leqslant \int_G M(|u_0(x)|+|u_n(x)-u_0(x)|)\,dx\leqslant\\ &\leqslant\frac{1}{2}\int_G M(2|u_0(x)|)\,dx+\frac{1}{2}\int_G M(2|u_n(x)-u_0(x)|)\,dx\leqslant\\ &\leqslant\frac{1}{2}\int_G M(2|u_0(x)|)\,dx+\frac{C}{2}\int_G M(|u_n(x)-u_0(x)|)\,dx,\end{aligned}$$

где G — любое измеримое подмножество множества B и $C=\text{const}$. Отсюда и из (10), учитывая абсолютную непрерывность интеграла Лебега от функции $M(2|u_0(x)|)$, мы находим, что заданному $\varepsilon>0$ соответствуют $\eta>0$ и натуральное n_3 такие, что для всякого $n\geqslant n_3$ и любого измеримого множества $G\subset B$, для которого $\operatorname{mes} G<\eta$, будет:

$$\int_G M(|u_n(x)|)\,dx<\varepsilon. \tag{13}$$

Из данного неравенства следует равностепенная абсолютная непрерывность последовательности функций $\{M(|u_n(x)|)\}$. Из (13), путем использования Δ_2-условия для функции M_1 имеем:

$$\begin{aligned}&\int_G M_1\{a(x)+M_1^{-1}[bM(|u_n(x)|)]\}\,dx\leqslant\\ &\qquad\leqslant\frac{1}{2}\int_G M_1(2a(x))\,dx+\frac{bC_1}{2}\int_G M(|u_n(x)|)\,dx<\varepsilon(1+bC_1)\end{aligned}$$

---

[4]) Если для $0<u<v_0$ не выполняется Δ_2-условие, то для этих u нужно пользоваться оценкой $M(u)\leqslant \alpha u$ и соответственно видоизменить выкладки ($\alpha=\text{const.}$).

при подходящем выборе $\eta > 0$, как только $\operatorname{mes} G < \eta$. Из данного неравенства и из неравенства (2), путем использования Δ_2-условия, имеем

$$\int_G M_1(|hu_n(x) - hu_0(x)|)\,dx \leqslant \frac{C_1}{2}\int_G M_1(|hu_n(x)|)\,dx +$$

$$+\frac{C_1}{2}\int_G M_1(|hu_0(x)|)\,dx \leqslant \frac{C_1}{2}\int_G M_1\{a(x) + M_1^{-1}[bM(|u_n(x)|)]\}\,dx +$$

$$+\frac{C_1}{2}\int_G M_1\{a(x) + M_1^{-1}[bM(|u_0(x)|)]\}\,dx <$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon C_1(1+bC_1) + \frac{C_1}{4}\int_G M_1(2a(x))\,dx + \frac{bC_1^2}{4}\int_G M(|u_0(x)|)\,dx.$$

Отсюда, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега от функций $M_1(2a(x))$ и $M(|u_0(x)|)$ следует, что при подходящем выборе $\eta > 0$ будет выполнено неравенство:

(14) $$\int_G M_1(|hu_n(x) - hu_0(x)|)\,dx < \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon C_1(1+bC_1),$$

как только $n \geqslant n_3$ и $\operatorname{mes} G < \eta$.

Полагая теперь $n_0 = \max(n_2, n_3)$, мы из (12) и (14) имеем, если $n \geqslant n_0$:

(15) $$\int_B M_1(|hu_n(x) - hu_0(x)|)\,dx$$

$$= \int_{F_n} M_1(|hu_n - hu_0|)\,dx + \int_{B\setminus F_n} M_1(|hu_n - hu_0|)\,dx < 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon C_1(1+bC_1).$$

Из данного неравенства, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, следует:

(16) $$\lim_{n\to\infty}\int_B M_1(|hu_n(x) - hu_0(x)|)\,dx = 0,$$

если

(10) $$\lim_{n\to\infty}\int_B M(|u_n(x) - u_0(x)|)\,dx = 0.$$

Этим доказано, что если $\operatorname{mes} B < +\infty$, то h-непрерывный оператор из L_M в L_{M_1}, если выполнено неравенство (2).

Разберем теперь случай, когда $\operatorname{mes} B = \infty$[5]). В силу существования на множестве B интегралов от функций $M(2|u_0(x)|)$ и $M_1(2a(x))$ следует, что заданному $\varepsilon > 0$ соответствует в эвклидовом пространстве s-измерений, содержащем множество B, шар D радиуса r с центром в нулевой точке, такой, что на множестве $A = B \setminus B \frown D$ будет

$$\int_A M(2|u_0(x)|)\,dx < \varepsilon; \qquad \int_A M_1(2a(x))\,dx < \varepsilon.$$

Повторяя теперь выкладки, которые привели нас к неравенствам (13) и (14) мы из последних двух неравенств найдем, что при подходящем радиусе r будет:

(17) $$\int_A M_1(|hu_n(x) - hu_0(x)|)\,dx < \varepsilon,$$

если $n \geqslant n_4$. Отсюда и из неравенства (16), которое справедливо, если в нем заменить B на множество $B \frown D$, мы находим, что равенство (16) справедливо и тогда, когда $\operatorname{mes} B = \infty$, если выполнено равенство (10). Теорема доказана.

В. Орлич прочел данную работу и сделал замечания, которые позволили устранить некоторые неточности и улучшить изложение. Автор пользуется случаем, чтобы выразить ему свою глубокую благодарность.

[5]) В данном случае мы полагаем, что Δ_2-условие выполняется для всех $u \geqslant 0$.

Цитированная литература

[1] A. Hammerstein, *Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen*, Acta Math. 54 (1930), стр. 117-176.

[2] В. В. Немыцкий, *Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений*, Матем. сб. 41 (1934), стр. 438-452.

[3] — *Solution des équations elliptiques pour les „petits" domains*, Матем. сб. 1 (43) (1936), стр. 485-500.

[4] М. М. Вайнберг, *О непрерывности некоторых операторов специального вида*, ДАН 73, № 2 (1950), стр. 253-255.

[5] — *О структуре одного оператора*, ДАН 92, № 2 (1953), стр. 213-216.

[6] — *Вариационные методы исследования нелинейных операторов*, Москва 1956.

[7] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Москва 1939.

[8] Z. Birnbaum und W. Orlicz, *Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen*, Stud. Math. 3 (1931), стр. 1-67.

[9] W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B*, Bull. international de l'Acad. Pol., série A (1932), стр. 207-220.

[10] — *Über Räume L^M*, ibidem (1936), стр. 93-107.

[11] E. W. Hobson, *The theory of functions of a real variable*, 2-nd edition, Cambridge 1921-1926, vol II.

Reçu par la Rédaction le 19. 6. 1957