Somit ist die für $T \epsilon (L_p, C_N)$ $(1 < p < \infty)$ hinreichende Bedingung sogar notwendig für $T \epsilon (L_p, L_\infty)$ $(1 < p < \infty)$. Hieraus folgt die Behauptung.

Schlußbemerkung. Unsere Aussage in Satz 1 im Fall $E = C$ ist äquivalent der eingangs genannten Aussage von Herrn Karamata.

Herr Aljančić ([2], Satz 1) bewies einen entsprechenden Satz wie Herr Karamata für ein allgemeines orthonormiertes System, das in Bezug auf den Raum C abgeschlossen ist.

Unsere Sätze wurden für das trigonometrische Orthogonalsystem ausgesprochen und bewiesen, doch lassen sie sich leicht auf allgemeinere Orthogonalsysteme mit gewissen Eigenschaften, wie Abgeschlossenheit und Vollständigkeit übertragen.

Literaturnachweis

[1] N. I. Achieser, *Vorlesungen über Approximationstheorie*, Berlin 1953.

[2] S. Aljančić, *Über Summierbarkeit von Orthogonalentwicklungen stetiger Funktionen*, Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 10 (1956), p. 121-130.

[3] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, New York 1955.

[4] I. Gelfand, *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*, Mat. Sbornik 4 (46) (1938), p. 235-284.

[5] S. Kaczmarz, *Sur les multiplicateurs des séries orthogonales*, Studia Mathematica 4 (1933), p. 21-26.

[6] S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, New York 1951.

[7] J. Karamata, *Suite de fonctionnelles linéaires et facteurs de convergence des séries de Fourier*, Journal de Math. P. et Appl. 35 (1956), p. 87-95.

[8] A. C. Zaanen, *Note on a certain class of Banach spaces*, Koninklijke Nederl. Akad. Wetenschappen, Proc. 52 (1949), p. 488-498.

[9] — *Integral transformations and their resolvents in Orlicz and Lebesgue spaces*, Compositio Mathematica 10 (1952), p. 56-94.

[10] — *Linear Analysis*, Amsterdam-Groningen 1953

[11] A. Zygmund, *Trigonometrical series*, New York 1952.

Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1958

STUDIA MATHEMATICA, T. XVII. (1958)

Multiplikatoren für starke Konvergenz von Fourierreihen II

von

G. GOES (Ludwigsburg)

Nach Abschluß meiner Note [1] wurde ich durch eine Arbeit von Herrn Karamata [3] darauf aufmerksam gemacht, daß schon M. Katayama [4] die in [1] angegebene Bedingung für $T \epsilon (L_p, C_N)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ gefunden hat — wir verwenden die in [1] eingeführten Bezeichnungen. M. Katayama verwendet in Ihren Beweisen jedoch nicht wie wir das Grundmengenprinzip (vgl. [1]), sondern im wesentlichen die gleichen Beweisgedanken wie J. Karamata [2].

Note [4] enthält eine genaue Bedingung für $T \epsilon (S, C_N)$, wobei S der Raum der Fourier-Stieltjes-Reihen sei. Der folgende Satz enthält diese Aussage von Katayama ([4], S. 122, Satz 4) als Spezialfall und im Beweis wird die in [1], Hilfssatz 2, angegebene Norm der Operation $T_n \epsilon (L, E_1)$ verwendet:

SATZ. *Ist E_1 irgendeiner der Räume L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, L_Φ, C, so ist dann und nur dann $T \epsilon (S, E_{1N})$, wenn*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos kt \sim K(t) \epsilon E_{1N}. \tag{1}$$

Beweis. E_1 sei irgendeiner der Räume L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, L_Φ oder C.

Ist $T \epsilon (S, E_{1N})$, so ist (1) erfüllt wegen $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kt \epsilon S$.

Ist umgekehrt (1) erfüllt, so gilt für jede mit 2π periodische und schwankungsbeschränkte Funktion $f(t)$ mit

$$\|f\|_V = \int_0^{2\pi} |df|$$

und

$$h = df \sim \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jt + b_j \sin jt) \epsilon S$$

sowie

$$K_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos kt,$$

$$\|T_n\| = \frac{1}{\pi} \sup_{\|f\|_V=1} \Big\| \int_0^{2\pi} K_n(x-t)\,df \Big\|_{E_1}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sup_{\|f\|_V=1} \Big\| \int_0^{2\pi} K_n(x-t) f\,dt \Big\|_{E_1} = \frac{M}{\pi} \|K_n(t)\|_{E_1}$$

mit $M=1$ für $E_1 = L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, C und mit $\frac{1}{8} \leqslant M \leqslant 2$ für $E_1 = L_\Phi$ nach [1], Hilfssatz 2. Also ist

$$\|T_m h - T_n h\|_{E_1} \leqslant \|T_m - T_n\| \, \|f\|_V = \frac{M}{\pi} \|K_m(t) - K_n(t)\|_{E_1} \|f\|_V .$$

Daraus folgt die Behauptung, denn offensichtlich ist

$$\lim_{m>n\to\infty} \|s_n(g) - s_m(g)\|_{E_1} = 0$$

hinreichend und notwendig für $g \in E_{1N}$.

Bemerkung. Für $E_1 = L_p$ $(1 < p < \infty)$ ist $E_1 = E_{1N}$ ([6], S. 153, 7.3 (i)) und die obige Bedingung bekannt [5]. Da $\|K_n(t)\|_p = O(1)$ $(n \to \infty)$ hinreichend und notwendig ist für $K(t) \in L_p (1 < p < \infty)$ ([5], S. 84), so ist die obige Bedingung (1) im Falle $E_{1N} = L_p$ $(1 < p < \infty)$ identisch mit der genauen Bedingung für $T \in (L_{p'}, C_N)$ $(1 < p' < \infty)$ ([1], Satz 1), sodaß mit [1], Satz 3, folgt: Für $1 < p < \infty$ ist

$$(S, L_p) = (L, L_p) = (L_{p'}, C_N) = (L_{p'}, C) = (L_{p'}, L_\infty).$$

Da ferner $\|K_n(t)\|_p = O(1)$ $(n \to \infty)$ genau dann gilt, wenn auch $\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin kt\|_p = O(1)$ $(n \to \infty)$ ist im Fall $(1 < p < \infty)$ ([6], S. 147), so transformieren die Multiplikatoren dieser Klassen (E, E_1) auch die konjugierte Reihe von jedem Element aus E in die Fourierreihe eines Elements in E_1.

Literaturnachweis

[1] G. Goes, *Multiplikatoren für starke Konvergenz von Fourierreihen I*, Studia Math. 17 (1958), p. 299-308.

[2] J. Karamata, *Suite de fonctionnelles linéaires et facteurs de convergence des séries de Fourier*, Journal de Math. P. et Appl. 35 (1956), p. 87-95.

[3] — *Sur les facteurs de convergence uniforme des séries de Fourier*, Revue Fac. Sci. Univ. d'Istanbul, Ser. A, 22 (1957), p. 35-43.

[4] M. Katayama, *Fourier series VII: Uniform convergence factors of Fourier series*, J. Fac. Sci,. Hokkaidô Univer., Ser. I, 13 (1957), p. 121-129.

[5] S. Verblunsky, *On some classes of Fourier series*. Proc. London Math. Soc. 33 (1932), p. 287-327.

[6] A. Zygmund, *Trigonometrical series*, New York (1952).

Reçu par la Rédaction le 10. 6. 1958