STUDIA MATHEMATICA, T. XVII. (1958)

Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs III

Opérations linéaires

par

N. DINCULEANU (Bucarest)

1. Introduction. Soient Z un espace localement compact, μ une mesure de Radon [1]) positive sur Z, $\mathcal{E} = \big(E(z)\big)_{z\in Z}$ une famille d'espaces de Banach, et $\mathcal{E}' = \big(\mathcal{E}'(z)\big)_{z\in Z}$ la famille des duals des espaces $E(z)$. Désignons par $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ l'ensemble des champs de vecteurs [2]) $\boldsymbol{x}$ définis sur Z tels que $\boldsymbol{x}(z)\in E(z)$ quel que soit $z\in Z$, et par $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ l'ensemble des champs de fonctionnelles $\boldsymbol{x}'$ définis sur Z, tels que $\boldsymbol{x}'(z)\in E'(z)$, quel que soit $z\in Z$. Supposons qu'il existe une famille fondamentale $\mathcal{A}\subset\mathcal{C}(\mathcal{E})$ de champs de vecteurs continus, et une famille fondamentale $\mathcal{A}'\subset\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ de champs de fonctionnelles continus, vérifiant la condition suivante:

(*) *La fonction scalaire* $z\to\langle\boldsymbol{x}(z),\boldsymbol{x}'(z)\rangle$ *est continue quels que soient* $\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}$ et $\boldsymbol{x}'\in\mathcal{A}'$.

Si tous les espaces $E(z)$ sont identiques à un espace de Banach E, on prendra toujours pour $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{A}'$) l'ensemble des applications constantes de Z dans E (respectivement E'). La condition (*) est alors vérifiée.

De la condition (*) il résulte que si $\boldsymbol{x}$ est continu (par rapport à $\mathcal{A}$) et $\boldsymbol{x}'$ est continu (par rapport à $\mathcal{A}'$), la fonction scalaire $z\to\langle\boldsymbol{x}(z),\boldsymbol{x}'(z)\rangle$ est continue; si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}'$ sont mesurables, la fonction $z\to\langle\boldsymbol{x}(z),\boldsymbol{x}'(z)\rangle$ est mesurable ([2], [4]).

On désigne par $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des champs de vecteurs mesurables $\boldsymbol{x}\in\mathcal{C}(\mathcal{E})$, et par $\mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des champs de vecteurs $\boldsymbol{x}\in\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ tels que l'ensemble $\{z|\boldsymbol{x}(z)\neq 0\}$ soit contenu dans la réunion d'une suite d'ensembles intégrables. On définit d'une manière analogue les ensembles $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$ et $\mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$ formés de champs de fonctionnelles mesurables $\boldsymbol{x}'\in\mathcal{C}(\mathcal{E}')$.

Dans [5] nous avons donné la forme générale des ceratines opérations linéaires définies sur l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}$. Cet article donne une représentation

[1]) Pour ce qui concerne l'intégration, voir [1].

[2]) Pour ce qui concerne les champs de vecteurs et les espaces L^p_a, voir [6].

intégrale des certaines opérations linéaires définies sur l'espace d'Orlicz de champs de vecteurs $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, si l'on impose à Φ certaines conditions restrictives.

2. Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. Ce paragraphe rappelle la définition et quelques propriétés des espaces $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ ([2], [4]).

Soit φ une fonction numérique définie sur $[0, \infty]$, croissante, continue à gauche, telle que $\varphi(0) = 0$ et $0 < \varphi(t) < \infty$ si $0 < t < \infty$. Introduisons la fonction ψ (inverse de φ) définie sur $[0, \infty]$ par $\psi(0) = 0$ et $\psi(s) = \sup\{t|\varphi(t) < s\}$ si $s > 0$; ψ est croissante et continue à gauche. Si $\delta = \lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)$, on a $\varphi(s) = 0$ pour $s \leqslant \delta$ et $\psi(s) > 0$ pour $s > \delta$.

Considérons encore les fonctions Φ et Ψ, complémentaires au sens de Young, définies sur $[0, \infty]$ par les égalités

$$\Phi(u) = \int_0^u \varphi(t)\,dt, \qquad \Psi(v) = \int_0^v \psi(s)\,ds.$$

On vérifie aisément que $0 < \Phi(u) < \infty$ si $0 < u < \infty$; $\Psi(v) = 0$ pour $v \leqslant \delta$ et $\Psi(v) > 0$ pour $v > \delta$.

DÉFINITION 1. *On désigne par $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des champs de vecteurs mesurables $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ tels que la fonction $z \to \Phi(\|x(z)\|)$ soit intégrable, et par $O^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ l'ensemble des champs de fonctionnelles mesurables $x' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ tels que la fonction $z \to \Psi(\|x'(z)\|)$ soit intégrable.*

On introduit les notations suivantes:

$$|x|_{\Phi} = \int \Phi(\|x(z)\|)\,d\mu(z) \qquad \text{pour} \qquad x \in O^{\Phi}_{\mathcal{A}},$$

$$|x'|_{\Psi} = \int \Psi(\|x'(z)\|)\,d\mu(z) \qquad \text{pour} \qquad x' \in O^{\Psi}_{\mathcal{A}'}.$$

Pour tout champ de vecteurs $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ (mesurable ou non), posons

$$\|x\|_{\Phi} = \sup_{|x'|_{\Psi}\leqslant 1} \int^* |\langle x(z), x'(z)\rangle|\,d\mu(z),$$

et pour tout champ de fonctionnelles $x' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ (mesurable ou non), posons

$$\|x'\|_{\Psi} = \sup_{|x|_{\Psi}\leqslant 1} \int^* |\langle x(z), x'(z)\rangle|\,d\mu(z).$$

PROPOSITION 1. (i) *Si $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ est tel que $\|x\|_{\Phi} < \infty$ et la fonction $z \to \langle x(z), x'(z)\rangle$ est mesurable pour tout $x' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$, on a*

$$\|x\|_{\Phi} = \sup_{|x'|_{\Psi}\leqslant 1} \left|\int \langle x(z), x'(z)\rangle\,d\mu(z)\right|.$$

(ii) *Si $x' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ est tel que $\|x'\|_{\Psi} < \infty$ et la fonction $z \to \langle x(z), x'(z)\rangle$ est mesurable pour tout $x \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$, on a*

$$\|x'\|_{\Phi} = \sup_{|x|_{\Phi}\leqslant 1} \left|\int \langle x(z), x'(z)\rangle\,d\mu(z)\right|.$$

DÉFINITION 2. (i) *On désigne par $L^{\Phi}_{\mathcal{A}'}$ l'ensemble des champs de vecteurs $x \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$ tels que $\|x\|_{\Phi} < \infty$.*

(ii) *On désigne par $L^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ l'ensemble des champs de fonctionnelles $x' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$ tels que $\|x'\|_{\Psi} < \infty$ si $\delta = 0$, respectivement l'ensemble des champs de fonctionnelles $x' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ tels que $\|x'\|_{\Psi} < \infty$ si $\delta > 0$.*

Ces espaces généralisent certains espaces introduits par Orlicz [10]. Ils seront appellés *espaces d'Orlicz* de champs de vecteurs.

PROPOSITION 2. (i) *$L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ (resp. $L^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$) est un espace vectoriel et contient $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ (resp. $O^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$);*

(ii) *$\|x\|_{\Phi}$ (resp. $\|x'\|_{\Psi}$) est une semi-norme sur $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ (resp. $L^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$);*

(iii) *$L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ (resp. $L^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$) est complet pour la topologie définie par la semi-norme $\|x\|_{\Phi}$ (resp. $\|x'\|_{\Psi}$);*

(iv) *Si $x \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, pour que $\|x\|_{\Phi} = 0$ il faut et il suffit que $x(z) = 0$ presque partout; si $\delta = 0$ (resp. $\delta > 0$) et $x' \in L^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$, pour que $\|x'\|_{\Psi} = 0$ il faut et il suffit que $x'(z) = 0$ presque partout (resp. localement presque partout).*

PROPOSITION 3. *Supposons qu'il existe une constante $M > 1$, telle que $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ pour $u \geqslant 0$. Alors les ensembles $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ et $O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ contiennent les mêmes éléments; si (x_n) est une suite d'éléments de $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_{\Phi} = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|_{\Phi} = 0$.*

PROPOSITION 4. *Si $x \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$ (resp. $x' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$) alors $x \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ (resp. $x' \in L^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$) si et seulement si la fonction $z \to \langle x(z), x'(z)\rangle$ est intégrable pour tout $x' \in L^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ (resp. $x \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$).*

3. Une classe particulière d'espaces $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. Dans la suite de cet article on supposera que $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = l < \infty$; on peut admettre $l = 1$, sans restreindre la généralité. Alors $\psi(s) < \infty$ pour $s < 1$ et $\psi(s) = \infty$ pour $s > 1$, donc $\Psi(v) < \infty$ pour $v < 1$ et $\Psi(v) = \infty$ pour $v > 1$. On a aussi $\Phi(u) \leqslant u$ pour $u \geqslant 0$.

PROPOSITION 5. *Pour tout $x \in O^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ on a $|x|_{\Phi} \leqslant N_1(x)$; pour tout $x' \in O^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ on a $N_{\infty}(x') \leqslant 1$.*

La première affirmation résulte de l'inégalité $\Phi(u) \leqslant u$ pour $u \geqslant 0$. Si $\boldsymbol{x}' \epsilon O^{\Psi}_{\mathscr{A}'}$, on a $\int^* \Psi(\|\boldsymbol{x}'(z)\|)\,d\mu(z) < \infty$, donc $\Psi(\|\boldsymbol{x}'(z)\|) < \infty$ presque partout et par suite $\|\boldsymbol{x}'(z)\| \leqslant 1$ presque partout.

Corollaire. *On a* $L^1_{\mathscr{A}} \subset O^{\Phi}_{\mathscr{A}}$ *et* $O^{\Psi}_{\mathscr{A}'} \subset L^{\infty}_{\mathscr{A}'}$.

Proposition 6. *Pour tout* $\boldsymbol{x} \epsilon L^{\Phi}_{\mathscr{A}}$ *on a* $\|\boldsymbol{x}\|_{\Phi} \leqslant N_1(\boldsymbol{x})$; *pour tout* $\boldsymbol{x}' \epsilon L^{\infty}_{\mathscr{A}'}$ *on a* $N_{\infty}(\boldsymbol{x}') \leqslant \|\boldsymbol{x}'\|_{\Psi}$.

En effet on a

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\Phi} = \sup_{|\boldsymbol{x}'|_{\Psi} \leqslant 1} \int |\langle \boldsymbol{x}(z), \boldsymbol{x}'(z)\rangle|\,d\mu(z) \leqslant \sup_{N_{\infty}(\boldsymbol{x})' \leqslant 1} \int^* |\langle \boldsymbol{x}(z), \boldsymbol{x}'(z)\rangle|\,d\mu(z) = N_1(\boldsymbol{x})$$

puisque $|\boldsymbol{x}'|_{\Psi} \leqslant 1$ implique $N_{\infty}(\boldsymbol{x}') \leqslant 1$, et

$$N_{\infty}(\boldsymbol{x}') = \sup_{N_1(\boldsymbol{x}) \leqslant 1} \int |\langle \boldsymbol{x}(z), \boldsymbol{x}'(z)\rangle|\,d\mu(z)$$

$$\leqslant \sup_{|\boldsymbol{x}|_{\Phi} \leqslant 1} \int^* |\langle \boldsymbol{x}(z), \boldsymbol{x}'(z)\rangle|\,d\mu(z) = \|\boldsymbol{x}'\|_{\Psi},$$

puisque $|\boldsymbol{x}|_{\Phi} \leqslant N_1(\boldsymbol{x})$.

Corollaire 1. $L^1_{\mathscr{A}'} \subset L^{\Phi}_{\mathscr{A}}$ *et* $L^{\Psi}_{\mathscr{A}'} \subset L^{\infty}_{\mathscr{A}'}$.

Corollaire 2. *La topologie de* $L^1_{\mathscr{A}}$ *est plus fine que la topologie induite sur* $L^1_{\mathscr{A}}$ *par celle de* $L^{\Phi}_{\mathscr{A}}$; *la topologie de* $L^{\Psi}_{\mathscr{A}'}$ *est plus fine que la topologie de la convergence uniforme (localement presque partout).*

Remarque. Si f est une opération (ou fonctionnelle) linéaire et continue définie sur $L^{\Phi}_{\mathscr{A}}$, sa restriction à $L^1_{\mathscr{A}}$ est encore continue. Pour éviter les confusions, on utilise pour les normes de f dans $L^{\Phi}_{\mathscr{A}}$ ou dans $L^1_{\mathscr{A}}$ respectivement les notations suivantes:

$$\|f\|_{\Phi} = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_{\Phi} \leqslant 1} \|f(\boldsymbol{x})\| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \sup_{N_1(\boldsymbol{x}) \leqslant 1} \|f(\boldsymbol{x})\|.$$

On a alors $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_{\Phi}$.

Il y a des cas où les espaces $L^1_{\mathscr{A}}$ et $L^{\Phi}_{\mathscr{A}}$ (donc aussi $L^{\infty}_{\mathscr{A}'}$ et $L^{\Psi}_{\mathscr{A}'}$) contiennent les mêmes éléments.

Proposition 7. *Si* μ *est bornée, les ensembles* $L^1_{\mathscr{A}}$ *et* $L^{\Phi}_{\mathscr{A}}$ *(resp.* $L^{\infty}_{\mathscr{A}'}$ *et* $L^{\Psi}_{\mathscr{A}'}$*) contiennent les mêmes éléments.*

Soit $\boldsymbol{x}' \epsilon L^{\infty}_{\mathscr{A}'}$; on peut trouver un nombre $p > 0$ tel que $p\|\boldsymbol{x}'(z)\| \leqslant a < 1$ presque partout, donc $\int \Psi(p\|\boldsymbol{x}'(z)\|)\,d\mu(z) \leqslant \Psi(a)\|\mu\| < \infty$ et, par suite $p\boldsymbol{x}' \epsilon O^{\Psi}_{\mathscr{A}'} \subset L^{\Psi}_{\mathscr{A}'}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{x}' \epsilon L^{\Psi}_{\mathscr{A}'}$.

Si $\boldsymbol{x} \epsilon L^{\Phi}_{\mathscr{A}}$, alors la fonction $z \to \|\boldsymbol{x}(z)\| h(z)$ est sommable pour toute fonction $h \epsilon L^{\Psi}$ et si l'on prend $h(z) \equiv 1$, on a $h \epsilon L^{\infty} = L^{\Psi}$ et, par conséquent, $z \to \|\boldsymbol{x}(z)\|$ est sommable, c'est-à-dire $\boldsymbol{x} \epsilon L^1_{\mathscr{A}}$.

Proposition 8. *Si* $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = \delta > 0$, *les ensembles* $L^1_{\mathscr{A}}$ *et* $L^{\Phi}_{\mathscr{A}}$ *(resp.* $L^{\infty}_{\mathscr{A}'}$ *et* $L^{\Psi}_{\mathscr{A}'}$*) contiennent les mêmes éléments.*

Si $\boldsymbol{x}' \epsilon L^{\infty}_{\mathscr{A}'}$, on peut trouver un nombre $p > 0$, tel que $p\|\boldsymbol{x}'(z)\| \leqslant \delta$ localement presque partout. Soit N l'ensemble $\{z|p\|\boldsymbol{x}'(z)\| > \delta\}$, et soit $\boldsymbol{y}' = p\boldsymbol{x}'\varphi_{CN}$. Alors $|\boldsymbol{y}'|_{\Psi} = 0$, donc $\boldsymbol{y}' \epsilon O^{\Psi}_{\mathscr{A}'} \subset L^{\Psi}_{\mathscr{A}'}$. Comme $L^{\Phi}_{\mathscr{A}} \subset \mathfrak{M}^0_{\mathscr{A}}$, pour tout $\boldsymbol{x} \epsilon L^{\Phi}_{a}$ on a $\langle \boldsymbol{x}(z), \boldsymbol{y}'(z)\rangle = \langle \boldsymbol{x}(z), p\boldsymbol{x}'(z)\rangle$ presque partout, et comme pour tout $\boldsymbol{x} \epsilon L^{\Phi}_{\mathscr{A}}$ la fonction $z \to \langle \boldsymbol{x}(z), \boldsymbol{y}'(z)\rangle$ est intégrable, il résulte que la fonction $z \to \langle \boldsymbol{x}(z), p\boldsymbol{x}'(z)\rangle$ est intégrable pour tout $\boldsymbol{x} \epsilon L^{\Phi}_{\mathscr{A}}$, donc $p\boldsymbol{x}' \epsilon L^{\Psi}_{\mathscr{A}'}$ et aussi $\boldsymbol{x}' \epsilon L^{\Psi}_{\mathscr{A}'}$ et par suite $L^{\infty}_{\mathscr{A}'} = L^{\Psi}_{\mathscr{A}'}$. Il en résulte $L^1_{\mathscr{A}} = L^{\Phi}_{\mathscr{A}}$.

Proposition 9. *S'il existe une constante* $M > 1$, *telle que* $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ *pour* $u \geqslant 0$, *l'ensemble des champs de vecteurs bornés de* $L^1_{\mathscr{A}}$ *est dense dans* $L^{\Phi}_{\mathscr{A}}$ *pour la topologie définie par la semi-norme* $\|\boldsymbol{x}\|_{\Phi}$.

Soit $\boldsymbol{x} \epsilon L^{\Phi}_{\mathscr{A}} = O^{\Phi}_{\mathscr{A}}$ (proposition 3). On sait que $\boldsymbol{x}(z) = 0$ presque partout en dehors de la réunion d'une suite (K_n) d'ensembles compacts. On peut supposer que la suite (K_n) est croissante. Pour tout nombre naturel n on définit le champ de vecteurs $\boldsymbol{x}_n$ par:

$$\boldsymbol{x}_n(z) = \begin{cases} \boldsymbol{x}(z) & \text{si} \quad z \epsilon K_n \text{ et } \|\boldsymbol{x}(z)\| \leqslant n, \\ n\dfrac{\boldsymbol{x}(z)}{\|\boldsymbol{x}(z)\|} & \text{si} \quad z \epsilon K_n \text{ et } \|\boldsymbol{x}(z)\| > n, \\ 0 & \text{si} \quad z \notin K_n. \end{cases}$$

$\boldsymbol{x}_n$ est alors mesurable, borné et à support compact, donc $\boldsymbol{x}_n \epsilon L^1_{\mathscr{A}}$. On a $\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{x}_n(z) = \boldsymbol{x}(z)$ presque partout, donc $\lim_{n \to \infty} \Phi(\|\boldsymbol{x}_n(z) - \boldsymbol{x}(z)\|) = 0$ presque partout. D'autre part, pour chaque n on a

$$\|\boldsymbol{x}_n(z) - \boldsymbol{x}(z)\| \leqslant \|\boldsymbol{x}_n(z)\| + \|\boldsymbol{x}(z)\| \leqslant 2\|\boldsymbol{x}(z)\|$$

donc

$$\Phi(\|\boldsymbol{x}_n(z) - \boldsymbol{x}(z)\|) \leqslant M\Phi(\|\boldsymbol{x}(z)\|).$$

En appliquant le théorème de Lebesgue à la suite $\big(\Phi(\|\boldsymbol{x}_n(z) - \boldsymbol{x}(z)\|)\big)$, on déduit

$$\lim_{n \to \infty} \int \Phi(\|\boldsymbol{x}_n(z) - \boldsymbol{x}(z)\|)\,d\mu(z) = 0,$$

donc (proposition 3) $\lim_{n \to \infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|_{\Phi} = 0$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. *Si* $\delta > 0$, *l'ensemble des champs bornés de* $L^1_{\mathscr{A}}$ *est dense dans* $L^{\Phi}_{\mathscr{A}}$ *pour la topologie définie par la semi-norme* $\|\boldsymbol{x}\|_{\Phi}$.

En effet, on a $0 < \delta \leqslant \varphi(u) \leqslant 1$, donc $\delta u \leqslant \Phi(u) \leqslant u$. Alors

$$\Phi(2u) \leqslant 2u = \frac{2}{\delta}\,\delta u \leqslant \frac{2}{\delta}\,\Phi(u).$$

Si l'on pose $M = 2/\delta$, on retrouve les conditions de la proposition 9, d'où le corollaire.

Remarques. 1° Si $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) = 1$ pour $t > 0$, alors $\|x\|_\Phi = N_1(x)$ et $\|x'\|^\Psi = N_\infty(x')$.

2° Dans le cas étudié dans ce paragraphe, les espaces $L^\Phi_{\mathcal{A}}$ ont beaucoup de propriétés analogues aux propriétés de l'espace $L^1_{\mathcal{A}}$.

4. Le théoréme de représentation. Dans ce paragraphe on garde l'hypothèse $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 1$. Soit F un espace de Banach de type dénombrable, dual d'un espace de Banach B (de type dénombrable). Pour tout $z \in Z$, désignons par $G(z)$ l'espace normé $\mathcal{L}(E(z), F)$ des applications linéaires et continues de $E(z)$ dans F, par $\mathcal{G}$ la famille $(G(z))_{z\in Z}$ et par $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ l'ensemble des champs d'opérations U définis sur Z, tels que $U(z) \in G(z)$, quel que soit $z \in Z$.

Pour un champ d'opérations $U \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ tel que pour tout $x \in L^\Phi_{\mathcal{A}}$ la fonction $z \to U(z)x(z)$ soit faiblement intégrable [3]), posons

$$\|U\|_\Psi = \sup_{|x|_\Phi \leqslant 1} \left\| \int U(z)x(z)\,d\mu(z) \right\|.$$

Supposons que la famille fondamentale $\mathcal{A}$ vérifie l'axiome de Godement:

(G) *Il existe une partie dénombrable $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, telle que l'ensemble $\{x(z) | x \in \mathcal{A}_0\}$ soit dense dans $E(z)$, quel que soit $z \in Z$.*

Dans ces conditions on peut démontrer le théorème suivant:

Théorème. *S'il existe une constante $M > 1$ telle que $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ pour $u \geqslant 0$ pour toute application linéaire et continue f de $L^\Phi_{\mathcal{A}}$ dans F, il existe un champ d'opérations $U_f \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$, determiné localement presque partout, tel que $\frac{1}{2}\|U\|_\Psi \leqslant \|f\|_\Phi \leqslant \|U\|_\Psi$ et*

$$f(x) = \int U_f(z)x(z)\,d\mu(z) \quad \text{pour} \quad x \in L^\Phi_{\mathcal{A}},$$

l'intégrale du second membre étant forte ou faible [4]) suivant que $x \in L^1_{\mathcal{A}}$ ou $x \notin L^1_{\mathcal{A}}$.

[3]) Dans le sens qu'il existe un élément de F désigné par $\int U(z)x(z)\,d\mu(z)$, tel que $\langle a, \int U(z)x(z)\,d\mu(z)\rangle = \int \langle a, U(z)\,x(z)\rangle\,d\mu(z)$ pour tout $a \in B$.

[4]) Dans le sens que $\langle a, f(x)\rangle = \int \langle a, U_f(z)x(z)\rangle\,d\mu(z)$ pour tout $a \in B$.

Démonstration. Conformément aux conventions faites, on note pur $\|f\|_\Phi$ la norme de f sur $L^\Phi_{\mathcal{A}}$ et par $\|f\|_1$ la norme de f sur $L^1_{\mathcal{A}}$ (pour la topologie de $L^1_{\mathcal{A}}$), et on a $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\Phi$.

Pour chaque $a \in B$, considérons la forme linéaire f_a définie sur $L^\Phi_{\mathcal{A}}$ par l'égalité $f_a(x) = \langle a, f(x)\rangle$; f_a est continue et sa norme $\|f_a\|_\Phi$ sur $L^\Phi_{\mathcal{A}}$ vérifie l'inégalité $\|f_a\|_\Phi \leqslant \|a\|\,\|f\|_\Phi$. Remarquons qu'on a

$$\|f\|_\Phi = \sup_{\|a\|\leqslant 1} \|f_a\|_\Phi. \tag{1}$$

La restriction de f_a à $L^1_{\mathcal{A}}$ est encore continue et sa norme $\|f_a\|_1$ sur L^1_a (pour la topologie de $L^1_{\mathcal{A}}$) vérifie l'inégalité $\|f_a\|_1 \leqslant \|a\|\,\|f\|_1$. On a aussi $\|f_a\|_1 \leqslant \|f_a\|_\Phi \leqslant \|a\|\,\|f\|_\Phi$. Dans ce cas ([3], th. 2), la forme linéaire f_a sur $L^\Phi_{\mathcal{A}}$ peut s'écrire sous la forme

$$f_a(x) = \int \langle x(z), x'_a(z)\rangle\,d\mu(z) \quad \text{pour} \quad x \in L^\Phi_{\mathcal{A}} \tag{2}$$

où $x'_a \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ et $\frac{1}{2}\|x'_a\|_\Psi \leqslant \|f_a\|_\Phi \leqslant \|x'_a\|_\Psi$; en outre, x'_a est determiné à un ensemble négligeable près, N_a. On déduit de (1) que

$$\tfrac{1}{2}\sup_{\|a\|\leqslant 1}\|x'_a\|_\Psi \leqslant \|f\|_\Phi \leqslant \sup_{\|a\|\leqslant 1}\|x'_a\|_\Psi. \tag{3}$$

La formule (2) est valable en particulier pour tout $x \in L^1_{\mathcal{A}}$, et comme f_a est continue sur $L^1_{\mathcal{A}}$ et x'_a est déterminé localement presque partout, il résulte ([8], th. 2) que $N_\infty(x'_a) = \|f_a\|_1$. On déduit facilement des fonctions x'_a les propriétés suivantes:

(i) $x'_{\alpha a+\beta b}(z) = \alpha x'_a(z) + \beta x'_b(z)$ localement presque partout pour chaque $a, b \in B$ et $\alpha, \beta \in C$;

(ii) $\|x'_a(z)\| \leqslant \|f_a\|_1 \leqslant \|a\|\,\|f\|_1$ localement presque partout pour chaque $a \in B$;

(iii) Si $\lim_{n\to\infty}\|a_n - a\| = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} x'_{a_n}(z) = x'_a(z)$ localement presque partout, où $a_n, a \in B$.

Soit A l'ensemble des combinaisons linéaires a coefficients rationnels complexes d'une partie dénombrable partout dense dans B. Il existe alors un ensemble localement négligeable $N \subset Z$, tel que si l'on pose $x'_a(z) = 0$ pour $z \in N$ et $a \in A$, les relations (i) et (ii) soient vérifiées pour tout $z \in Z$ quels que soient $a, b \in A$ et α, β rationnels. Alors, pour chaque $z \in Z$ et $x \in L^\Phi_{\mathcal{A}}$, l'application $a \to \langle x(z), x'_a(z)\rangle$ est une forme linéaire (par rapport au corps de nombres rationnels complexes) sur A. Cette forme linéaire est continue car

$$|\langle x(z), x'_a(z)\rangle| \leqslant \|x(z)\|\,\|f\|_1\|a\|,$$

et par suite peut être prolongée uniquement par continuité, en une forme linéaire et continue $Tx(z)$ sur B où

$$\|Tx(z)\| \leqslant \|x(z)\| \, \|f\|_1. \tag{4}$$

Pour tout $a \in A$ et tout $x \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ on a $\langle x(z), x'_a(z)\rangle = \langle a, Tx(z)\rangle$ et, en vertu de (iii), cette égalité est valable presque partout pour chaque $a \in B$ et $x \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. La formule (2) devient:

$$\langle a, f(x)\rangle = \int \langle a, Tx(z)\rangle d\mu(z) \quad \text{pour} \quad a \in B \text{ et } x \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}. \tag{5}$$

Pour chaque $x \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, la fonction $z \to \langle a, Tx(z)\rangle$ est mesurable pour tout $a \in B$, donc ([7], Théorème 2 p. 239) aussi pour tout $a \in F'$, car F est du type dénombrable. Alors ([7], Théorème 1, p. 238), pour chaque $x \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, l'application $z \to Tx(z)$ de Z dans F est mesurable. On déduit d'autre part de (4)

$$\|Tx\|_{\Phi} \leqslant \|x\|_{\Phi}\|f\|_1 \quad \text{et} \quad N_1(Tx) \leqslant N_1(x)\|f\|_1, \tag{6}$$

donc $Tx \in L^{\Phi}_F$, et si $x \in L^1_{\mathcal{A}}$ on a $Tx \in L^1_F$.

On en tire facilement que l'application $T: x \to Tx$ de $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ dans L^{Φ}_F (resp. de $L^1_{\mathcal{A}}$ dans L^1_F) est linéaire et continue; en outre $\|T\|_{\Phi} \leqslant \|f\|_1$ (resp. $\|T\|_1 = \|f\|_1$; [5], th. 1).

Il est aussi facile à voir que pour toute fonction $g \in L^{\infty}_C$ et tout champ de vecteurs $x \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ on a $T(gx) = gTx$ presque partout, donc l'application T de $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ dans L^{Φ}_F est décomposable [3]. Il existe alors un champ d'opérations $U_f \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ déterminé localement presque partout tel que pour tout $x \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ l'on ait $Tx(z) = U_f(z)x(z)$ presque partout et $N_{\infty}(U_f) = \|T\|_{\Phi}$ ([3], th. 1). D'autre part la restriction de T à $L^1_{\mathcal{A}}$ étant décomposable [8] et à valeurs dans L^1_F, et U_f étant determiné localement presque partout, on a aussi ([8], th. 1) $N_{\infty}(U_f) = \|T\|_1 = \|f\|_1$. On déduit en particulier que $\|T\|_{\Phi} = \|T\|_1$. Par suite l'égalité (5) peut s'écrire

$$\langle a, f(x)\rangle = \int \langle a, U_f(z)x(z)\rangle d\mu(z) \quad \text{pour} \quad a \in B \text{ et } x \in L^{\Phi}_{\mathcal{A}}, \tag{7}$$

et, comme pour $x \in L^1_{\mathcal{A}}$, Tx est intégrable, on a aussi

$$f(x) = \int U_f(z)x(z)d\mu(z) \quad \text{pour} \quad x \in L^1_a.$$

Pour l'évaluation de la norme de U_f remarquons qu'on a

$$\|U_f\|_{\Psi} = \sup_{|x|_{\Phi} \leqslant 1} \left\|\int U_f(z)x(z)d\mu(z)\right\| = \sup_{\substack{|x|_{\Phi} \leqslant 1 \\ \|a\| \leqslant 1}} |\langle a, f(x)\rangle|$$

$$= \sup_{\substack{\|a\| \leqslant 1 \\ |x|_{\Phi} \leqslant 1}} \left|\int \langle x(z), x'_a(z)\rangle d\mu(z)\right| = \sup_{\|a\| \leqslant 1} \|x'_a\|_{\Psi}$$

et de la relation (3) on béduit $\frac{1}{2}\|U_f\|_{\Psi} \leqslant \|f\|_{\Phi} \leqslant \|U_f\|_{\Psi}$. Ceci achève la démonstration.

Remarques. 1° Si μ est bornée, ou si $\delta > 0$, on a $L^{\Phi}_{\mathcal{A}} = L^1_{\mathcal{A}}$, donc l'intégrale de la formule de représentation est toujours forte.

2° Si la condition $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ n'est pas vérifiée, le théorème n'est plus vrai [9]. Toutefois le théorème reste valable si au lieu de $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ on considère l'adhérence X dans $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ de l'ensemble des champs bornés de $L^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

3° Si $E(z) = F = R$ pour tout $z \in Z$, on obtient le théorème dû à A. C. Zaanen [11], [12].

Bibliographie

[1] N. Bourbaki, *Intégration*, livre IV, chap. I-VI, Paris 1952.

[2] N. Dinculeanu, *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs I*, Rendiconti Accad. Naz. Lincei 22 (1957), p. 135-139.

[3] — *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs II. Fonctionnelles linéaires continues*, Rendiconti Accad. Naz. Lincei 22 (1957), p. 239-275.

[4] — *Spatii Orlicz de cîmpuri de vectori*, Studii si cercetări matematice 8 (1957), p. 343-412.

[5] — *Sur la représentation intégrale des certaines opérations linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris 245 (1957), p. 1203-1205.

[6] R. Godement, *Sur la théorie des représentations unitaires*, Annals of Math. 53 (1951), p. 68-124.

[7] I. Gelfand, *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*, Mat. Sbornik 4 (46) (1938), p. 68-124.

[8] C. T. Ionescu Tulcea, *Deux théorèmes concernant certains espaces de champs de vecteurs*, Bull. Sci. Math. 79 (1955), p. 106-111.

[9] М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий, *Линейные функционалы в пространствах Орлича*, Доклады А. Н. 97, No. 4 (1954), p. 581-584.

[10] W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B*, Bull. Intern. Acad. Polonaise, Classe A (1932), p. 207-220.

[11] A. C. Zaanen, *On a certain class of Banach spaces*, Annals of Math. 47 (1946), p. 654-666.

[12] — *Linear Analysis*, New York-Amsterdam 1953.

Reçu par la Rédaction le 7. 2. 1958