Let J_{2n+1} be a $(2n+1)$-dimensional space, composed of the real sequences $y = (a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1})$, under the norm

$$\|y_n\|_n = \sup_{k\leqslant n} \sup_{p_1<p_2<\ldots<p_{2k+1}} \Big(\sum_{i=1}^{k}(a_{p_{2i}} - a_{p_{2i-1}})^2 - a_{p_{2k+1}}^2\Big)^{1/2}.$$

Let $X = (J_3\times J_5\times\ldots)_{l^2}$ be a space of all sequences $x = (y_n)$, $y_n \epsilon J_{2n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, such that $\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|_n^2 < +\infty$, under the norm $\|x\| = \big(\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|_n^2\big)^{1/2}$.

The space X can be isomorphically imbedded[6]) in the space $Y = (c_0\times c_0\times\ldots)_{l^2}$ having an absolute basis. We conjecture that the space X has no absolute basis.

5.4. Let X be a separable Banach space. Are the following conditions equivalent:

(a) every bounded set in X is conditionally weakly compact,

(b) no subspace of X is isomorphic to l,

(c'') Y^* is separable?

Added in proof. In other way the results given in this paper can be obtained in a stronger form: for instance to the assertion of Theorem can be added the following equivalent condition:

(e) *The space Y^* is weakly complete.*

(See C. Bessaga and A. Pełczyński, *On subspaces of the space with an absolute basis*, Bull. Acad. Pol. Sci. 6 (1958), p. 313-315.)

Reçu par la Rédaction le 6. 8. 1957

---

[6]) *i. e.* the space X is isomorphic to a subspace of Y.

STUDIA MATHEMATICA, T. XVII. (1958)

Elliptizität und schwache Halbstetigkeit gewisser Funktionale der Variationsrechnung mehrfacher Integrale. Vollstetigkeit Greenscher Transformationen

von

K. MAURIN (Warszawa)

In dieser Abhandlung wird gezeigt wie man auf elementare Weise (Ehrlingsche Ungleichungen und Rellichscher Auswahlsatz) die Elliptizität einer wichtigen Klasse quadratischer Funktionale beweisen kann (§ 2). Diese Klasse umfaßt u. a. die Funktionale aus der Theorie der elastischen Platten und die von C. B. Morrey [12] in der Theorie der harmonischen Integrale eingeführten Formen.

Mit Hilfe derselben Schlußweise, aber mit Heranziehung der Kondraschewschen Sätze (und eines Kriteriums von E. Rothe) gelingt es die schwache Halbstetigkeit auch für eine gewisse Klasse nichtquadratischer Funktionale der Variationsrechnung mehrfacher Integrale und die Elliptizität ihrer zweiten Differentiale zu beweisen (§ 3).

Es wird weiter eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Annahme des absoluten Minimums für quadratische Funktionale, des im § 2 untersuchten Typus angegeben. Diese Funktionale können auch auf Funktionenräumen definiert sein, die gewissen allgemeinen, von Ehrling eingeführten Randbedingungen genügen. Unser Vorgehen ist elementar und umgeht die Theorie der selbstadjungierten Fortsetzungen (§ 4).

Im § 5 bringen wir einen einfachen Beweis für die Vollstetigkeit der Greenschen Transformationen. Unser Satz ist zugleich eine Verschärfung eines Satzes von Ehrling [1] und umfaßt einen vor kurzem publizierten Satz von L. Schwartz [16]. Durch die Anwendung dieses Satzes auf das im § 3 untersuchte zweite Differential eines Funktionals erhalten wir schließlich einen Eigenwertsatz, der eine weitgehende Verallgemeinerung eines auf anderem Wege von E. Rothe gewonnenen Satzes ([15], § 6) darstellt.

Um die Abhandlung leicht zugänglich zu machen sind im § 1 die benutzten Hilfsmittel in ihrem logischen Zusammenhang zusammengestellt.

Auf die schönen Abhandlungen von Ehrling [1] und P. D. Lax [9] hat mich — im Zusammenhang mit einer anderen Problemstellung — Prof. Lars Gårding aufmerksam gemacht, wofür ich ihm hier meinen herzlichen Dank ausspreche.

1. Definitionen und Hilfsmittel. Im folgenden bedeute Ω_n einen beschränkten Bereich des n-dimensionalen Raumes E^n. Es werden die folgenden Hilbertschen Räume benutzt:

$H_m = H_m(\Omega_n)$ sei die Vervollständigung der Menge der beliebig oft in Ω_n differenzierbaren Funktionen mit der durch das skalare Produkt

$$(u, v)_m \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{\Omega_n} \sum_{|\mu| \leqslant m} D^\mu u(x) \overline{D^\mu v(x)}\, dx \tag{1.1}$$

induzierten Norm: $\|u\|_m^2 = (u, u)_m$; $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ sei der Differentiationsindex:

$$D^\mu = \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1} \ldots \partial x_n^{\mu_n}}, \qquad |\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_n.$$

Man sagt: *die Elemente von H_m besitzen alle starke Ableitungen bis zur Ordnung m.* Man kann also (1.1) als Definition von $(u, v)_m$ für $u, v \in H_m$ ansehen, man betrachte nur $D^\mu u$, $D^\mu v$ als starke Ableitungen [17].

Wir führen noch folgende Bezeichnung ein:

$$|u|_m^2 \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{\Omega_n} \sum_{|\mu| = m} |D^\mu u|^2 dx$$

(unter dem Integralszeichen kommen *nur* Ableitungen m-ter Ordnung vor).

Der Raum $H_0(\Omega_n)$ ist also gleich $L^2(\Omega_n)$. $H_1(\Omega_n)$ ist, wie P. Szeptycki [18] gezeigt hat, gleich dem von Morrey und Calkin eingeführten Raume $\mathfrak{P}_2(\Omega_n)$.

Analog erhält man die Hilbertschen Räume der Vektorenfelder auf Ω_n, $u(x) = (u^1(x), \ldots, u^N(x))$, d. h. der in Ω_n definierten Funktionen mit Werten aus dem N-dimensionalen Raume E^N mit dem Skalarprodukt „$\cdot$":

$$(u, v)_m \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{\Omega_n} D^\mu u(x) \cdot D^\mu v(x)\, dx.$$

In den letzten Jahren spielen eine immer grössere Rolle die zu H_m dualen Räume $H'_m = H_{-m}(\Omega_n)$ (vgl. [8], [16]). Den Raum $H_{-m} = H'_m$ erhält man durch die Vervollständigung der Menge $C^\infty(\Omega_n)$ in der Norm

$$\|u\|_{-m} \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{v \in H_m} \frac{(u, v)_0}{\|v\|_m}.$$

Wenn B ein Unterraum von H_m ist, dann bedeutet B' die Vervollständigung von $C^\infty(\Omega_n)$ in der Norm

$$\|u\|_{-m, B} \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{v \in B} \frac{(u, v)_0}{\|v\|_m}. \tag{1.2}$$

Wir haben also die Inklusion: $B' \supset H_{-m}$.

Die Dualität der Räume H_m und H_{-m} — allgemeiner der Räume B und B' — wird durch $<, >_m$ bezeichnet:

$$<u, v>_0 = (u, v)_0 \quad \text{falls} \quad u, v \in H_0. \tag{1.3}$$

Da man die Elemente von H_l als Elemente des Raumes H_k, für $k < l$, betrachten darf, entsteht sofort die Frage nach der Injektion (Einbettung) $I_{l,k}$: $H_l(\Omega_n) \to H_k(\Omega_n)$. Es gilt der verallgemeinerte Rellichsche Auswahlsatz ([12], [16]):

(1.4) *Wenn Ω_n beschränkt ist, ist die Injektion $I_{l,k}$ für $k < l$ linear und vollstetig (kompakt), (k und l können beliebige — auch negative — ganze Zahlen sein).*

D. h. die lineare Transformation $I_{l,k}$ führt jede in H_l schwach konvergente Folge $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{H_l}$ in die stark in H_k konvergente Folge

$$v_n = I_{l,k} v_n \xrightarrow[n\to\infty]{H_k}$$

über. Daraus folgt das für uns wichtige

(1.5) Korollar. *Das Funktional $\|u\|_0^2$ ist auf H_m (für $m \geqslant 1$) schwach stetig.*

Um wichtige Relationen zwischen den Normen der Hilbert-Räume $H_m(\Omega_n)$ und $H_k(S_j)$ — wo S_j eine j-dimensionale Mannigfaltigkeit in Ω_n ist zu erhalten, um also gewisse integrale Ungleichungen herleiten zu können, macht man über Ω_n und S_j gewisse einschränkende Annahmen. Da diese Voraussetzungen nicht ganz einfach zu formulieren sind, werden wir sie nicht explicite angeben, sondern sie im folgenden die *Ehrlingschen Bedingungen* nennen (vergl. [1]).

Es gelten die folgenden Ehrlingschen Ungleichungen:

Wenn $u \in C^\infty(\overline{\Omega}_n)$, dann hat man für große positive t

$$\|u\|_k^2 = O(t^{-k/m})(t\|u\|_0^2 + |u|_m^2) \quad \text{für} \quad 0 \leqslant k \leqslant m; \tag{1.6}$$

$$|D^\mu u(x)| = O(t^{-c})(t\|u\|_0^2 + |u|_m^2), \quad \text{wo} \quad c = 1 - \frac{1}{2m}(n + 2|\mu|) \tag{1.7}$$

für $m \geqslant [n/2] + 1 + |\mu|$ und gleichmäßig für $x \in \overline{\Omega}_n$.

Man sieht, daß (1.6) auch für $u \in H_m(\Omega_n)$ gilt.

Aus (1.7) folgt das berühmte

(1.8) LEMMA VON SOBOLEW. *Wenn $m \geqslant [n/2]+1+|\mu|$, dann ist u $|\mu|$-mal stetig in $\overline{\Omega}_n$ differenzierbar*[1]).

(1.9) *Wenn Ω_n und S_j den Ehrlingschen Bedingungen genügen, dann ist*

$$\int_{S_j} |D^k u(x)|^2 dx = O\left(t - \frac{1}{2m}(n-j+2k)\right) t\|u\|_0^2 + |u|_m^2$$

für $m \geqslant [n/2]+1+k-j$.

Aus (1.9) folgt, daß wenn $u \subset H_m(\Omega_n)$, man u als Element von $H_k(S_j)$ betrachten kann. Diese Zuordnung nennt man *Injektion* (*Einbettung*). Die dritte Ehrlingsche Ungleichung (1.9) sagt u. a., daß diese Injektion eine stetige, lineare Transformation ist. Kondraschew hat darüber hinaus gezeigt, da sie sogar vollstetig (kompakt) ist.

Eine im Hilbertschen Raume H, das Skalarprodukt ist $(,)$, definierte quadratische Form $Q(u) \overset{\mathrm{df}}{=} (Au, u)$, $A = A^*$ heißt *elliptisch* (*Legendre'sch*), wenn $A = P+K$, wobei P positiv definit ist (d. h. $(Pu, u) \geqslant p(u, u)$; $p > 0$), und K vollstetig oder endlichdimensional (beide Definitionen sind gleichwertig, vgl. [5]).

(1.10) *Eine elliptische positive Form, d. h. $Q(u) > 0$ für $u \neq 0$, ist positiv definit.*

Die elliptischen Formen gehören zu der Klasse der von unten schwach halbstetigen Funktionale (s. h. s. u.). Das Funktional $I(u)$ ist h. s. u. im Punkte u_0, wenn

$$\lim_{\overline{u_n \to u_0}} I(u_n) = I(u_0).$$

Da die Kugel $K(0, R) \overset{\mathrm{df}}{=} \{u \in H: \|u\| \leqslant R\}$ im Hilbertschen Raume schwachkompakt ist, nimmt das von unten auf $K(0, R)$ s. h. Funktional $I(u)$ seine untere Grenze in einem Punkte $u_0 \in K(0, R)$ an: $\inf_{u \in K(0,R)} I(u) = I(u_0) < -\infty$, woraus die Wichtigkeit der s. h. s. u. Funktionale für die Variationsrechnung ersichtlich ist.

Das Rothesche Kriterium [14] besagt, daß die Bedingung $D^2(I(u; h, h)) \geqslant 0$, für alle $u \in K(0, R)$ und alle $h \in H$, wobei DI und $D^2 I$ das erste und zweite lineare Gateau-Differential bedeuten, für die schwache Halbstetigkeit von unten des Funktionals $I(u)$ hinreichend ist.

Im folgenden nennen wir das Funktional $I(u)$ *elliptisch*, wenn es die Summe einer positiv definiten, quadratischen Form und eines schwachstetigen Funktionals ist.

[1]) Die Ableitungen genügen sogar einer Hölderschen Bedingung mit *demselben* Exponenten und Konstanten. Aus dieser Bemerkung und (1.7) folgt also ein einfacher Beweis für die, zuerst von Kondraschew bewiesene, Vollstetigkeit der Injektion $H_m(\Omega_n) \to C^{|\mu|}(\overline{\Omega}_n)$.

2. Die Elliptizität quadratischer Funktionale in der Theorie der n-dimensionalen, elastischen Platten (Ehrlingsche Funktionale). In diesem Abschnitt betrachten wir eine wichtige, zuerst von G. Ehrling untersuchte Klasse quadratischer Funktionale. Diese Klasse umfaßt die Funktionale aus der Theorie der elastischen Platten, welche K. Friedrichs in seiner klassischen Abhandlung [2] im Zusammenhang mit den Rand- und Eigenwertsaufgaben der Plattentheorie eingeführt hat. Wir beweisen den

SATZ 1. *Es sei*

(2.1)

$$\begin{aligned} I(u) \overset{\mathrm{df}}{=} & \int_{\Omega_n} \sum_{|\mu|,|\nu| \leqslant m} a_{\mu\nu}(x) D^\mu u D^\nu \overline{u}\, dx + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{S_j} \sum_{|\alpha|,|\beta| < m-(n-j)/2} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta \overline{u}\, dx + \\ & + \int_{\overline{\Omega}_n} \sum_{|\alpha|,|\beta| < m-n/2} a^0_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta \overline{u}\, d\mu(x) + \\ & + \int_{\Omega_n} \sum_{|\mu| \leqslant m} b_\mu(x) D^\mu \overline{u}\, dx + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{S_j} \sum_{|\alpha| < m-(n-j)/2} b^j_\alpha(x) D^\alpha \overline{u}\, dx + \\ & + \int_{\overline{\Omega}_n} \sum b^0_\beta(x) D^\beta \overline{u}\, d\mu(x) \quad \langle c, u\rangle_m, \quad |\beta| < m - n/2. \end{aligned}$$

Von den Koeffizienten sei folgendes vorausgesetzt:

1° $a_{\mu\nu}$, $a^j_{\alpha\beta}$, b_μ, b^j_α $(j = 0, \ldots, n-1)$ *seien meßbar und beschränkt auf $\overline{\Omega}_n$, bzw. auf S_j;*

2° *Die drei ersten Glieder bilden eine quadratische Form $Q(u)$;*

3^0_1 $\sum_{|\mu|=|\nu|=m} a_{\mu\nu}(x)\xi^\mu \overline{\xi}^\nu \geqslant c_1 \sum |\xi^\mu|^2$, *wo ξ^μ beliebige komplexe Zahlen bedeuten.*

(Man kann von der Form

$$a_m(f, g) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{\Omega_n} \sum_{|\mu|=|\nu|=m} a_{\mu\nu}(x) D^\mu f D^\nu \overline{g}\, dx$$

viel weniger verlangen, aber man muß dann den Raum der zugelassenen Funktionen f, g einschränken:

$3'^0_1$ *Die Form $a_m(f, g)$ soll auf dem Raum V — wo $C_0^\infty(\Omega_n) \subset V \subset C^m(\overline{\Omega}_n)$ — koerziv sein (vgl. [20]). Bekanntlich sind gleichmäßig elliptische (und im Falle der Systeme gleichmäßig starkelliptische) Formen koerziv auf $C_0^m(\Omega_n)$ (vgl. [5]).*

4° $\|\mu\|$, $\|\mu_1\| < \infty$.

These. *Das Funktional $I(u)$ ist elliptisch.*

Beweis. Aus (1.6), (1.7) und (1.8) folgt, daß man $I(u)$ in der folgenden Gestalt schreiben kann:

$$I(u) = Q(u) + (b, u)_m, \qquad u \in H_m(\Omega_N);$$

dabei ist b das eindeutig bestimmte Element des Raumes $H_m(\Omega_n)$. Aus der ersten Ehrlingschen Ungleichung folgt wiederum, daß es ein solches positives t_0 gibt, daß

$$Q_{t_0}(u) \stackrel{\mathrm{df}}{=} Q(u) + t_0\|u\|_0^2 \geqslant c\|u\|_m^2, \qquad c > 0,$$

d. h. Q_{t_0} ist positiv definit in H_m, d. h. $Q(u) = Q_{t_0}(u) - t_0\|u\|_0^2$.

Wir können also $I(u)$ in folgender Form schreiben:

$$I(u) = Q_{t_0}(u) + [(b, u)_m - t_0\|u\|_0^2];$$

die Formen $(b, u)_m$ und $t_0\|u\|_0^2$ sind aber schwachstetig in H_m (vgl. (1.5)), woraus unsere Behauptung folgt, w. z. b. w.

Bekanntlich ist im allgemeinen die Positivität einer quadratischen Form viel leichter als ihre positive Definitheit zu zeigen. Da in den direkten Methoden der Variationsrechnung und in der Theorie der linearen elliptischen Differentialgleichungen positiv definite Formen eine wichtige Rolle spielen, wird folgendes Korollar von Satz 1 wohl von Nutzen sein (vgl. z. B. [10], [17]):

KOROLLAR. *Wenn $Q(u) > 0$ für $u \neq 0$, dann gibt es eine solche Konstante $q > 0$, daß $Q(u) \geqslant q\|u\|_m^2$.*

Man könnte auf differenzierbaren Riemannschen Mannigfaltigkeiten Ω_m ähnliche Formen auf dieselbe Weise behandeln. Ein Spezialfall von ihnen ($m = 1$) sind die von C. B. Morrey in der Theorie der harmonischen Felder untersuchten Formen. Unser Satz umfaßt damit auch einige Sätze von C. B. Morrey [11].

§ 3. Die Halbstetigkeit einer allgemeineren Klasse von Funktionalen. Da die Summe von halbstetigen und stetigen Funktionalen wieder halbstetig ist, können wir mit obiger Schlußweise unter Heranziehung des Rotheschen Kriteriums die schwache Halbstetigkeit gewisser nichtquadratischer Funktionale beweisen.

SATZ 2. *Es sei*

$$(3.1) \qquad I(u) = \int_{\Omega_n} F(x, u, D^1u, D^2u, \ldots, D^m u)\,dx + \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{S_j} F_j(x, u, D^1u, \ldots, D^{k_j}u)\,dx + \int_{\bar{\Omega}_n} F_0(x, u, D^1u, \ldots, D^{k_0}u)\,d\mu(x),$$

wobei Ω_n, S_j den Bedingungen von Kondraschew und Ehrling genügen: $w_i < m - \frac{1}{2}(n-i)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Die Integranden genügen jetzt den folgenden Voraussetzungen:

1° *Die zweiten Ableitungen*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial(D^\alpha u)\partial(D^\beta u)}, \qquad |\alpha|, |\beta| \leqslant m,$$

sind in $\Omega_n \times \{u \in H_m : \|u\|_m \leqslant R\} = \Omega_n \times K(0, R)$ gleichmäßig beschränkt.

2_1° *Die Form*

$$(3.2) \qquad \sum_{|\mu|=|\nu|=m} \frac{\partial^2 F(\ldots)}{\partial(D^\mu u)\partial(D^\nu u)} \varrho^\mu \varrho^\nu \geqslant c \sum_\nu |\varrho^\nu|^2, \qquad c > 0,$$

in $\Omega_n \times K(0, R)$.

(Im Falle von Vektorfunktionen ersetzen wir diese Bedingung durch folgende:

$$2_N^{\circ} \quad \sum_{\substack{i,j=1 \\ |\mu|=|\nu|=m}} \frac{\partial^2 F(\ldots)}{\partial(D^\mu u^i)\partial(D^\nu u^j)} \eta_i \eta_j \varrho^\mu \varrho^\nu \geqslant c \sum_{i=1}^N \eta_i^2 \sum_\nu |\varrho^\nu|^2).$$

3° *Die Funktion F_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ genügt in bezug auf $u, \ldots, D^{k_i}u$ einer*

(3.3) *Lipschitzschen Bedingung.*

These. 1° *Das zweite Differential $D^2I(u; h, h)$ ist in $u \in K(0, R)$ elliptisch.*

2° *Das Funktional $I(u)$ ist in $K(0, R)$ von unten halbschwachstetig.*

Beweis. Aus dem Satze von Kondraschew folgt die schwache Stetigkeit der weiteren Glieder des Funktionals $I(u)$. In der Tat führt die Injektion $I_{m,k_j}: H_m(\Omega_n) \to H_{k_j}(S_j)$ jede schwach in $H_m(\Omega_n)$ konvergente Folge

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{H_m} u_0$$

in die stark in $H_{k_j}(S_j)$ konvergente Folge

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{H_{k_j}(S_j)} u_0$$

über.

Aus (3.3) und der Schwarzschen Ungleichung folgt die behauptete schwache Stetigkeit. Es genügt also die schwache Halbstetigkeit des ersten Integrals $I^1(u)$ zu beweisen. Wegen (1.5) genügt es aber, die Halbstetigkeit des modifizierten Funktionals

$$I_{t_0}^1(u) \stackrel{\mathrm{df}}{=} t_0(u, u)_0 + I^1(u) = t_0\|u\|_0^2 + I^1(u)$$

für genügend große $t_0 > 0$ zu zeigen.

Dazu berechnen wir das zweite Differential von $I^1_{t_0}$:

$$D^2 I^1_{t_0}(u;h,h) = 2t_0(h,h)_0 + \int\limits_{\Omega_n} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} \frac{\partial^2 F}{\partial(D^\alpha u)\partial(D^\beta u)} D^\alpha h D^\beta h dx.$$

Aus unseren Voraussetzungen und den Ehrlingschen Ungleichungen folgt

$$D^2 I^1_{t_0}(\mathring{u};h,h) \geqslant c_2\|h\|^2_m, \quad c_2>0,$$

also ist $D^2I^1(\mathring{u};h,h)$ elliptisch und nach dem Rotheschen Kriterium ist $I^1(u)$ schwach halbstetig nach unten, w. z. b. w.

Bemerkung. Man sieht leicht, daß die obige Schlußweise auch unter anderen Voraussetzungen anwendbar ist. Es genügt z. B. statt (3.3), daß die Funktion $F_i(x, y_1, \ldots, y_i)$ eine stetige Abbildung von

$$\underbrace{L^2(S_i)\times\ldots\times L^2(S)}_{p_i\text{-mal}}$$

in den Raum $L^2(S_i)$ induziert.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Stetigkeit dieses s. g. Operators von Niemytzki (vgl. [18], s. 213-214) sind wohl bekannt.

In folgenden Abschnitten geben wir Anwendungen von Satz 1 auf das Problem des Minimums eines quadratischen Funktionals (2.1) (das auch auf einem Unterraum B von H_m (§ 4) definiert sein kann) und auf das Eigenwertsproblem (§ 5) an.

§ 4. Das absolute Minimum des Funktionals (2.1). Seit der fundamentalen Abhandlung von Friedrichs ([3], [4]) geht man in den direkten Methoden und auch bei Näherungsverfahren der Variationsrechnung quadratischer Funktionale meistens so vor, daß man das Funktional $Q(u)$ als quadratische Form in einem Unterraum von $L^2(\Omega_n) = H_0(\Omega_n)$ betrachtet und es in der Gestalt $Q(u) = (Tu, u)_0$, $u \in D(T)$ schreibt. Auf diese Weise hat man es mit einem *unbeschränkten* Operator T zu tun. Um die Existenz des minimalen Elementes u_0 zu zeigen, setzt man den Operator zu einem selbstadjungierten Operator $\tilde{T}$ fort (Friedrichssche Fortsetzung) und zeigt, daß dieser Operator $\tilde{T}$ den ganzen Raum H_0 als Wertevorrat hat. Diese Prozedur ist von der Theorie der Differentialgleichungen gesteuert: der Operator T ist der Euler-Lagrange'sche Operator. Die Randbedingungen werden in den Definitionsbereich $D(\tilde{T})$ des Operators $\tilde{T}$ mit einbezogen.

Bei diesem Verfahren muß man zuerst die *positive Definitheit des Operators* T zeigen, was bekanntlich recht unbequem ist.

Wir schlagen hier einen anderen Weg ein, der einfacher zum Ziele führt. Unsere Methode erlaubt eine recht umfangreiche Klasse von Funktionalen zu behandeln, nämlich die im Abschnitt 2 betrachteten, die auch auf Funktionenräumen definiert sein können, die gewissen allgemeinen Randbedingungen genügen. Diese Funktionale lassen sich im allgemeinen *nicht* auf die Form $(Tu, u)_0 - (c, u)_0$ zurückführen. Die Theorie der selbstadjungierten Fortsetzungen wird hier nicht benutzt.

Wir schreiben das Funktional (2.1) gleich in der kompakten Form $I(u) = (Au, u)_m - 2(b, u)_m$ $\left((Au, u) \overset{\text{df}}{=} Q(u)\right)$ und beweisen den folgenden

Satz 3. 1° *Das Funktional* (2.1) *nimmt für jedes $b \in H_m$ das absolute Minimum $>-\infty$ dann und nur dann an, wenn $Q(u) = (Au, u)_m > 0$ für $u \neq 0$ gilt. Das einzige minimale Element u_0*

$$\inf_{u\in H_m} I(u) = I(u_0)$$

genügt der Gleichung

$$Au_0 = b, \quad d.\,h. \quad u_0 = A^{-1}b,$$

$$\inf_{u\in H_m} I(u) = -(b, u_0)_m = -(b, A^{-1}b)_m.$$

2° *Falls $Q(u)$ auch negative Werte annimmt, dann ist*

$$\inf_{u\in H_m} I(u) = -\infty.$$

3° *Falls $Q(u) \geqslant 0$ und der Unterraum*

$$H^0_m \overset{\text{df}}{=} \{u\in H_m : Q(u) = (Au, u)_m = 0\} \neq \{0\}$$

sich nicht auf das Nullelement reduziert, nimmt das Funktional $I(u)$ das absolute Minimum $>-\infty$ dann und nur dann an, wenn $b\in H_m \ominus H^0_m$.

Beweis. *Ad* 2°. Es sei $(Av_0, v_0)_m < 0$, wir haben dann

$$I(nv_0) = n^2(Av_0, v_0)_m - 2n(b_0, v_0)_m \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty,$$

w. z. b. w.

Ad 3°. Es sei $(Au, u)_m \geqslant 0$ und $b \notin H_m \ominus H^0_m$. Es gibt also ein solches Element $0 \neq v_0 \in H^0_m$, daß $(b, v_0)_m > 0$. Man hat also

$$I(nv_0) = -2n(b, v_0)_m \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty.$$

Damit haben wir gezeigt, daß die Bedingungen 1° und 3° notwendig sind.

Es sei also $Q(u) > 0$ für $u \neq 0$. Wegen (2.2) haben wir $Q(u) = (Au, u)_m \geqslant q(u, u)_m$, wobei $q > 0$.

Der Operator $A = A^*$ ist hermitesch und *positiv definit* und damit vollständig umkehrbar: die Gleichung $Au = b$ ist für jedes b eindeutig auflösbar. Es sei $u_0 = A^{-1}b$.

Für jedes $u \in H_m$ haben wir wegen

$$I(u) = \big(A(u-u_0), (u-u_0)\big)_m - (Au_0, u_0)_m$$
$$\geqslant -(Au_0, u_0)_m = -(b, u_0)_m;$$
$$\inf_{u \in H_m} I(u) = -(b, u_0)_m = -(b, A^{-1}b)_m.$$

Die Bedingung 1° ist also auch hinreichend.

Wir zeigen jetzt, daß die Bedingung 3° hinreichend ist.

Es sei $b \in H_m \ominus H_m^0 = H_m^+$. Wegen der Elliptizität der Form Q ist die Form Q auf dem Unterraume H_0 positiv definit. Es sei A^+ die Einschränkung des Operators A auf den Unterraum H_m^+. Da der Operator A^+ positiv definit ist, zeigen wir wie oben

$$-\infty < \operatorname*{Inf}_{u \in H_m^+} Iu = -\big(b, (A^+)^{-1}b\big)_m \leqslant 0.$$

Da $u = u^+ + u^0$, wobei $u^0 \in H_m^0$, $u^+ \in H^+$, $Au^0 = 0$, haben wir $I(u) = I(u^+ + u^0) = (Au^+, u^+)_m - 2(b, u^+)_m$. Also ist

$$\operatorname*{Inf}_{u \in H_m} I(u) = \operatorname*{Inf}_{u \in H_m^+} I(u) = -\big(b, (A^+)^{-1}b\big)_m \leqslant 0,$$

w. z. b. w.

Auf diese Weise ist der Satz 3 vollständig bewiesen.

Wir führen jetzt mit Ehrling den Unterraum B ein: $L \subseteq B \subseteq H_m$, wobei L die Vervollständigung der Menge $C_0^\infty(\Omega_n)$ — des Raumes beliebig oft differenzierbarer Funktionen mit kompakten Trägern in Ω_n — in der $\| \|_m$-Norm ist. (Wie man weiß, hat man im Falle eines regulären Randes $\partial\Omega_n$ von Ω_n für die Elemente aus L

$$D^\mu u|_{\partial\Omega_n} = 0 \quad \text{für} \quad |\mu| = 0, 1, \ldots, n-1.)$$

Man sagt, daß die Elemente von B *allgemeinen homogenen Randbedingungen genügen.*

Wir haben jetzt die folgende orthogonale Zerlegung des Raumes H_m: $H_m = B \oplus B^\perp$.

Es sei $b = b_1 + b_2$, wobei $b_1 \in B$, $b_2 \in B^\perp$. Die Einschränkung des Funktionals I auf den Unterraum B bezeichnen wir mit I_B. Da $(b, u)_m = (b_1, u)_m$ für $u \in B$ ist, haben wir

$$I_B(u) = (A_1 u, u)_m - 2(b_1, u), \qquad u, b_1 \in B.$$

A_1 ist die Einschränkung des Operators A auf den Unterraum B:

$$\big(Q(u) \underset{u \in B}{\equiv} (A_1 u, u)_m\big).$$

Jetzt hat B die Rolle des Raumes H_m übernommen. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 4. *Damit das Funktional*

$$I_B(u) = Q(u) - 2(b, u)_m = (A_1 u, u)_m - 2(b_1, u)_m$$

(wo $u, b_1 \in B$) das absolute Minimum $\operatorname{Inf} I_B(u) > -\infty$ *annimmt ist nötig, daß $Q(u) \geqslant 0$ für $u \in B$. Wenn*

$$B^0 \overset{\text{df}}{=} H_m^0 \cap B = \{u \in B : Q(u) = 0\} \neq \{0\},$$

ist für die Annahme der unteren Grenze von I_B ausreichend, daß ausserdem b orthogonal zu B_0 ist.

§ 5. Vollstetigkeit Greenscher Transformationen und das Vibrationsproblem. Jetzt werden wir einen einfachen Beweis einer Verschärfung des Satzes von Gårding-Ehrling (vgl. [5], [1]) angeben. Über die Form $Q(u)$ machen wir nur die Voraussetzungen 1° und 3° von Satz 1: $Q(u)$ ist nicht hermitesch, nur das Glied mit den höchsten Ableitungen ist symmetrisch und gleichmäßig elliptisch. Es sei

$$a(u, v; t) \overset{\text{df}}{=} \int_{\Omega_n} \sum_{|\mu|, |\nu| \leqslant m} a_{\mu\nu}(x) D^\mu u D^\nu \bar{v}\, dx + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{S_j} \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta}^j(x) D^\alpha u D^\beta \bar{v}\, dx + \\ + \int_{\Omega_n} \sum a_{\alpha\beta}^0(x) D^\alpha u D^\beta \bar{v}\, d\mu(x) + t(u, v)_0.$$

Satz 5. 1° *Für genügend große $t > 0$ ist die durch die Identität*

(5.1) $$\langle u, v \rangle_m = a(G_t^m u, v; t),$$

wobei v, $G_t^m u \in B$, $u \in B' \supseteq H_{-m}$ (wegen der Definition von B' vgl. (1.2)) *definierte Greensche Transformation G_t^m vollstetig, betrachtet sowohl als Abbildung $H_s \to B$ (insbesondere also als Operator in B) als auch als G_t^m: $H_s \to H_p$, wobei $s > -m$, $p \leqslant m$.*

2° *Falls $a(u, v, 0)$ hermitisch in H_m ist, besitzt das Vibrationsproblem*

(5.2) $$a(u_\lambda, \varphi; 0) \underset{\varphi \in B}{\equiv} \lambda \langle u_\lambda, \varphi \rangle_m$$

und der Operator G_t^m dieselben Eigenvektoren; dabei entspricht dem Eigenwert λ des Vibrationsproblems der Eigenwert $(\lambda + t)^{-1}$ der Greenschen Transformation G_t^m.

3° *Die Eigenwerte λ_n konvergieren gegen $+\infty$, es gibt also höchstens endlich viele λ_n, die negativ sind.*

4° *Die zu verschiedenen Eigenwerten λ_i, λ_k gehörenden Eigenvektoren $u_{\lambda_i}, u_{\lambda_k}$ sind orthogonal, sowohl nach dem Skalarprodukt $a(u_i, u_k; t) \underset{t}{\equiv} 0 = (u_i, u_k)_0$, als auch nach $(,)_0$.*

5° *Die Eigenwektoren sind in den Räumen B, H_0, B' vollständig.*

Beweis. *Ad* 1°. Wegen der Ungleichungen

$$|\langle u, v\rangle_m| \leqslant \|u\|_{-m}\|v\|_m \leqslant \|u\|_m \cdot \|v\|_m,$$

$$d^{-1}\|v\|_m^2 \leqslant a(v, v; t),$$

$$|a(v, w; t)| \leqslant d\|v\|_m\|w\|_m, \qquad d > 0,$$

wissen wir aus dem Satze von P. D. Lax - A. Milgram [9], daß die Abbildung $G_t^m: B' \to B$ ein topologischer Isomorphismus ist.

Wegen des Rellichschen Auswahlsatzes (1.4) folgt die Behauptung aus dem Diagramm

$$H_s \xrightarrow{I_{s,-m}} B' \xrightarrow{G_t^m} B \xrightarrow{I_{m,k}} H_k.$$

Ad 2°. Die Behauptung folgt aus den Identitäten (5.1), (5.2):

$$a(u_\lambda, \varphi; t) = (\lambda + t)\langle u_\lambda, \varphi\rangle_m = a\big(G_t^m(\lambda+t)u_\lambda, \varphi; t\big).$$

Ad 3°. Da die Form $Q(u) = a(u, u; 0)$ elliptisch ist, folgt aus der Identität $a(u_\lambda, u_\lambda; 0) = \lambda\langle u_\lambda, u_\lambda\rangle_m = \lambda(u_\lambda, u_\lambda)_0$, daß höchstens endlich viele Eigenwerte λ negativ sein können. Aus dem Rellichschen Spektralsatz folgt die Behauptung.

Ad 4°. Aus der Symmetrie des Greenschen Operators G_t^m folgt, daß

$$0 = (\lambda_i + t)a(u_{\lambda_i}, u_{\lambda_k}; t) = a(G_t^m u_{\lambda_i}, u_{\lambda_k}; t)$$

$$= \langle u_{\lambda_i}, u_{\lambda_k}\rangle_m = (u_{\lambda_i}, u_{\lambda_k})_0$$

Ad 5°. Folgt aus dem Rellichschen Spektralsatz, da $(\lambda+t)^{-1} \neq 0$, und den Definitionen von B, B', H_0.

§ 6. Der Spektralsatz für das zweite Differential des Funktionals (3.1). Der Satz 2 besagt, daß das zweite Differential $D^2I(u; h, h) = Q(h)$ ein quadratisches elliptisches Funktional ist, wir können also für dieses den Spektralsatz 5 aussprechen. Auf diese Weise bekommen wir eine weitgehende Verallgemeinerung eines vor kurzem publizierten Satzes von E. Rothe [14]:

SATZ 6. *Für das zweite Differential $D^2I(u; h, h)$ des im § 3 betrachteten Funktionals gilt der Spektralsatz* 5.

D. h., z. B., die Eigenwerte λ_i des Eigenwertsproblems

$$D^2I(\mathring{u}; h_i, h_i) = \lambda_i < h_{\lambda_i}, h_{\lambda_i} >_m = \lambda_i(h_{\lambda_i}, h_{\lambda_i})$$

konvergieren gegen $+\infty$. Die Eigenvektoren (h_{λ_j}) bilden eine vollständige Menge sowohl im Raume B, als auch in $L^2(\Omega_n)$ und $B' \supseteq H_m$.

Zitatennachweis

[1] G. Ehrling, *On a type of eigenvalue problems for certain differential operators*, Math. Scand. 2 (1954), S. 267-285.

[2] K. Friedrichs, *Die Rand- und Eigenwertsprobleme aus der Theorie der elastischen Platten*, Math. Ann. 98 (1928), S. 206-247.

[3] — *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren*, ibidem 109 (1934), S. 465-487.

[4] — *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Zweiter Teil*, ibidem 109 (1934), S. 685-713.

[5] L. Gårding, *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations*, Math. Scand. 1 (1953), S. 237-255.

[6] Hestens, *Applications of the theory of quadratic forms in Hilbert space to the calculus of variations*, Pacific J. Math. 1 (1951), S. 525-581.

[7] L. van Hove, *Sur le signe de la variation seconde des intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues*, Acad. Belg. Cl. des Sc. Mémoires 24 (1949), fasc. 5, S. 1-68.

[8] P. D. Lax, *On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations*, Comm. Publ. Appl. Math. 8 (1955), S. 615-633.

[9] — and A. N. Milgram, *Parabolic equations — Contributions to the theory of partial differential equations*, Ann. Math. Studies 33 (1954), S. 167-190.

[10] K. Maurin, *Bemerkungen über die Methoden von Trefftz und Ritz*, Bull. Ac. Pol. Sc., Cl. III, 3 (1955), S. 573-577.

[11] С. Г. Михлин, *Проблема минимума квадратичного функционала*, Москва 1952.

[12] C. B. Morrey, *A variational method in the theory of harmonic integrals*, Comm. Pure and Appl. Math. 9 (1956), S. 499-508.

[13] F. Rellich, *Ein Satz über mittlere Konvergenz*, Gött. Nachr. Math.-Phys. Kl. 1930, S. 30-35.

[14] E. Rothe, *A note on Banach spaces of Calkin and Morrey*, Pacific J. Math. 3 (1953), S. 493-499.

[15] — *Remarks on the application of gradient mappings to the calculus of variations and the connected boundary value problems in partial differential equations*, Comm. Pure and Appl. Math. 9 (1956), S. 551-568.

[16] L. Schwartz, *Séminaire Schwartz* 3, Paris 1955/56.

[17] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Ленинград 1950.

[18] P. Szeptycki, *On the identity of Morrey-Calkin and Schauder-Sobolev spaces*, Studia Math. 15 (1956), S. 123-128.

[19] М. Вайнберг, *Вариационные методы исследования нелинейных операторов*, Москва 1956, S. 219-224.

Reçu par la Rédaction le 28. 9. 1957