Sur un problème des forces et des moments exercés sur un obstacle par un fluide visqueux compressible

(Complément aux mémoires précédents)

par

A. KRZYWICKI (Wrocław)

Le problème des forces exercées sur un obstacle par un fluide visqueux compressible, dans le cas du mouvement plan et du mouvement spatial, a été déjà considéré dans les travaux précédents [1]-[3]. J'y ai admis que le fluide remplit tout le plan (ou l'espace) à l'extérieur de l'obstacle. Je me suis borné à un mouvement bien particulier de l'obstacle, le mouvement rectiligne de translation uniforme. Le but de cette note est le suivant: extension des formules obtenues dans les travaux cités à un mouvement quelconque de translation de l'obstacle, et, en particulier, à un mouvement quelconque de rotation; démonstrations des formules sur le moment des forces dans le cas du mouvement plan et, finalement, démonstration d'une formule relative à une composante du moment des forces dans le cas du mouvement de rotation spatial. L'hypothèse principale sur la vitesse du fluide à l'infini, de même que dans les travaux cités, est la suivante: l'énergie cinétique du fluide est finie. Dans la I[ère] partie je m'occupe du mouvement plan, dans la II[ème] — j'étudie le mouvement spatial.

I. Mouvement plan. Nous considérons le mouvement plan d'un fluide visqueux compressible remplissant tout le plan à l'extérieur d'une courbe fermée, bornée S qui est animée d'un mouvement quelconque sans se déformer. Soit XY un système rectangulaire lié à la courbe S, parallèle à un système immobile X^*Y^*; l'axe X soit dirigé suivant le vecteur $\overline{u}_0$ de la vitesse instantanée de l'origine O du système XY. Le mouvement de la courbe S est défini par les fonctions $u_0(t)$, $v_0(t)$ — les composantes de $\overline{u}_0$ par rapport à X^*Y^* — et $\omega(t)$; $\omega(t)$ désigne la vitesse angulaire instantanée de rotation de S. Nous admettons que la courbe S admet partout une tangente continue et que les fonctions $u_0(t)$ et $\omega(t)$ ont une dérivée continue. Étant donné que nos considérations concernent un instant fixé t, nous écrirons brièvement: u_0, ω (au lieu de $u_0(t)$, $\omega(t)$).

Soient: $\overline{u}(x, y, t)$ le vecteur de la vitesse absolue du fluide à l'instant t au point (x, y), x, y désignent les coordonnées dans XY; $u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$ les composantes de la vitesse par rapport au système immobile X^*Y^*; $\overline{u}_e(x, y, t)$ le vecteur de la vitesse d'entraînement, $\overline{\omega}(t)$ — le vecteur de la vitesse angulaire; $\overline{F}(x, y, t)$ — le vecteur des forces extérieures; $p(x, y, t)$ et $\varrho(x, y, t)$ — la pression respectivement la densité du fluide, μ et ν — les coefficients de viscosité du fluide. En utilisant le symbole ∇ et en posant $\Theta = \operatorname{div}\overline{u}$, les équations du mouvement et l'équation de continuité prendront la forme suivante:

$$\varrho\left\{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+[(\overline{u}-\overline{u}_e)\nabla]\overline{u}+\overline{\omega}\times\overline{u}\right\}=\varrho\overline{F}-\nabla p+\nu\nabla\Theta+\mu\Delta\overline{u},$$

(1)

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\operatorname{div}[(\overline{u}-\overline{u}_e)\varrho]=0.$$

Nous admettons qu'à l'instant t les hypothèses suivantes sont satisfaites:

(I) *le fluide adhère à la courbe S; on aura donc en chaque point de cette courbe $u = u_e = u_0-\omega y$, $v = v_e = \omega x$;*

(II) *l'énergie cinétique du mouvement du fluide est finie:*

$$E=\frac{1}{2}\iint\varrho\overline{u}^2\,d\sigma<+\infty, \tag{2}$$

l'intégration étant étendue à tout le plan à l'extérieur de la courbe S;

(III) *il existe une suite a_n de nombres positifs, indéfiniment croissante, et un nombre positif C tels que*

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{a_n}^{8a_n}\varrho r\,dr\leqslant Ca_n^2,\qquad \int_0^{2\pi}d\varphi\int_{a_n}^{8a_n}\varrho^{-1}r\,dr\leqslant Ca_n^2,$$

r et φ désignant les coordonnées polaires par rapport au système XY;

(IV) *les fonctions u, v, p, ϱ et leurs dérivées qui figurent dans* (1) *sont continues.*

THÉORÈME 1. *Si à l'instant t les conditions* (I)-(IV) *sont remplies et la courbe S se déplace d'un mouvement instantané de translation, c'est-à-dire $\omega = 0$, les composantes de la force exercée sur S par le fluide s'expriment par les formules*

$$P_x=-\lim_{n\to\infty}\left[\iint_{H_{r_n}}\left\{\frac{\partial(\varrho u)}{\partial t}-\varrho F_x\right\}d\sigma+r_n\int_{K_{r_n}}\left\{\frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t}-\varrho F_\varphi\right\}\sin\varphi\,ds\right], \tag{3}$$

$$(4)\quad P_y = -\lim_{n\to\infty}\left[\iint\limits_{H_{r'_n}}\left\{\frac{\partial(\varrho v)}{\partial t}-\varrho F_y\right\}d\sigma - r'_n\int\limits_{K_{r'_n}}\left\{\frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t}-\varrho F_\varphi\right\}\cos\varphi\, ds\right],$$

où r_n et r'_n désignent des suites convenablement choisies, indéfiniment croissantes, à termes positifs, H_{r_n} — la région contenue entre la courbe S et le cercle K_{r_n} de rayon r_n et de centre à l'origine du système XY; u_r et u_φ — les composantes radiale resp. transversale de la vitesse absolue du fluide; il en est de même pour F_r et F_φ.

La démonstration des formules (3) et (4), où l'on admet $\overline{F} = 0$, est identique à celle du premier théorème du travail [1]; en tenant compte des forces extérieures il convient de procéder à une légère modification.

Il en est de même pour le théorème démontré dans la 2ème partie du travail [1], qui prendra maintenant la forme suivante:

THÉORÈME 2. *Si à l'instant t les conditions* (I)-(IV) *sont satisfaites, $\omega = 0$ et de plus*

(V) *le fluide est homogène et l'équation caractéristique est de la forme* $\varrho = \text{const}\ p^\lambda$ $(0 \leqslant \lambda < 1)$,

(VI) *les fonctions u_r, p et Θ sont bornées,*

il existe une suite r_n indéfiniment croissante de nombres positifs telle que

$$(5)\quad u_0P_x = -\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial E_{r_n}}{\partial t}+D_{r_n}+k\iint\limits_{H_{r_n}}\frac{p}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,d\sigma - \iint\limits_{H_{r_n}}\varrho(uF_x+vF_y)\,d\sigma - \right.$$

$$\left.-u_0(k-1)r_n\int\limits_{K_{r_n}}\left\{\frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t}-\varrho F_\varphi\right\}\sin\varphi\, ds\right],$$

où

$$D_r = \iint\limits_{H_r}\left\{\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\nu\Theta^2\right\}d\sigma,$$

$$E_r = \frac{1}{2}\iint\limits_{H_r}\varrho\overline{u}^2\,d\sigma;\qquad k = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Des démonstrations analogues à celles des théorèmes précédents ne s'appliquent pas dans le cas $\omega \neq 0$; néanmoins, dans ce cas, on peut déduire une formule pour le moment M des forces exercées sur la courbe S par rapport au centre instantané de rotation de S; dans ce but, plaçons l'origine du système mobile XY à ce centre.

THÉORÈME 3. *Si à l'instant t les conditions* (I)-(IV) *du théorème* 1 *sont satisfaites et le mouvement de la courbe S n'est pas une translation, c'est-à-dire $\omega \neq 0$, le moment M s'exprime par la formule*

$$(6)\quad M = -2\mu\omega a - \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{H_{r_n}} r\left\{\frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t}-\varrho F_\varphi\right\}d\sigma,$$

où a désigne l'aire du domaine intérieur à S et r_n est une suite convenablement choisie, indéfiniment croissante, de nombres positifs.

Démonstration. Formons les produits scalaires des deux membres de l'équation du mouvement (1) par le vecteur $(-y, x)$, ajoutons l'équation obtenue à l'équation de continuité multipliée par $xv-yu = ru_\varphi$ et intégrons la somme obtenue sur H_r. Or, nous avons l'identité évidente

$$x\Delta v = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial v}{\partial x},$$

et de même pour l'expression $y\Delta u$; en tenant compte de ces identités et en appliquant plusieurs fois la formule de Green, nous obtenons la relation

$$\iint\limits_{H_r} r\frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t}\,d\sigma - \int\limits_{K_r}\varrho(xv-yu)\{(u-u_e)n_x+(v-v_e)n_y\}\,ds$$

$$(7)\quad = \iint\limits_{H_r} r\varrho F_\varphi\,d\sigma + \int\limits_{K_r}(p-\nu\Theta)(xn_y-yn_x)\,ds - \mu\int\limits_{K_r}\left(x\frac{\partial v}{\partial n}-y\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds +$$

$$+\mu\iint\limits_{H_r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)d\sigma - \left[\int\limits_S(p-\nu\Theta)(xn_y-yn_x)\,ds - \mu\int\limits_S\left(x\frac{\partial v}{\partial n}-y\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds\right],$$

n_x et n_y désignant les cosinus directeurs de la normale intérieure de la courbe S ou bien de K_r. Remarquons que le dernier terme, entre parenthèses, du second membre de la formule (7) est égal au moment M des forces exercées sur S. Or, on a sur le cercle K_r: $xn_y - yn_x = 0$ et $u_en_x+v_en_y = 0$, car $u_e = -\omega y$, $v_e = \omega x$. En utilisant enfin l'identité

$$\iint\limits_{H_r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)d\sigma = -2\omega a + \int\limits_{K_r}(vn_x-un_y)\,ds,$$

nous pouvons écrire la relation (7) comme il suit:

$$M+2\mu\omega a+\iint\limits_{H_r} r\left\{\frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t}-\varrho F_\varphi\right\}d\sigma = A(r)+B(r),$$

où

$$A(r) = \int\limits_{K_r}\varrho(xv-yu)(un_x+vn_y)\,ds + \mu\int\limits_{K_r}(vn_x-un_y)\,ds,$$

$$B(r) = -\mu\int\limits_{K_r}\left(x\frac{\partial v}{\partial n}-y\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

Des hypothèses (II) et (III) on déduit les relations suivantes:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\int_{a_n}^{8a_n}A(r)\,dr=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^2}\int_{a_n}^{4a_n}\int_{a}^{2a}B(r)\,dr\,da=0,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^2}\int_{a_n}^{4a_n}\int_{a}^{2a}\left[M+2\mu\omega a+\iint_{H_r} r\left\{\frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t}-\varrho F_\varphi\right\}d\sigma\right]dr\,da=0.$$

Nous constatons alors qu'il existe une suite r_n telle que

$$\lim_{n\to\infty}\left[M+2\mu\omega a+\iint_{H_{r_n}} r\left\{\frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t}-\varrho F_\varphi\right\}d\sigma\right]=0.$$

Le théorème 3 est ainsi démontré.

Il est possible de déduire une autre formule, semblable à la formule (5), pour le moment des forces. Dans ce but, nous supposons $\omega\neq 0$ et nous plaçons l'origine O du système XY au centre instantané de rotation de la courbe S.

THÉORÈME 4. *Si à l'instant t les conditions* (I)-(VI) *des théorèmes* 1 *et* 2 *sont satisfaites et $\omega\neq 0$, il existe une suite r_n indéfiniment croissante de nombres positifs telle que*

$$\omega M=-\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial E_{r_n}}{\partial t}+D_{r_n}+k\iint_{H_{r_n}}\frac{p}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial t}d\sigma-\iint_{H_{r_n}}\varrho(uF_x+vF_y)\,d\sigma\right]. \tag{8}$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 2.

En ce qui concerne le moment des forces, remarquons que celui-ci dépend essentiellement de l'état initial de la vitesse du fluide. On peut le constater aisément par un simple exemple: soit un cercle immobile dans un fluide visqueux incompressible, la vitesse radiale du fluide étant égale à zéro. Les considérations sur l'équation de la chaleur montrent qu'il est possible de choisir les conditions initiales de telle manière qu'à l'époque $t=0$ le moment des forces exercées sur le cercle immobile soit égal à zéro, et que, à une époque postérieure, il soit différent de zéro, l'énergie cinétique du mouvement étant toujours bornée.

II. Mouvement spatial. Nous considérons le mouvement spatial d'un fluide visqueux compressible remplissant tout l'espace à l'extérieur de la surface Σ, qui est animée d'un mouvement quelconque sans se déformer. Soit XYZ un système rectangulaire de coordonnées lié à la surface Σ, l'axe Z étant l'axe instantané de rotation et de glissement de Σ. Le mouvement instantané de la surface Σ est défini par la vitesse angulaire instantanée $\omega(t)$ et la vitesse instantanée $w_0(t)$ de translation suivant

l'axe Z. Nous admettons que la surface Σ admet une normale continue et que les fonctions $\omega(t)$ et $w_0(t)$ ont une dérivée continue.

Soient $\overline{u}(x,y,z,t)$ le vecteur de la vitesse absolue du fluide, $\overline{u}_e(x,y,z,t)$ — le vecteur de la vitesse d'entraînement, $\overline{\omega}(t)$ — le vecteur de la vitesse angulaire de rotation. Soit $\Theta=\operatorname{div}\overline{u}$; alors les équations du mouvement et l'équation de continuité ont la forme (1).

Dans la suite, nous admettrons les hypothèses suivantes concernant le mouvement du fluide à l'instant t:

(I′) le fluide adhère à la surface Σ; on a donc sur Σ

$$u=u_e=-\omega y,\qquad v=v_e=\omega x,\qquad w=w_e=w_0;$$

(II′) l'énergie cinétique du mouvement du fluide est finie,

$$E=\frac{1}{2}\iiint_{X_\Sigma}\varrho\overline{u}^2\,dw<+\infty,$$

où X_Σ désigne tout l'espace à l'extérieur de Σ;

(III′) il existe une constante C telle que

$$\iiint_{\pi_\Sigma}\varrho\,dw\leqslant C\iiint_{\pi}dw, \tag{9}$$

$$\iiint_{\pi_\Sigma}\varrho^{-1}\,dw\leqslant C\iiint_{\pi}dw, \tag{10}$$

pour chaque domaine π contenant Σ; π_Σ désigne la portion de π extérieure à Σ (dans la suite je me borne au cas où π est un cylindre d'axe Z, symétrique par rapport au plan XY, sa hauteur étant égale au double carré de son rayon);

(IV′) les fonctions u, v, w, p, ϱ sont continues, ainsi que toutes leurs dérivées partielles, qui figurent dans les équations du mouvement et dans l'équation de continuité;

(V′) il existe une constante $\varrho^*>0$ telle que

$$\iiint_{X_\Sigma}|\varrho-\varrho^*|\,dw<+\infty;$$

(VI′) la densité ϱ est bornée;

(VII′) le fluide est homogène, $\partial p/\partial\varrho$ est une fonction bornée pour ϱ bornée, l'équation caractéristique du fluide ayant la forme $p=p(\varrho,t)$ (ce qui exclut le cas d'un fluide incompressible).

Alors, de même que dans le cas du mouvement plan, nous avons les théorèmes suivants, généralisant ceux des travaux [2], [3]:

THÉORÈME 5. *Si à l'instant t les conditions (I')-(IV') sont satisfaites et le mouvement de Σ est une translation, c'est-à-dire $\omega = 0$, les composantes P_x et P_y de la force exercée sur Σ par le fluide, s'expriment par les formules suivantes:*

$$(11)\quad P_x = -\lim_{n\to\infty}\left[\iiint_{\Omega_n}\left\{\frac{\partial(\varrho u)}{\partial t}-\varrho F_x\right\}dw + r_n\iiint_{\Gamma_n}\left\{\frac{\partial(\varrho v_\varphi)}{\partial t}-\varrho F_\varphi\right\}\sin\varphi\, d\sigma\right],$$

$$(12)\quad P_y = -\lim_{n\to\infty}\left[\iiint_{\Omega_n'}\left\{\frac{\partial(\varrho v)}{\partial t}-\varrho F_y\right\}dw - r_n'\iint_{\Gamma_n'}\left\{\frac{\partial(\varrho v_\varphi)}{\partial t}-\varrho F_\varphi\right\}\cos\varphi\, d\sigma\right],$$

où Ω_n désigne une suite de domaines, contenus entre Σ et les surfaces cylindriques Φ_n, augmentant indéfiniment de manière que $0 < k \leqslant r_n^2/h_n \leqslant K$, r_n désigne le rayon, h_n — la hauteur de Φ_n, k et K — des constantes, Γ_n — la surface latérale de Φ_n, u_r, u_φ et $u_z = w$ désignent les composantes cylindriques de la vitesse du fluide par rapport au système XYZ. La surface cylindrique Φ_n d'axe Z est symétrique par rapport au plan XY.

THÉORÈME 6. *Si à l'instant t les conditions (I')-(VII'), excepté la condition (9), sont satisfaites, alors dans le cas d'un mouvement quelconque de Σ il existe une suite Φ_n de surfaces cylindriques telle que la composante P_z de la force exercée sur Σ par le fluide s'exprime par la formule*

$$(13)\qquad P_z = -\lim_{n\to\infty}\iiint_{\Omega_n}\left\{\frac{\partial(\varrho w)}{\partial t}-\varrho F_z\right\}dw.$$

Les démonstrations des théorèmes 5 et 6 sont complètement analogues à celles du théorème établi dans [2] et du théorème I énoncé dans [3] respectivement.

Remarque. Si les hypothèses (I')-(VII') sont remplies, les formules (11) et (12) du théorème 5 prendront la forme suivante:

$$P_x = -\lim_{n\to\infty}\iiint_{\Omega_n}\left\{\frac{\partial(\varrho u)}{\partial t}-\varrho F_x\right\}dw,\qquad P_y = -\lim_{n\to\infty}\iiint_{\Omega_n'}\left\{\frac{\partial(\varrho v)}{\partial t}-\varrho F_y\right\}dw.$$

THÉORÈME 7. *Si à l'instant t les conditions (I'), (II'), (IV'), (V') et (VII') sont satisfaites et de plus:*

$0 < c \leqslant \varrho \leqslant C$, c et C *désignent des constantes, la vitesse $\overline{u}$ du fluide est bornée, les fonctions $r^{-1}\operatorname{grad}\varrho$ et $r^{-1}\Theta$ sont bornées dans le domaine X_{R_0}: $R_0 \leqslant r < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$ (R_0 est une constante positive, r, φ et z désignant les coordonnées cylindriques par rapport à XYZ), les fonctions $z^{-1}\operatorname{grad}\varrho$, $\partial\varrho/\partial z$ et $z^{-1}\Theta$ sont bornées dans le domaine $-\infty < z \leqslant -Z_0$, $Z_0 \leqslant z < +\infty$ (Z_0 — constante positive) et*

$$\iiint_{X_{R_0}}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial z}\right)^2 dw < +\infty,$$

alors il existe une suite de surfaces cylindriques Φ_n (dont il est question dans le théorème 6) telle que

$$(14)\quad \omega M_z + w_0 P_z = -\lim_{n\to\infty}\Bigg[\frac{\partial E_{\Omega_n}}{\partial t} + D_{\Omega_n} + \iiint_{\Omega_n} P(p)\frac{\partial\varrho}{\partial t}dw - \frac{\nu}{\varrho^{*2}}\iint_{\Phi_n}\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial t}u_n\,d\sigma - \iiint_{\Omega_n}\varrho(uF_x+vF_y+wF_z)\,dw\Bigg].$$

Dans cette formule M_z désigne le moment des forces exercées sur Σ par rapport à l'axe Z;

$$D_\Omega = \iiint_\Omega\left\{\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\nu\Theta^2\right\}dw,\quad E_\Omega = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \varrho\overline{u}^2 dw,$$

$$P(p) = \int_{p^*}^{p}\frac{dp}{\varrho},\qquad p^* = p(\varrho^*, t),\qquad u_n = un_x+vn_y+wn_z.$$

Bien que le terme ωM_z apparaisse dans la formule (14), la démonstration est complètement analogue à celle du théorème II du travail [3].

On peut modifier les hypothèses du théorème 7 (voir les théorèmes II' et II'' du travail [3]) et aussi affaiblir les hypothèses du présent travail, comme nous l'avons fait dans les travaux [1]-[3].

Travaux cités

[1] A. Krzywicki, *Sur le mouvement plan d'un liquide visqueux compressible*, Studia Mathematica 15 (1955), p. 113-122.

[2] — *Sur la force latérale exercée sur un obstacle par un liquide visqueux compressible*, ibidem 15 (1956), p. 174-181.

[3] — *Sur la force frontale exercée sur un obstacle par un liquide visqueux compressible*, ibidem 15 (1956), p. 252-266.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 31. 1. 1956