zero. Put $\xi_n(x) = \|t_n x\|/|t_n|^a$ for $n = 1, 2, \ldots$ The functionals ξ_n satisfy the assumptions of 6. Thus there exists a constant G such that $\xi_n(x) < G$ for $x \epsilon K(0,1)$. The continuity of the norm $\| \ \|$ implies $\|tx\|/|t|^a < G$ for real t and for $x \epsilon K(0,1)$. Let ε be an arbitrary positive number. We choose a number $\tau > 0$ such that $G < \tau^a \varepsilon$. There exists a $\delta > 0$ such that $\|x\| < \delta$ implies $\|\tau x\| < 1$. Consequently, the inequality $\|t\tau x\|/|t|^a < G$ is satisfied. Hence $\|x\| < \delta$ implies $\|x\|^* < \varepsilon$.

References

[1] A. Alexiewicz et W. Orlicz, *Remarque sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$*, Fund. Math. 33 (1945), p. 314-315.

[2] S. Banach, *Théorème sur les ensembles de première catégorie*, ibidem 16 (1930), p. 395-398.

[3] — *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge 1934.

[5] E. Hille, *Functional analysis and semigroups*, New York 1948.

[6] S. Marcus, *Sur un problème de la théorie de la mesure de H. Steinhaus et S. Ruziewicz*, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III, 4 (1956), p. 197-199.

[7] S. Mazur und W. Orlicz, *Über Folgen linearer Operationen*, Studia Math. 4 (1933), p. 152-157.

[8] В. Немыцкий, *О некоторых классах линейных множеств в связи с абсолютной сходимостью тригонометрических рядов*, Мат. сборник 33 (1926), p. 5-32.

[9] W. Orlicz, *Une généralisation d'un théorème de Cantor-Lebesgue*, Annales Soc. Pol. Math. 21 (1948), p. 38-45.

[10] — *Linear operations in Saks spaces (II)*, Studia Math. 15 (1956), p. 38-45.

[11] A. Ostrowski, *Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 38 (1929), p. 54-62.

[12] W. Sierpiński, *Sur les fonctions convexes mesurables*, Fund. Math. 1 (1920), p. 125-129.

[13] — *Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$*, ibidem 1 (1920), p. 116-122.

[14] A. Zygmund, *Trigonometrical series*, Warszawa 1935.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 8. 12. 1956

Problème de l'analyticité par rapport à un opérateur linéaire*

par

M. NICOLESCU (Bucarest)

1. Définitions et premier axiome. Cas intermédiaires. Ce qui suit constitue un schéma général abstrait de plusieurs résultats obtenus par l'auteur dans la théorie des fonctions polyharmoniques, ou dans la théorie de l'opérateur hyperbolique itéré ou encore dans la théorie des fonctions polycaloriques.

Le problème de l'analyticité a été posé d'une manière concrète dans une communication récente au IIIe Congrès Unional des Mathématiciens Sovietiques [6].

Le cadre le plus convenable, au schéma proposé me paraît être une algèbre normée, par exemple une algèbre de Banach, possédant un élément unitaire. D'ailleurs, dans les deux premiers §, les résultats sont valables pour une algèbre quelconque.

Soit, donc, $\mathcal{B}$ une algèbre commutative à élément unitaire e. Nous utiliserons au cours de ce travail des *opérateurs linéaires* $A, B, \ldots, L, \ldots$, c'est-à-dire additifs et homogènes sur le corps K des nombres complexes.

Pour un opérateur linéaire quelconque A, nous poserons $A^0 = e$, $A^1 = A$, $A^n = A(A^{n-1})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Avec cela, la signification d'une opération telle que $A^m B^n \ldots L^p$ est claire.

À tout opérateur linéaire A nous attacherons l'opérateur bilinéaire B, défini par l'égalité

$$B(x, y) = A(xy) - xAy - yAx, \tag{1}$$

où $x \epsilon \mathcal{B}$, $y \epsilon \mathcal{B}$. Manifestement, $B(x, y) = B(y, x)$.

Il peut arriver que l'on ait $B(x, y) = \emptyset$, quels que soient les éléments x, y. Alors A s'appelle un *opérateur de dérivation*, ou plus simplement une *dérivée algébrique* de l'élément auquel il s'applique [1]. Nous laisserons de côté ce cas, qui a été amplement étudié[1]) récemment.

Dans la suite nous considérerons un opérateur A linéaire, pour lequel sont vérifiées certaines conditions.

---

* Les résultats de ce Mémoire ont été présentés au Congrès des Mathématiciens Autrichiens, Vienne, 17-22 septembre 1956.

[1]) On consultera, à ce propos, avec profit le Mémoire [1] de M. J. Mikusiński.

La première en est:

I_1. *Quel que soit $y \in \mathcal{B}$, l'équation $Ax = y$ a au moins une solution x.*

De cette condition il résulte tout de suite que l'équation $A^n x = y$ a une solution quel que soit $y \in \mathcal{B}$ et quel que soit le nombre naturel n.

De même, l'équation $Ax = e$ a au moins une solution. Nous allons en choisir une, une fois pour toutes, que nous d signerons dans la suite par t. Ainsi donc, $At = e$. Nous poserons, encore,

$$B(x, t) = B(t, x) = Bx.$$

Il se peut que l'on ait $Bx = \emptyset$, quel que soit x. Considérons, par exemple, l'algèbre des fonctions indéfiniment différentiables de deux variables u, v et posons

$$Ax = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Ici

$$B(x, y) = +2\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Si l'on prend $t = -v$ (on a bien $At = 1$), on obtient $B(x, t) = 0$ quel que soit x.

Le cas mis en évidence ici est, en quelque sorte, *intermédiaire* entre le cas de l'opérateur de dérivation, cas où $B(x, y) = \emptyset$ quels que soient $x \in \mathcal{B}$, $y \in \mathcal{B}$ et le cas général.

Nous appellerons *opérateur parabolique simple* tout opérateur A pour lequel $B(x, t) = \emptyset$ quel que soit $x \in \mathcal{B}$. Nous donnerons ici quelques propriétés de l'opérateur parabolique simple:

THÉORÈME I. *A étant un opérateur parabolique simple, on a l'implication suivante:*

$$(A^n x = \emptyset) \Rightarrow (A^{n+1} tx = \emptyset) \quad \textit{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

En effet, de (1) on tire $Atx = tAx + x$. Par récurrence, on établit, pour tout n naturel, la relation

$$A^{n+1}(tx) = tA^{n+1}x + (n+1)A^n x, \tag{2}$$

d'où la thèse du théorème.

THÉORÈME II. *A toute solution x de l'équation $A^n x = \emptyset$ on peut faire correspondre n éléments de $\mathcal{B}$, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, solutions de l'équation $Ax_i = \emptyset$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, et telles que l'on ait*

$$x = x_0 + tx_1 + t^2 x_2 + \ldots + t^{n-1} x_{n-1}. \tag{3}$$

Démonstration. De $Atx = tAx + x$ on déduit facilement, par récurrence, $A(t^m x) = t^m Ax + mt^{m-1}x$.

En appliquant aux deux membres l'opérateur A et en tenant compte de la relation même, on obtient

$$A^2(t^m x) = t^m A^2 x + 2mt^{m-1}Ax + m(m-1)t^{m-2}x,$$

ce que l'on peut écrire symboliquement

$$A^2(t^m x) = (t^m + A)^{(2)} x,$$

en ayant soin de considérer, dans le résultat du développement, les exposants comme symboles de dérivation ordinaire pour t et comme rang d'itération pour A et en prenant, en conséquence, $(t^m)^{(0)} = t^m$, $A^0 x = x$. Cela suggère la formule suivante:

$$A^n(t^m x) = (t^m + A)^{(n)} x, \tag{4}$$

dont la justesse est confirmée aisément par récurrence. Sous forme développée

$$A^n(t^m x) = t^m A^n x + C_n^1 mt^{m-1} A^{n-1} x + C_n^2 m(m-1) t^{m-2} A^{n-2} x + \ldots \tag{4'}$$

Cela étant, supposons le théorème établi pour le nombre naturel $n-1$; nous allons montrer qu'il est vrai pour le nombre n. Soit x une solution de l'équation $A^n x = \emptyset$. Montrons que l'on peut déterminer un élément $x_{n-1} \in \mathcal{B}$, vérifiant l'équation $Ax_{n-1} = \emptyset$ et tel, en outre, que l'on ait

$$A^{n-1}(x - t^{n-1} x_{n-1}) = \emptyset. \tag{5}$$

En appliquant la formule (4′), la relation précédente devient

$$A^{n-1}x - (n-1)!\, x_{n-1} = \emptyset,$$

d'où

$$x_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} A^{n-1} x.$$

Posons $x - t^{n-1} x_{n-1} = y$. On a, d'après (5), $A^{n-1} y = \emptyset$, donc, d'après l'hypothèse faite, il existe $n-1$ éléments de $\mathcal{B}$, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}$, vérifiant l'équation $Ax_i = \emptyset$, $i = 0, 1, \ldots, n-2$, et tels que l'on ait

$$y = x_0 + tx_1 + t^2 x_2 + \ldots + t^{n-2} x_{n-2},$$

d'où

$$x = x_0 + tx_1 + t^2 x_2 + \ldots + t^{n-1} x_{n-1}.$$

Remarque. Dans le cas particulier considéré plus haut, on obtient le développement d'une solution de l'équation itérée de la chaleur, suivant des solutions de l'équation simple de la chaleur. Nous avons donné ce développement et en avons fait des applications dans le Mémoire [4].

2. Cas général. Dans le cas général, on n'a plus $Bx = \emptyset$ et les théorèmes I et II du § précédent ne sont plus généralement valables.

Cependant ils restent valables, comme nous allons le voir, si l'on assujetit l'opérateur A, en dehors de la condition I_1, aux conditions suivantes:

I_2. *Pour tout n naturel, on a l'implication*

$$(A^n x = \emptyset) \Rightarrow (A^n Bx = \emptyset).$$

I_3. *À tout élément $x \in \mathcal{B}$, vérifiant l'équation $A^n x = \emptyset$, correspond un élément $y \in \mathcal{B}$, vérifiant l'équation $A^{n-1}y = \emptyset$ et tel que $A(x-ty) = \emptyset$.*

Remarquons, tout d'abord, que dans le cas général la formule (2) doit être remplacée par la suivante:

$$A^{n+1}(tx) = tA^{n+1}x + (n+1)A^n x + \sum_{k=0}^{n} A^k B A^{n-k} x. \tag{6}$$

En effet, de $Atx = tAx + x + Bx$, on déduit

$$A^2(tx) = A(tAx) + Ax + ABx = tA^2x + 2Ax + BAx + ABx.$$

La formule est donc vérifiée pour $n = 1$. Il suffit de la supposer vraie pour le nombre naturel n et d'appliquer encore une fois l'opérateur A.

De la formule (6) et de l'axiome I_2 on déduit le

THÉORÈME III. *Pour tout nombre naturel n, on a l'implication suivante:*

$$(A^n x = \emptyset) \Rightarrow (A^{n+1}tx = \emptyset).$$

En effet, supposons le théorème établi pour tout nombre naturel inférieur à n et considérons une solution x de l'équation $A^n x = \emptyset$. Posons, pour tout $k < n$, $A^{n-k}x = y_k$. Comme $A^n = A^k(A^{n-k})$, il en résulte que l'élément y_k vérifie l'équation $A^k y_k = \emptyset$, donc, en vertu de I_2, on aura aussi $A^k B y_k = \emptyset$. Cela étant, la formule (6) devient, en tenant compte des remarques faites, $A^{n+1}(tx) = BA^n x = \emptyset$, c. q. f. d.

THÉORÈME IV. *À toute solution x de l'équation $A^n x = \emptyset$ on peut faire correspondre n éléments de $\mathcal{B}$, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, vérifiant l'équation $Ax_i = \emptyset$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, et tels que l'on ait*

$$x = x_0 + tx_1 + t^2x_2 + \ldots + t^{n-1}x_{n-1}.$$

Démonstration. On procédera toujours par induction. Supposons le théorème vrai pour le nombre naturel $n-1$. D'après l'axiome I_3, il existe un élément y, solution de $A^{n-1}y = \emptyset$ et tel que, en posant $x - ty = x_0$, on ait $Ax_0 = \emptyset$. Or, par hypothèse, il existe $n-1$ éléments de $\mathcal{B}$, soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, vérifiant l'équation $Ax_i = \emptyset$ et tels que

$$y = x_1 + tx_2 + \ldots + t^{n-2}x_{n-1}.$$

On en déduit

$$x = x_0 + tx_1 + t^2x_2 + \ldots + t^{n-1}x_{n-1}.$$

3. Deuxième axiome. Aux axiomes des § 1 et § 2 nous ajouterons le suivant:

II. *Il existe au moins une algèbre $\mathcal{B}'$, disjointe de $\mathcal{B}$, avec la propriété suivante:*

Il existe une application linéaire $\mathcal{L}$ de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$, telle que la restriction de $\mathcal{L}$ à l'ensemble des solutions de $Ax = y$ ait, pour tout $x' \in \mathcal{B}'$, une inverse $\Lambda(y; x')$ continue.

Posons $\Lambda(\emptyset; x') = Tx' = x_0$. On a, évidemment, $Ax_0 = \emptyset$. Il en résulte que si x vérifie l'équation $Ax = y$, il en sera de même de $x^* = x - x_0$.

Déterminons x^* par la condition d'être amené en $\emptyset$ par l'application $\mathcal{L}$; on aura $x^* = \Lambda(y; \emptyset)$, d'où $x = \Lambda(y; \emptyset) + \Lambda(\emptyset; x')$. Il en résulte $\mathcal{L}x = \mathcal{L}\Lambda(y; \emptyset) + \mathcal{L}\Lambda(\emptyset; x') = x'$, donc $x = \Lambda(y; x')$ et par conséquent

$$\Lambda(y; x') = \Lambda(y; \emptyset) + \Lambda(\emptyset; x'). \tag{7}$$

Cette relation nous sera utile dans la suite.

Remarquons aussi que, par hypothèse, $\Lambda(\emptyset; x') = Tx'$ est continu; comme c'est manifestement un opérateur linéaire, il en résulte qu'il est borné.

Nous poserons, pour simplifier, $\Lambda(y; \emptyset) = \Lambda y$.

Nous allons donner quelques exemples où l'axiome II est vérifié.

Premier exemple. Considérons, comme algèbre $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions de n variables, indéfiniment différentiables dans un domaine borné R, pour lequel le problème de Dirichlet, avec des données continues sur la frontière de R, a une solution. Comme algèbre $\mathcal{B}'$ nous prendrons l'ensemble des fonctions continues définies sur $\mathrm{Fr}\,R$. Comme opérateur A, nous prendrons le *laplacien* Δ. Si $P \in \mathrm{Int}\,R$ et $Q \in \mathrm{Fr}\,R$, l'application $\mathcal{L}$ est définie par la relation

$$\lim_{P \to Q} x(P) = x'(Q) \qquad (x \in \mathcal{B},\ x' \in \mathcal{B}').$$

Nous écrirons, simplement, $x' = \mathcal{L}x$. La restriction de $\mathcal{L}$ aux fonctions harmoniques dans R a bien une inverse (linéaire et bornée), puisque le problème de Dirichlet a une solution unique pour R.

C'est l'application $x = Tx'$.

De même, la restriction de $\mathcal{L}$ aux solutions de l'équation $\Delta x = y$ a une inverse, qui s'exprimera, avec nos notations, par la formule $x = \Lambda y + Tx'$, où Λy est la solution de l'équation précédente, nulle sur $\mathrm{Fr}\,R$.

En prenant $t = \overline{PP_0}^2$, où P_0 est un point fixe de R, le théorème IV devient le développement bien connu d'Almansi pour les fonctions polyharmoniques.

Second exemple. Considérons, dans le plan des variables indépendantes u, v, le domaine R limité entre deux droites $v = v_0$, $v = V$ et entre deux arcs de courbe $u = \psi_1(v)$, $u = \psi_2(v)$ $(\psi_1 < \psi_2)$, pour lequel le premier problème fondamental concernant l'équation de la chaleur a une solution.

Nous poserons

$$A = \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial}{\partial v} = \frown .$$

L'algèbre $\mathcal{B}'$ sera constituée par l'ensemble des fonctions continues définies sur la frontière *latérale* et *inférieure* de R, que nous désignerons, cette fois-ci, par $\mathrm{Fr}R$. L'application $\mathcal{L}$ est constituée par le passage à la limite lorsqu'un point de $\mathrm{Int}R$ tend vers un point de $\mathrm{Fr}R$. La restriction de $\mathcal{L}$ aux fonctions „caloriques" définies dans R a bien une inverse (linéaire et bornée), puisque nous avons supposé le premier problème fondamental résoluble. C'est cette inverse qui est l'application désignée par $x = Tx'$.

De même, la restriction de $\mathcal{L}$ aux solutions de $\frown x = y$ a une inverse $\Lambda(y; x')$ qui s'exprime toujours par la formule $x = \Lambda y + Tx'$, où cette fois-ci Λy est la solution de l'équation précédente, nulle sur $\mathrm{Fr}R$, avec la signification que nous avons donné à cette notion.

En prenant $t = v$, le théorème II donne un développement, récemment publié [4] des fonctions polycaloriques.

Troisième exemple. Considérons, toujours dans le plan (u, v), un rectangle R ayant les côtés parallèles aux axes. Soit (u_0, v_0) un point intérieur de ce rectange. C'est l'ensemble des portions des droites $u = u_0$, $v = v_0$, contenues dans R, qui sera désigné, cette fois-ci, par $\mathrm{Fr}R$. Le reste des points de R sera désigné par $\mathrm{Int}R$. En conservant à l'algèbre $\mathcal{B}$ les définitions données dans les deux exemples précédents, et en prenant pour $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables, définies sur les droites $u = u_0$, $v = v_0$, nous poserons ici

$$A = \frac{\partial^2}{\partial v \, \partial u} = D.$$

Il est bien connu que l'équation $Dx = y$ a une solution unique, prenant des valeurs données continues sur les droites $u = u_0$, $v = v_0$. Cela veut dire, dans notre terminologie, que la restriction de $\mathcal{L}$ aux solutions de l'équation précédente a une inverse. La théorie bien connue de cette équation nous fait voir que cette inverse est bornée.

En prenant $t = (u-u_0)(v-v_0)$, le théorème IV fournit un développement connu [3] des pseudopolynômes hyperboliques.

L'axiome II conduit à quelques résultats importants:

THÉORÈME V. *L'équation $A^n x = y$ a une solution x et une seule, telle que les éléments $x, Ax, \ldots, A^{n-1}x$ viennent, par l'application $\mathcal{L}$, en $\emptyset$. Cette solution est donnée par la formule $x = \Lambda^n y$.*

Démonstration. La proposition est vraie pour $n = 1$ et la solution du problème dans ce cas est $x = \Lambda y$ (axiome II). Supposons donc la proposition vraie pour $n-1$. Nous écrirons l'équation données comme $A(A^{n-1}x) = y$, d'où $A^{n-1}x = \Lambda y$, d'où, enfin, $x = \Lambda^{n-1}(\Lambda y) = \Lambda^n y$.

THÉORÈME VI. *L'équation $A^n x = y$ a une solution et une seule, telle que l'application $\mathcal{L}$ amène les points $x, Ax, \ldots, A^{n-1}x$ respectivement en n points arbitraires de $\mathcal{B}'$: $x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n-1}$.*

Démonstration. Il suffit d'écrire le système suivant:

$$Ax = x_1, \quad Ax_1 = x_2, \quad \ldots, \quad Ax_{n-1} = y,$$

équivalent à l'équation donnée, et d'appliquer successivement, de droite vers la gauche, à chaque équation de ce système, l'axiome II et la formule (7). On trouve finalement l'élément

$$x = Tx'_0 + \Lambda Tx'_1 + \ldots + \Lambda^{n-1}Tx'_{n-1} + \Lambda^n_y, \tag{8}$$

qui remplit les conditions de l'énoncé; cella établit le théorème.

Considérons, maintenant, un système de n suites d'éléments de $\mathcal{B}'$

$$\{x'_{k,i}\}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1; \ i = 1, 2, 3, \ldots,$$

convergeant (fortement) vers $\{x'_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Soit encore x_i la solution de l'équation $Ax_i = y$ telle que l'application $\mathcal{L}$ ramène les points $x_i, Ax_i, \ldots, A^{n-1}x_i$ respectivement en $x'_{0,i}, x'_{1,i}, \ldots, x'_{n-1,i}$.

Avec ces notations, nous pouvons énoncer le

THÉORÈME VII. *Si x est solution de l'équation $Ax = y$, telle que l'application $\mathcal{L}$ amène les points $x, Ax, \ldots, A^{n-1}x$ respectivement en $x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n-1}$, alors les n suites $\{x_i\}, \{Ax_i\}, \ldots, \{A^{n-1}x_i\}$ convergent (fortement) vers les limites respectives $x, Ax, \ldots, A^{n-1}x$.*

Démonstration. En effet, d'après la formule (8) on a

$$x_i = Tx'_{0,i} + \Lambda Tx'_{1,i} + \ldots + \Lambda^{n-1}Tx'_{n-1,i} + \Lambda^n y$$

et, en général, pour $k < n$,

$$A^k x_i = Tx'_{k,i} + \Lambda Tx'_{k+1,i} + \ldots + \Lambda^{n-k-1}Tx'_{n-1,i} + \Lambda^{n-k}y.$$

De même,

$$A^k x = Tx'_k + ATx'_{k+1} + \ldots + A^{n-k-1}Tx'_{n-1} + A^{n-k}y,$$

d'où

$$\|A^k x - A^k x_i\| \leqslant \|Tx'_k - Tx'_{k,i}\| + \ldots + \|A^{n-k-1}Tx'_{n-1} - A^{n-k-1}Tx'_{n-1,i}\|$$

par conséquent

$$\lim_{i\to\infty} \|A^k x - A^k x_i\| = 0.$$

Théorème VIII. *A tout élément $x \in \mathcal{B}$ et à tout nombre naturel n, on peut faire correspondre n éléments $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ solutions de l'équation $Au = \emptyset$, $u = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, telles que l'on ait*

$$x = x_0 + tx_1 + t^2x_2 + \ldots + t^{n-1}x_{n-1} + A^n(A^n x). \tag{9}$$

Démonstration. Désignons par u la solution de l'équation $A^n u = \emptyset$, telle que l'application $\mathcal{L}$ ramène les éléments $u, Au, \ldots, A^{n-1}u$ respectivement en $\mathcal{L}x, \mathcal{L}Ax, \ldots, \mathcal{L}A^{n-1}x$. Un tel élément existe, par suite du théorème VI.

L'élément $x^* = x - u$ vérifie l'équation $A^n x^* = y$, avec $y = A^n x$, et il est ramené, avec $Ax^*, A^2x^*, \ldots, A^{n-1}x^*$, en $\emptyset$. Donc, par suite du théorème V, $x^* = A^n y$, c'est-à-dire $x^* = A^n(A^n x)$.

Il suffit d'appliquer ensuite le théorème II (resp. IV) à l'élément u.

Remarque. Le terme $r_n = A^n(A^n x)$ pourrait s'appeler le *reste* du développement (9). Si $A^n x = \emptyset$, on retrouve, bien entendu, le développement du théorème II (resp. IV).

4. Dernier axiome. Si $\|r_n\| \to 0$ pour $n \to \infty$, le développement (9) devient

$$x = x_0 + tx_1 + t^2x_2 + \ldots + t^n x_n + \ldots,$$

où tous les éléments $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ sont des solutions de l'équation $Au = \emptyset$, $u = x_0, x_1, \ldots$ Nous dirons, dans ces conditions, que l'élément x est *analytique* par rapport à l'opérateur A.

Aux axiomes I et II nous ajouterons maintenant un dernier axiome, qui semble devoir jouer un rôle essentiel dans le problème de l'analyticité telle que nous venons de la définir:

III. *On a* $\|A\| < 1$.

Grâce à cet axiome, nous pourrons énoncer un critère général d'analyticité:

Théorème IX. *Si, pour un élément x, il existe un nombre positif M tel que l'on ait $\|A^n x\| < M$ pour tout entier n non négatif, alors x est un élément analytique par rapport à l'opérateur A.*

Démonstration. Posons $\|A\| = \lambda$. On a, tout d'abord, $\|A(A^n x)\| \leqslant \lambda M$.

Montrons, que l'on a, en général, $\|A^m(A^n x)\| \leqslant \lambda^m M$.

En effet, en supposant que $\|A^{m-1}(A^n x)\| \leqslant \lambda^{m-1}M$, on a

$$A^m(A^n x) = A\big(A^{m-1}(A^n x)\big),$$

d'où

$$\|A^m(A^n x)\| \leqslant \lambda, \quad \lambda^{m-1}M = \lambda^m M.$$

En particulier, $\|r_n\| \leqslant \lambda^n M$, d'où

$$\lim_{n\to\infty} \|r_n\| = 0.$$

Du théorème IX on déduit de suite le

Théorème X. *Si $\|A\| < 1$ et si x est un élément pour lequel on a $\|A^n x\| < M$, quel que soit l'entier non négatif n, alors on a*

$$x = Tx'_0 + ATx'_1 + \ldots + A^{n-1}Tx'_{n-1} + \ldots, \tag{10}$$

$x'_0, x'_1, x'_2, \ldots$ étant les points de $\mathcal{B}'$, images par $\mathcal{L}$ de $x, Ax, A^2x, \ldots$ respectivement.

Il suffit, en effet, de remarquer que l'on peut écrire, pour tout n, la formule (8) et d'appliquer à $A^n y = A^n(A^n x)$ le raisonnement précédent.

Remarque. Posons $x_{n-1} = Tx'_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ On a, quel que soit n naturel, $Ax_{n-1} = \emptyset$.

La formule (10) peut s'écrire

$$x = x_0 + Ax_1 + A^2x_2 + \ldots + A^n x_n + \ldots, \tag{10'}$$

$x_0, x_1, x_2, \ldots$ étant des solutions de l'équation $Ax_n = \emptyset$, déterminées par les conditions $\mathcal{L}x_n = \mathcal{L}A^n x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

La formule (10) généralise des résultats donnés dans [1] et [5].

5. Applications. Appliquons les résultats précédents aux trois exemples donnés plus haut. Dans le premier exemple, on a

$$Ay = -\frac{1}{(n-2)\sigma_0}\int_R G(P, P')\cdot y(P')\,dP'$$

et, plus généralement [1],

$$A^m A^m x = -\frac{1}{(n-2)\sigma_0}\int_R G^m(P, P')\,A^m x(P')\,dP'.$$

Supposons que

(11) $$|\Lambda^m x(P')| < M$$

quel que soit l'entier non négatif m et quel que soit le point $P' \epsilon \operatorname{Int} R$. Nous avons montré, dans le Mémoire cité [2], que

$$\frac{1}{(n-2)\sigma_0}\int_R G(P,P')\,dP' < \frac{R^2}{2n},$$

ϱ étant le rayon de la sphère la plus petite contenant le domaine D.

Supposons alors $\varrho < \sqrt{2n}$ et prenons pour norme le maximum du module dans R. Alors, pour $\varrho < \sqrt{2n}$, on a

$$\|\Lambda\| \leqslant \frac{\varrho^2}{2n} < 1,$$

donc: Dans tout domaine R, pour lequel le rayon de la plus petite sphère le contenant est inférieur à $\sqrt{2n}$, toute fonction x indéfiniment différentiable dans R, pour laquelle sont vérifiées les conditions (11), est analytique par rapport à l'opérateur de Laplace.

C'est un résultat trouvé dans le Mémoire [6].

Dans le second exemple, on a

$$\Lambda y = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_R G(P,P')y(P')\,dP'$$

et, plus généralement [4],

$$\Lambda^m(\bigtriangleup^m x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_R G^m(P,P')\bigtriangleup^m x(P')\,dP',$$

G^m étant la fonction itérée d'ordre m de Green pour le problème de la chaleur. Or on a [5]

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left|\int_R G(P,P')\,dP'\right| < \frac{\varrho^2}{2},$$

ϱ étant la demi-longueur du plus petit rectangle contenant le domaine R. Par conséquent $\|\Lambda\| \leqslant \varrho^2/2$.

Si l'on considère donc un domaine R tel que $\varrho < \sqrt{2}$, on aura $\|\Lambda\| < 1$. Supposons alors que l'on ait

(12) $$|\bigtriangleup^m x(P)| < M, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

pour tout point $P \epsilon \operatorname{Int} R$. Alors:

Toute fonction indéfiniment différentiable, dans un domaine R du type décrit dans l'exemple 2° et pour lequel on a $\varrho < \sqrt{2}$, ϱ étant la demi-longueur du plus petit rectangle le contenant, est analytique par rapport à l'opérateur $\bigtriangleup$, si les conditions (12) *sont vérifiées.*

Dans l'exemple 3°, on a, [2],

$$\Lambda y = \int_{v_0}^{v}\int_{u_0}^{u} y(u',v')\,du'\,dv'$$

et, plus généralement,

$$\Lambda^m(D^m y) = \frac{1}{[(n-a)!]^2}\int_{v_0}^{v}\int_{u_0}^{u}(u-u')^{m-1}(v-v')^{m-1}D^m y(u',v')\,du'\,dv'.$$

En prenant, ici aussi, pour norme le maximum du module, on a $\|\Lambda y\| \leqslant |u-u_0|\cdot|v-v_0|\cdot\|y\|$, d'où $\|\Lambda\| \leqslant |u-u_0|\cdot|v-v_0|$.

Par conséquent: *Si l'on a, quel que soit m entier non négatif, $|D_m x(u,v)| < M$, alors x est analytique par rapport à l'opérateur D, en chaque point (u_0, v_0) du rectangle R.*

En effet, le développement d'élément x suivant les puissances de $(u-u_0)(v-v_0)$ est convergent dans la portion du rectangle, intérieure au domaine défini par l'inégalité $|u-u_0|\cdot|v-v_0| < 1$, car pour tout point de ce domaine on aura $\|\Lambda\| < 1$.

Ce théorème a été donné dans le Mémoire [3].

Remarquons, pour finir, que le théorème VII, appliqué aux trois cas examinés ici, fournit autant de généralisations d'un théorème classique de Harnack.

Bibliographie

[1] J. Mikusiński, *Sur la dérivée algébrique*, Fund. Math. 11 (1953), p. 99-105.

[2] M. Nicolescu, *Quelques propriétés de décomposition des fonctions de plusieurs variables réelles et en particulier polyharmoniques* (en roumain, avec résumés français et russe), Revista Univer. C. I. Parhon 1954, p. 53-63.

[3] — *Contributions à une analyse du type hyperbolique du plan* (en roumain, avec résumés français et russe), Studii şi Cercetări Matem. 3 (1952), p. 7-51.

[4] — *L'équation itérée de la chaleur* (en roumain, avec résumés français et russe), ibidem 5 (1954), p. 243-332.

[5] — *Sur quelques problèmes liés a l'opérateur itéré de la chaleur*, Communication faite au IVème Congrès des Mathématiciens Roumains, Bucarest, mai 1956.

[6] — *Le problème de l'analyticité des fonctions réelles*, Communication faite au IIIème Congrès Unional des Mathématiciens Soviétiques, Moscou, juin 1956.

Reçu par la Rédaction le 18. 12. 1956