Extensions de l'espace linéaire avec dérivation

par

J. MIKUSIŃSKI (Warszawa)

Introduction. Dans le calcul opérationnel ([1], [2], [3]) l'équation différentielle linéaire d'ordre p

$$x^{(p)}(\lambda)+a_{p-1}x^{(p-1)}(\lambda)+\ldots+a_0(\lambda) = 0$$

peut avoir moins que p solutions linéairement indépendantes. Par exemple l'équation

$$(*) \qquad x''(\lambda)+s^2x(\lambda) = 0$$

n'a aucune solution linéairement indépendante (c'est-à-dire toute solution de cette équation est nulle). La question se pose s'il est possible d'adjoindre au calcul opérationnel de nouveaux éléments de manière que le nombre de solutions linéairement indépendantes de toute équation soit exactement égal au degré de l'équation.

Dans ce travail nous répondons par l'affirmative. Après l'adjonction de nouvelles solutions la théorie des équations considérées devient complètement analogue à la théorie classique des équations différentielles ordinaires à coefficients constants.

Les méthodes employées dans ce travail sont algébriques ce qui rend la théorie très générale. Nous considérons des espaces linéaires abstraits, avec une opération de dérivation satisfaisant à des simples axiomes, et nous construisons ensuite des extensions de ces espaces. On obtient ainsi, d'une manière purement algébrique, des fonctions exponentielles, la „fonction delta" de Dirac et une grande partie des opérateurs de Heaviside. A tout corps on fait correspondre un espace linéaire engendré par ce corps. En partant du corps des nombres complexes, par exemple, on obtient les fonctions exponentielles ordinaires, alors que, en partant du corps des opérateurs, on obtient les fonctions exponentielles opérationnelles [4]. Or, notre construction algébrique est plus puissante que la méthode du calcul opérationnel, car elle permet, par exemple, d'attribuer à l'équation $(*)$ deux solutions, e^{is} et e^{-is} qui n'ont pas de sens dans le calcul opérationnel.

Dans cet article nous utilisons des résultats obtenus dans nos travaux antérieurs [5], [6] et [7].

1. Adjonction des solutions d'une seule équation. Soit $\mathcal{F}$ un espace linéaire sur un corps commutatif $\mathcal{C}$ de caractéristique 0. Nous supposons que l'espace $\mathcal{F}$ est pourvu de la dérivation D, c'est-à-dire qu'un endomorphisme est défini dans $\mathcal{F}$, assujetti aux conditions suivantes:

(I) Quel que soit p naturel, toute équation $P(D)x = 0$ d'ordre p $(P(D) = D^p+a_{p-1}D^{p-1}+\ldots+a_0,\ a_i\in\mathcal{C})$ a au plus p solutions linéairement indépendantes;

(II) Si une équation $P_1(D)x = 0$ a exactement p_1 solutions linéairement indépendantes et une autre équation $P_2(D)x = 0$ en a exactement p_2, l'équation $P_1(D)P_2(D)x = 0$ a exactement p_1+p_2 solutions linéairement indépendantes.

Si Q est un polynôme de degré q, irréductible dans $\mathcal{C}$, l'équation $Q(D)x = 0$ a exactement q solutions linéairement indépendantes ou bien elle n'en a aucune (cf. [5], Proposition 6). Nous démontrerons qu'il est possible, dans le dernier cas, d'étendre l'espace $\mathcal{F}$ de manière que l'équation $Q(D)x = 0$ ait exactement q solutions linéairement indépendantes.

Les éléments de l'espace étendu (désignons-le par $\mathcal{F}^Q$) seront des couples (x, B), où $x\in\mathcal{F}$ et B est une matrice infinie de la forme

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{0,0} & \ldots & b_{0,q-1} \\ b_{1,0} & \ldots & b_{1,q-1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad (b_{ij}\in\mathcal{C}),$$

où $b_{ij} = 0$ à partir d'un indice i. Ainsi la matrice B ne contient qu'un nombre fini d'éléments non nuls.

Deux éléments (x, B) et (y, C) sont égaux lorsque $x = y$ et $B = C$. Les opérations sont définies de la manière suivante:

$$(1) \qquad \begin{aligned} (x, B)+(y, C) &= (x+y, B+C), \\ a(x, B) &= (ax, aB) \qquad (a\in\mathcal{C}), \end{aligned}$$

où l'addition des matrices et leur multiplication par un scalaire a sont entendues au sens ordinaire. Cela étant, il est évident que l'espace $\mathcal{F}^Q$ des éléments (x, B) est linéaire sur $\mathcal{C}$. Les éléments de la forme $(x, 0)$ constituent un sous-espace de $\mathcal{F}^Q$ qui est isomorphe à $\mathcal{F}$; cet isomorphisme nous permet d'écrire $x = (x, 0)$. Désignons par aT^kD^lU la matrice pour laquelle $b_{kl} = a$ et $b_{ij} = 0$ pour $i\neq k$ ou $j\neq l$. Alors la matrice B peut être écrite sous la forme

$$(2) \qquad B = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{q-1} b_{ij}T^iD^jU.$$

L'opération D sera définie, pour les matrices aT^kD^l, en posant

$$D(aT^kD^lU) = kaT^{k-1}D^lU + aT^kD^{l+1}U, \tag{3}$$

où il faut remplacer $kaT^{k-1}D^lU$ par 0 lorsque $k=0$, et $aT^kD^{l+1}U$ par

$$-\sum_{j=0}^{q-1} aa_jT^kD^jU,$$

lorsque $l+1=q$. Pour l'élément B de la forme (2) l'opération D sera définie par l'égalité

$$DB = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{q-1} D(b_{ij}T^iD^jU)$$

et généralement pour les éléments de $\mathcal{F}^Q$

$$D(x, B) = (Dx, DB).$$

Cela posé, l'opération D est un endomorphisme sur $\mathcal{F}^Q$. Le sous--espace des éléments $(x, 0)$ est isomorphe à $\mathcal{F}$ non seulement par rapport à l'addition et à la multiplication scalaire mais aussi par rapport à l'endomorphisme D, c'est-à-dire $Dx = y$ entraîne $D(x, 0) = (y, 0)$.

Les éléments $U, DU, \ldots, D^{q-1}U$ satisfont à l'équation $Q(D)X = 0$, ce qui résulte de l'égalité

$$D^qU = -\sum_{j=0}^{q-1} a_jD^jU.$$

L'équation $Q(D)X = 0$ a donc, dans $\mathcal{F}^Q$, q solutions linéairement indépendantes.

Nous allons montrer que *l'espace $\mathcal{F}^Q$ jouit des propriétés* (I) *et* (II).

Supposons qu'un élément de la forme

$$B_1 = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{q-1} b_{ij}T^iD^jU$$

satisfasse à l'équation $Q(D)X = 0$. On peut écrire

$$B_1 = P_0(D)U + TP_1(D)U, \tag{4}$$

où $P_0(D)$ et $P_1(D)$ sont des polynômes de D de degré $\leqslant q-1$. On tire de (4)

$$0 = Q(D)TP_1(D)U, \tag{5}$$

car l'élément $P_0(D)U$ est encore une solution de l'équation $Q(D)X = 0$. Or, on a généralement

$$Q(D)TX = TQ(D)X + Q'(D)X \tag{6}$$

pour tout $X \in \mathcal{F}^Q$, ce qu'il est facile de vérifier. Pour $X = P_1(D)U$, il vient de (5) et (6)

$$Q'(D)P_1(D)U = 0,$$

car $P_1(D)U$ satisfait à l'équation $Q(D)X = 0$. Comme Q est un polynôme irréductible, les deux polynômes Q et Q' n'ont pas de diviseurs communs et les équations $Q(D)X = 0$ et $Q'(D)X = 0$ n'ont pas de solutions communes, sauf 0. Donc $P_1(D)U = 0$ et l'élément B_1 se réduit à

$$B_1 = P_0(D)U. \tag{7}$$

Tout élément B de la forme (2) peut s'écrire comme

$$B_n = [P_0(D) + TP_1(D) + \ldots + T^nP_n(D)]U.$$

Supposons que la proposition soit déjà démontrée pour un certain $n = p \geqslant 1$. Considérons un élément de la forme

$$B_{p+1} = [P_0(D) + TP_1(D) + \ldots + T^{n+1}P_{n+1}(D)]U. \tag{8}$$

La formule (6) peut être généralisée par induction en posant

$$Q(D)T^iX = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}T^jQ^{(i-j)}X. \tag{9}$$

En multipliant les deux membres de (8) par $Q(D)$ et en appliquant ensuite la formule (9), il vient, vu $Q(D)P_i(D)U = 0$ $(i = 0, \ldots, n-1)$,

$$\begin{aligned} Q(D)B_{p+1} = 0 + Q'(D)U + \sum_{j=0}^{1}\binom{2}{j}T^jQ^{(2-j)}(D)P_1(D)U + \ldots + \\ + \sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}T^jQ^{(n+1-j)}(D)P_{n+1}(D)U. \end{aligned} \tag{10}$$

Le coefficient de T^m dans le deuxième membre de (10) est $Q'(D)P_{n+1}(D)U$. Si B_{p+1} est une solution de l'équation $Q(D)X = 0$, le premier membre de (10) est nul et, par conséquent, les coefficients des puissances de T dans le second membre de (10) sont nuls, en particulier $Q'(D)P_{n+1}(D)U = 0$. Comme le polynôme Q est irréductible, il s'ensuit comme tout à l'heure que $P_{n+1}(D)U = 0$. L'élément (8) se réduit donc à un polynôme de degré $\leqslant n$ par rapport à T et, par conséquent, on a $B_{p+1} = P_0(D)U$, d'après l'hypothèse que tout élément de la forme (2) satisfaisant à l'équation $Q(D)X = 0$ se réduit à $B = P_0(D)U$.

Supposons maintenant qu'un élément (x, B) de $\mathcal{F}^Q$ satisfasse à l'équation $Q(D)X = 0$. On a alors $Q(D)x = 0$, d'où $x = 0$, car l'équation $Q(D)x = 0$, par hypothèse, n'a pas de solutions dans $\mathcal{F}$. Il s'ensuit que tout élément de $\mathcal{F}^Q$ qui satisfait à l'équation $Q(D)X = 0$ est de la forme $P_0(D)U$. Par conséquent il existe, dans $\mathcal{F}^Q$, exactement q solutions linéairement indépendantes de l'équation $Q(D)X = 0$.

Aucun des éléments de la forme (2), sauf 0, ne satisfait à l'équation $P(D)X = 0$, où P est un polynôme irréductible différent de Q. En effet, l'élément U satisfait à l'équation $Q(D)X = 0$, donc tout élément (2) satisfait à une équation $[Q(D)]^n X = 0$ pour n convenablement choisi; s'il satisfaisait encore à l'équation $P(D)X = 0$, les polynômes Q^n et P auraient un diviseur commun, ce qui est impossible. Donc l'extension $\mathcal{F}^Q$ n'introduit pas de nouvelles solutions dans les équations $P(D)X = 0$. Si maintenant P est un polynôme quelconque, il se laisse décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathcal{C}$

$$P = P_1 \dots P_r.$$

Chacune des équations $P_i(D)X = 0$ admet, dans $\mathcal{F}$ et, d'après ce qui vient d'être démontré, aussi dans $\mathcal{F}^Q$, des solutions linéairement indépendantes en nombre égal au degré du polynôme ou bien égal à 0. Donc, si le degré de P est p, l'équation $P(D)X = 0$ admet, dans $\mathcal{F}^Q$, au plus p solutions linéairement indépendantes.

Ainsi nous avons démontré que la condition (I) est remplie dans $\mathcal{F}^Q$.

Supposons maintenant qu'une équation $P_1(D)X = 0$ ait dans $\mathcal{F}$ p_1 solutions linéairement indépendantes et dans $\mathcal{F}^Q$ r_1 solutions linéairement indépendantes. On peut décomposer le polynôme P_1 en facteurs $P_1 = Q^{n_1}R_1$, où $n_1 \geqslant 0$ et R_1 n'est pas divisible par Q. Comme l'équation $Q(D)X = 0$ n'a aucune solution, sauf 0, dans $\mathcal{F}$, l'équation $R_1(D)X = 0$ a dans $\mathcal{F}$ p_1 solutions linéairement indépendantes et autant de solutions linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}^Q$. Cependant, l'équation $Q^{n_1}(D)X = 0$ a 0 solutions linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}$ et $n_1 q = r_1 - p_1$ solutions linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}^Q$.

Pareillement, soit $P_2(D)X = 0$ une solution ayant dans $\mathcal{F}$ p_2 solutions linéairement indépendantes et dans $\mathcal{F}^Q$ r_2 solutions linéairement indépendantes. Supposons que R_2 et n_2 aient pour P_2 une signification analogue à celle de R_1 et n_1 pour P_1. Alors l'équation

$$R_1(D)R_2(D)X = 0 \tag{11}$$

a p_1+p_2 solutions linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}$ et elle en a autant dans $\mathcal{F}^Q$. Cependant l'équation

$$[Q(D)]^{n_1+n_2}X = 0 \tag{12}$$

a 0 solutions linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}$ et $q(n_1+n_2) = r_1 - p_1 + r_2 - p_2$ solutions T^iD^jU $(i = 0, \dots, n_1+n_2-1;\ j = 0, \dots, q-1)$ linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}^Q$. Les solutions de (11) et (12) sont des solutions de $P_1(D)P_2(D)X = 0$, cette dernière équation a donc $(p_1+p_2)+q(n_1+n_2) = r_1+r_2$ solutions linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}^Q$. Ce nombre ne peut pas être augmenté (cf. [5], Proposition 2), il est donc exact. Cela prouve que la condition (II) est remplie.

Nous avons ainsi démontré que l'on peut adjoindre à $\mathcal{F}$ les solutions des équations $[Q(D)]^n x = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$, quel que soit le polynôme irréductible Q pour lequel ces équations n'ont pas eu de solutions. Après cette adjonction, la dérivation dans l'espace $\mathcal{F}^Q$ jouit encore des propriétés (I) et (II).

2. Cas où tout élément t est une solution. Supposons que l'espace $\mathcal{F}$ jouisse, outre (I) et (II), de la propriété

(III) Tout élément de l'espace satisfait à une équation $P(D)x = 0$.

Nous démontrerons que *cette même propriété est alors remplie pour l'extension* $\mathcal{F}^Q$.

En effet, étant donné un élément $(x, B) = x+B$ de $\mathcal{F}^Q$, où B est de la forme (2), soit n le plus grand entier tel que $b_{n-1,j} \neq 0$ pour un certain j. Alors chacun des nq éléments T^iD^jU, où $0 \leqslant i \leqslant n-1$ et $0 \leqslant j \leqslant q-1$, satisfait à l'équation $[Q(D)]^n X = 0$. Si x satisfait à l'équation $P(D)x = 0$, l'élément $x+B$ satisfait à l'équation $P(D)[Q(D)]^n X = 0$. La propriété (III) est donc satisfaite pour $\mathcal{F}^Q$.

3. Adjonction de toutes les solutions. Négligeons, pour le moment, l'hypothèse (III) et supposons qu'un espace $\mathcal{F}$ satisfasse aux conditions (I) et (II). Par induction transfinie on peut adjoindre à $\mathcal{F}$ les solutions non nulles pour tous les polynômes irréductibles de manière à satisfaire aux conditions (I) et (II). Dans cette extension, la condition suivante est satisfaite:

(IV) Quel que soit p naturel, toute équation $P(D)x = 0$ d'ordre p a exactement p solutions linéairement indépendantes.

La condition (IV) entraîne évidemment (I) et (II); cependant les conditions (I) et (II) n'entraînent pas, en général, (IV).

Si un espace $\mathcal{F}$ linéaire sur $\mathcal{C}$ satisfait aux conditions (III) et (IV), il sera dit *espace engendré par le corps* $\mathcal{C}$.

Le corps $\mathcal{C}$ étant donné, l'espace engendré par ce corps est déterminé à un isomorphisme près. Par un isomorphisme nous entendons ici l'isomorphisme par rapport à l'addition, la multiplication et, de plus, par rapport à la dérivation. Plus précisément, deux espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^*$ linéaires sur le même corps $\mathcal{C}$ sont isomorphes lorsqu'il existe une transformation biunivoque, faisant correspondre les éléments x^* de $\mathcal{F}^*$ aux éléments x de $\mathcal{F}$, telle que

$$(x+y)^* = x^*+y^*, \quad (ax)^* = ax^* \quad \text{et} \quad (Dx)^* = Dx^*. \tag{13}$$

Pour démontrer la proposition, considérons deux espaces avec dérivation, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^*$, engendrés par le corps $\mathcal{C}$. Dans l'espace $\mathcal{F}$ on peut définir, outre la dérivation, un autre endomorphisme linéaire T de manière que $DTx = TDx+x$ pour $x \in \mathcal{F}$ (cf. [7]). De plus, on peut introduire une base qui est formée d'éléments de la forme

$$D^i T^k e_Q \quad (i = 0, \ldots, q-1;\ k = 0, 1, \ldots),$$

où e_Q est une solution non nulle de l'équation $Q(D)x = 0$, Q étant un polynôme irréductible quelconque de degré q $(q = 1, 2, \ldots)$. L'endomorphisme T et une base analogue

$$D^i T^k e_Q^*$$

peuvent être introduits pour l'espace $\mathcal{F}^*$. Posons

$$(D^i T^k e_Q)^* = D^i T^k e_Q^*$$

et étendons la transformation définie par cette égalité d'une manière linéaire. Alors nous obtiendrons l'isomorphisme demandé.

D'après la formule générale

$$T^i D^k e_Q = \sum_{j=0}^{\min(i,k)} (-1)^j j! \binom{i}{j}\binom{k}{j} D^{k-j} T^{i-j} e_Q$$

on voit aussitôt que l'isomorphisme evapporte aussi à l'endomorphisme T, c'est-à-dire que l'on a, outre (13), $(Tx)^* = Tx^*$.

4. Extension de l'espace linéaire par l'extension du corps. Si $\mathcal{F}$ est un espace engendré par un corps $\mathcal{C}$ et Q est un polynôme irréductible dans $\mathcal{C}$, on peut adjoindre une racine w du polynôme Q et étendre ensuite l'espace $\mathcal{F}$ de manière qu'il devienne un espace engendré par l'extension du corps (cf. [7]). Par induction transfinie on peut adjoindre toutes les racines de tous les polynômes irréductibles dans $\mathcal{C}$ et étendre convenablement l'espace $\mathcal{F}$. On obtiendra ainsi un espace engendré par la clôture de $\mathcal{C}$. Autrement dit, l'espace engendré par un corps $\mathcal{C}$ est isomorphe à une partie de l'espace engendré par la clôture de $\mathcal{C}$.

D'après le paragraphe précédent, tout espace linéaire sur $\mathcal{C}$ avec une dérivation assujettie aux conditions (I), (II) et (III) est isomorphe à une partie de l'espace engendré par la clôture de $\mathcal{C}$.

5. Fonctions exponentielles. Soit $\mathcal{F}$ un espace engendré par un corps algébriquement clos $\mathcal{C}$. Toute équation

$$Dx = wx \quad (w \in \mathcal{C}) \tag{14}$$

a des solutions non nulles; toutes les solutions d'une même équation sont linéairement dépendantes. Faisons correspondre, à tout $w \in \mathcal{C}$, une solution non nulle de l'équation (14) et désignons cette solution par e^{wT}. Alors tout élément de $\mathcal{F}$ peut être représenté sous la forme

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{ij} T^i e^{w_j T} \quad (w_j \in \mathcal{C}) \tag{15}$$

ou bien

$$\sum_{i=0}^{n} R_i(T) e^{w_i T},$$

où $R_i(T)$ sont des polynômes de T et w_i sont des éléments de $\mathcal{C}$. La dérivation s'effectue alors formellement comme une dérivation par rapport à T; l'opération T joue le rôle d'un argument. L'espace $\mathcal{F}$ sera appelé *espace des fonctions exponentielles sur le corps (clos)* $\mathcal{C}$.

6. Équations non homogènes. Soit $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions exponentielles sur un corps algébriquement clos $\mathcal{C}$.

Toute équation non homogène d'ordre p

$$P(D)x = a, \tag{16}$$

où $a \in \mathcal{F}$, *a exactement* p *solutions linéairement indépendantes.*

Il suffit de démontrer l'existence d'une solution quelconque de (16), parce que toute autre solution de cette équation s'obtiendra par l'addition d'une solution de l'équation homogène $P(D)x = 0$. De plus, il suffit de trouver une solution de l'équation

$$P(D)x = T^n e^{wT}, \tag{17}$$

ce qui résulte facilement du fait que a est de la forme (15). Supposons que w soit une racine de degré $m \geqslant 0$ du polynôme P, c'est-à-dire que

$$P^{(i)}(w) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(w) \neq 0. \tag{18}$$

Il existe un polynôme R de degré $r = m+p$ tel que

$$P(D)R(T)e^{wT} = T^n e^{wT}.$$

Pour déterminer les coefficients du polynôme R, remarquons que l'on a, de même que dans la formule (9),

$$P(D)T^i e^{wT} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} T^j P^{(i-j)}(w) e^{wT}.$$

En posant

$$R(T)=\sum_{i=0}^{p}\gamma_i T^{m+i}$$

et tenant compte de (18), il vient

$$(19)\qquad P(D)R(T)e^{wT}=\sum_{j=0}^{p}T^j\sum_{i=j}^{p}\gamma_i\binom{m+i}{j}P^{(m+i-j)}(w)e^{wT}.$$

Pour satisfaire à l'équation (17), nous posons le second membre de (19) égal à $T^n e^{wT}$. En comparant les coefficients de T^j, nous obtenons un système de $p+1$ équations à $p+1$ inconnues $\gamma_0,\dots,\gamma_p$. Le déterminant de ce système est égal à

$$\binom{m}{0}\binom{m+1}{1}\dots\binom{m+p}{p}[P^{(m)}(w)]^{p+1}\neq 0,$$

le système est donc résoluble.

7. Adjonction d'un élément transcendant. A tout espace linéaire $\mathcal{F}$ avec une dérivation jouissant des propriétés (I) et (II) on peut adjoindre un élément u qui ne satisfait à aucune équation différentielle. En effet, désignons par $\mathcal{F}^u$ l'ensemble des couples (x, B), où $x\in\mathcal{F}$ et B est une suite infinie

$$(20)\qquad B=(b_0, b_1, \dots)\qquad (b_i\in\mathcal{C}),$$

où $b_i=0$ à partir d'un indice i. Ainsi la suite B ne contient qu'un nombre fini d'éléments non nuls. L'espace linéaire de toutes les suites B sera désigné par $\mathcal{B}$. Deux éléments (x_1, B_1) et (x_2, B_2) sont égaux lorsque $x_1=x_2$ et $B_1=B_2$. L'addition et la multiplication scalaire sont définies par les formules (1).

Désignons par $aD^l u$ la suite (20) pour laquelle $b_l=a$ et $b_j\neq 0$ pour $j\neq l$. Alors la suite B peut s'écrire sous la forme

$$B=\sum_{j=0}^{\infty}b_jD^ju.$$

Posons

$$DB=\sum_{j=0}^{\infty}b_jD^{j+1}u\qquad\text{et}\qquad D(x, B)=(Dx, DB).$$

Cela étant, l'opération D devient un endomorphisme linéaire sur l'espace linéaire $\mathcal{F}^u$. Le sous-espace des éléments $(x, 0)$ est isomorphe à $\mathcal{F}$. On peut donc écrire x au lieu de $(x, 0)$ et $x+B$ au lieu de (x, B).

Admettons qu'un élément x_0+B_0 satisfasse à une équation différentielle $P(D)X=0$. On a alors $P(D)x_0=0$ et

$$(21)\qquad P(D)B_0=0.$$

Supposons que $B_0\neq 0$ et désignons par l_0 le plus grand indice tel que $b_{l_0}\neq 0$. Soit p le degré du polynôme P. Alors le coefficient de $D^{l_0+p}u$ dans le développement de $P(D)B_0$ sera non nul, ce qui n'est pas compatible avec (21). Donc $B_0=0$.

Nous avons ainsi démontré que tout élément de $\mathcal{F}^u$ qui est une solution d'une équation différentielle est un élément de $\mathcal{F}$. Il s'ensuit que les conditions (I) et (II) sont satisfaites dans $\mathcal{F}^u$.

L'espace $\mathcal{F}^u$ est dit une *extension transcendante* de $\mathcal{F}$, engendrée par l'adjonction de l'élément transcendant u.

8. Endomorphismes N et S. Supposons, comme auparavant, que $\mathcal{F}$ soit l'espace des fonctions exponentielles sur un corps algébriquement clos $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{F}^u$ l'espace engendré par l'adjonction d'un élément transcendant u. Tout élément de $\mathcal{F}^u$ est de la forme

$$(22)\qquad X=\sum_{i=0}^{n}P_i(T)e^{w_iT}+R(D)u,$$

où P_i et R sont des polynômes à coefficients de $\mathcal{C}$.

Introduisons encore dans $\mathcal{F}^u$ un endomorphisme linéaire quelconque N assujetti aux conditions suivantes:

1° $NX\in\mathcal{B}$ pour tout $X\in\mathcal{F}^u$;

2° $Ne^{wT}=cu$, où $c\in\mathcal{C}$, $c\neq 0$;

3° $NB=0$ pour $B\in\mathcal{B}$.

Introduisons enfin, dans $\mathcal{F}^u$, un quatrième endomorphisme S, en posant

$$(23)\qquad SX=DX+NX\qquad (X=\mathcal{F}^u).$$

Par induction il est facile de démontrer que

$$(24)\qquad D^nX=S^nX-B_n(S)X,\qquad\text{où}\qquad B_n(S)=\sum_{i=1}^{n}S^{n-i}ND^{i-1}\in\mathcal{B}.$$

Comme $D^{i-1}u\in\mathcal{B}$, on a $ND^{i-1}u=0$ et la formule précédente se réduit, pour $X=u$, à $D^nu=S^nu$. On peut donc écrire $R(S)u$ au lieu de $R(D)u$ et l'expression (22) devient

$$(25)\qquad X=\sum_{i=0}^{n}P_i(T)e^{w_iT}+R(S)u.$$

En vertu de (24) on peut écrire, pour tout polynôme $P(D) = D^p + a_{p-1}D^{p-1} + \ldots + a_0$,

$$P(D)X = P(S)X - C(S)R(S)u,$$

où $C(S) = B_p(S) + a_{p-1}B_{p-1}(S) + \ldots + a_0 B_0(S)$.

Nous démontrerons que

L'égalité $P(S)X = 0$, où P est un polynôme de degré $p \geqslant 0$, entraîne $X = 0$.

En effet, ceci est vrai lorsque $p = 0$. Si $p \geqslant 1$, on peut écrire $P(S) = (S-w)P_1(S)$ et

$$(S-w)\big(x_1 + C_1(S)u\big) = 0,$$

où $x_1 + C_1(S)u = P(S)X$, $x_1 \epsilon \mathcal{F}$ et C_1 est un polynôme. En vertu de (23) il vient

$$(D-w)x_1 + Nx_1 + (S-w)C_1(S)u = 0,$$

d'où

$$(D-w)x_1 = 0, \tag{26}$$

$$Nx_1 = -(S-w)C_1(S)u. \tag{27}$$

On tire de (26) $x_1 = ce^{wT}$ ($c \epsilon \mathcal{C}$), d'où $Nx_1 = cc_1u$ ($c_1 \epsilon \mathcal{C}$, $c_1 \neq 0$). Si l'on avait $c \neq 0$, le premier membre de (27) serait $cc_1u \neq 0$, tandis que le coefficient de u dans le second membre serait un polynôme de S de degré $\geqslant 1$. On a donc $c = 0$, ce qui entraine $x_1 = 0$ et $C_1 = 0$. Par conséquent on a $x_1 + C_1(S)u = 0$, c'est-à-dire $P_1(S)X = 0$. En répétant ce procédé avec le polynôme $P_1(S)$, il vient $P_2(S)X = 0$, où P_2 est un polynôme de degré inférieur à celui de P_1. Par induction il en résulte donc que $X = 0$.

L'espace $\mathcal{F}^u$ peut être considéré comme un espace linéaire sur l'anneau des polynômes $P(S)$. Grâce à la proposition qui vient d'être démontrée, cet espace peut être étendu à un espace linéaire sur le corps des fractions $C(S)/P(S)$, où C et P sont des polynômes.

Nous montrerons que *tout élément de $\mathcal{F}^u$ peut être représenté sous la forme* $[C(S/P(S)]u$.

En effet, tout élément de $\mathcal{F}^u$ est une somme $x + R(S)u$, où $x \epsilon \mathcal{F}$ et R est un polynôme. L'élément x satisfait à une équation différentielle d'ordre $\geqslant 1$

$$P(D)x = 0;$$

cette équation peut s'écrire

$$P(S)x = C_0(S)u,$$

où C_0 est un polynôme. En multipliant cette équation par $1/P(S)$, il vient

$$x = \frac{C_0(S)}{P(S)}u,$$

d'où la proposition.

On a, en particulier, $(D-w)e^{wT} = 0$, d'où

$$(S-w)e^{wT} = c_0u \qquad (c_0u = Ne^{wT})$$

et

$$e^{wT} = \frac{c_0u}{S-w}.$$

Plus généralement, on a

$$T^ne^{wT} = \frac{n!}{(S-w)^{n+1}}\left(c_0 + \frac{c_1}{1!}(S-w) + \ldots + \frac{c_n}{n!}(S-w)^n\right)u \tag{28}$$

$$(n = 0, 1, \ldots),$$

où $c_iu = NT^ie^{wT}$. En effet, on a

$$(D-w)T^ne^{wT} = nT^{n-1}e^{wT},$$

d'où

$$(S-w)T^ne^{wT} = nT^{n-1}e^{wT} + c_nu$$

et la formule (28) en résulte par induction.

9. Produit de composition. La formule (28) devient plus simple lorsque l'endomorphisme N est assujetti à la condition supplémentaire

4° $NTx = 0$ pour $x \epsilon \mathcal{F}$.

Admettons encore, ce qui n'est aucune restriction essentielle, que $c_0 = 1$. Alors l'endomorphisme N est déterminé par 2°, 3° et 4° univoquement et s'exprime par la formule

$$NX = \sum_{i=0}^{n} P_i(0)u,$$

où X est de la forme (25). La propriété 1° est une conséquence des propriétés 2°, 3° et 4°. Maintenant la formule (28) devient

$$T^ne^{wT} = \frac{n!}{(S-w)^{n+1}}u \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{29}$$

Comme les éléments de la forme (29) constituent une base de $\mathcal{F}$, il s'ensuit que tout élément de $\mathcal{F}$ peut être représenté sous la forme $[C(S)/P(S)]u$, où C et P sont des polynômes, C de degré inférieur à P.

D'autre part, toute expression $[C(S)/P(S)]u$, où C est un polynôme de degré inférieur au degré du polynôme P, peut être décomposée en fractions simples de la forme (29), elle représente donc un élément de $\mathcal{F}$.

On voit que tout élément X de $\mathcal{F}$ peut être mis sous la forme

$$X = F(T) = \sum_{i=0}^{n} R_i(T)e^{w_iT}, \tag{30}$$

où R_i sont des polynômes, et sous la forme

$$X = f(S)u = \frac{C(S)}{P(S)}u,$$

où C et P sont des polynômes, C de degré inférieur à P.

Le symbole $f(S)u$ désigne le résultat de l'opération $f(S)$ sur l'élément u. On peut aussi l'interpréter comme le résultat d'une opération u sur une expression rationnelle en S: le résultat de cette opération est une expression exponentielle de la forme (30). L'égalité $F(T) = f(S)u$ correspond alors à la transformation inverse de la transformation de Laplace.

Si $F_1(T) = f_1(S)u$, $F_2(T) = f_2(S)u$ et $F_3(T) = f_1(S)f_2(S)u$, on peut exprimer $F_3(T)$ par $F_1(T)$ et $F_2(T)$ sous la forme

$$F_3(T) = F_5(T)*F_2(T) = \int_0^T F_1(T-\tau)F_2(\tau)\,d\tau. \tag{31}$$

L'intégrale n'est introduite ici que symboliquement. Cela veut dire qu'en évaluant l'intégrale suivant les règles habituelles du calcul intégral, on parvient au résultat désiré. Pour le voir remarquons que

$$\frac{1}{S-v}\,\frac{1}{S-w} = \frac{1}{v-w}\left(\frac{1}{S-v} - \frac{1}{S-w}\right) \qquad (v \neq w),$$

$$\frac{1}{S-w}\,\frac{1}{S-w} = \frac{1}{(S-w)^2},$$

et que par suite

$$e^{vT}*e^{wT} = \frac{1}{v-w}(e^{vT}-e^{wT}) = \int_0^T e^{v(T-\tau)}e^{w\tau}\,d\tau,$$

$$e^{wT}*e^{wT} = Te^{wT} = \int_0^T e^{w(T-\tau)}e^{w\tau}\,d\tau.$$

En tenant compte de ce que le produit de composition est associatif et commutatif, l'égalité (31) est entièrement justifiée.

Dans le dernier membre de (31) il n'y a, en réalité, aucune fonction et aucune intégrale, il s'agit seulement d'indiquer un mode de calcul, un algorithme. Dans le calcul lui-même il faut cependant procéder comme si F_1 et F_2 étaient des fonctions d'un argument qui parcourt l'intervalle d'intégration. Le même algorithme s'obtient, en posant, au lieu de (31),

$$F_1(T)*F_2(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(T-\tau)F_2(\tau)\,d\tau, \tag{32}$$

mais il faut alors considérer, dans le calcul, $F_1(T)$ et $F_2(T)$ comme si c'étaient des fonctions nulles pour $T < 0$.

10. Fonction delta de Dirac. Tout élément de $\mathcal{F}^u$ peut être représenté sous la forme $f(S)u$, cependant la forme $F(Z)$ n'est attribuée jusqu'à présent qu'à une partie des éléments de $\mathcal{F}^u$, à savoir aux éléments de $\mathcal{F}$. En introduisant la notation

$$\delta^{(n)}(T) = S^n u \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

on peut écrire chacun des éléments de $\mathcal{F}^u$ sous la forme

$$X = F(T) = \sum_{i=0}^{n} R_i(T)e^{w_iT} + \sum_{i=0}^{p} c_i\delta^{(i)}(T).$$

De plus, on peut alors évaluer le produit de composition (32), en utilisant les règles du calcul avec la fonction delta de Dirac.

11. Une nouvelle interprétation de l'endomorphisme T. En dérivant formellement le second membre de (29) par rapport à S, on a

$$-\frac{(n+1)!}{(S-w)^{n+2}}. \tag{33}$$

D'autre part, en multipliant formellement le premier membre de (29) par $-T$, on a

$$-T^{n+1}e^{wT}. \tag{34}$$

Les deux expressions (33) et (34) sont égales, on voit donc que la dérivation formelle par rapport à S équivaut, pour les expressions (29), à la multiplication par $-T$. Or, tout élément de $\mathcal{F}$ peut être représenté comme une combinaison linéaire des fractions (29). Il s'ensuit que pour les éléments $[C(S)/P(S)]u$, où le degré de C est inférieur à celui de P, la dérivation formelle par rapport à S équivaut à la multiplication par $-T$. Lorsque le degré de C est supérieur ou égal à celui de P, la multiplication par $-T$ n'est pas définie, parce que l'endomorphisme T n'a pas été défini pour les éléments $R(S)u$. Il est bien naturel de compléter la définition de l'endomorphisme linéaire T de manière que la dérivation par rapport à S et la multiplication par $-T$ soient équivalentes quels que soient les degrés de C et P. Il revient au même de poser, par définition, pour tout polynôme R

$$(35)\qquad -TR(S)u = R'(S)u.$$

En particulier, on aura donc

$$(36)\qquad -TNX = 0 \quad (X \epsilon \mathcal{F}^u) \quad \text{et} \quad -Tu = 0.$$

Or, on a $u = \delta(T)$, la dernière égalité peut donc s'écrire $T\delta(T) = 0$. Comme $T^{n+1}S^n u = 0$, on peut écrire, plus généralement, $T^{n+1}\delta^{(n)}(T) = 0$.

Comme l'endomorphisme $-T$ a les propriétés de la dérivation par rapport à S, il s'ensuit que

$$(37)\qquad (-T)SX = S(-T)X+X \quad (X \epsilon \mathcal{F}^u).$$

Cette formule peut aussi être déduite de la formule

$$(-T)Dx = D(-T)x+x \quad (x \epsilon \mathcal{F}).$$

En tenant compte de (23), 4° et (36), on a

$$(-T)Sx = S(-T)x+x.$$

En vertu de (35), on a

$$(-T)SR(S)u = S(-T)R(S)u+R(S)u.$$

En ajoutant les deux dernières égalités, il vient (37), où $X = x+R(S)u$.

Nous démontrerons encore que l'endomorphisme $-T$ jouit de la propriété (I), c'est-à-dire que, *quel que soit le nombre naturel p, toute équation $P(-T)X = 0$ d'ordre p a, dans $\mathcal{F}^u$, au plus p solutions linéairement indépendantes.*

Considérons, tout d'abord, l'équation

$$(38)\qquad T^pX = 0.$$

En posant $X = x+R(S)u$ $(x \epsilon \mathcal{F})$, on a $T^px = 0$ et $T^pP(S)u = 0$, d'où $x = 0$ et $P^{(p)}(S) = 0$. L'équation (38) a donc exactement p solutions linéairement indépendantes $u, Su, \ldots, S^{p-1}u$.

Considérons maintenant l'équation

$$(39)\qquad P_0(T)X = 0, \quad \text{où} \quad P_0(0) = a \neq 0.$$

On a $P_0(T)x = 0$ et $P_0(T)R(S)u = 0$.

On voit que $x = 0$. Supposons que R soit de degré $r \geqslant 0$ et soit $c \neq 0$ le coefficient de S^r. Alors $P_0(T)R(S)$ est un polynôme où le coefficient de S^r est $ac \neq 0$, ce qui est impossible. On a donc $R(S) = 0$. Nous avons ainsi démontré que la seule solution de (39) est 0.

Soit enfin P un polynôme quelconque. On peut écrire $P(-T) = P_0(T)T^n$, où $P(0) \neq 0$. Si un élément $X \epsilon \mathcal{F}^u$ satisfait à l'équation $P(T)X = 0$, on a $P_0(-T)^nX = 0$, d'où il vient $T X = 0$. L'équation $P(-T)X = 0$ a donc n solutions linéairement indépendantes $u, Su, \ldots, S^{n-1}u$, ce qui achève la démonstration.

12. Diverses interprétations de l'espace linéaire avec dérivation. Le corps commutatif de caractéristique 0 le plus simple est le corps des nombres réels rationnels. L'espace engendré par ce corps est l'espace ayant pour base les fonctions

$$t^n, \quad t^ne^{rt}, \quad t^ne^{pt}\sin qt \quad \text{et} \quad t^ne^{pt}\cos qt,$$

où l'exposant n est entier, non négatif et r, $p+iq$ des nombres algébriques (r, p et q réels).

Le corps commutatif clos de caractéristique 0 le plus simple est le corps des nombres algébriques. L'espace engendré par ce corps est l'espace ayant pour base les fonctions

$$(40)\qquad t^n \quad \text{et} \quad t^ne^{wt},$$

où le paramètre w est un nombre algébrique et l'exposant n est un entier non négatif.

L'espace engendré par le corps des nombres complexes a pour base les fonctions (40), où w est un nombre complexe arbitraire.

L'endomorphisme T est, dans tous les trois cas, la multiplication par la variable t. L'élément transcendant u correspond à la fonction $\delta(t)$ de Dirac. Lorsqu'un élément de l'espace considéré est représenté sous la forme $F(t) = f(s)u$, le coefficient $f(s)$ de u est la transformée de Laplace de $F(t)$

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt.$$

Le produit de composition, considéré dans le paragraphe 9, devient le produit de composition ordinaire.

Considérons encore une interprétation. Soit $\mathcal{C}$ la clôture du corps des opérateurs (cf. [1]). L'espace engendré par ce corps contient toutes les fonctions opérationnelles $x(\lambda)$ qui sont des solutions d'équations différentielles homogènes (cf. [2]). L'endomorphisme T est alors la multiplication par la variable λ. Toute équation différentielle homogène d'ordre p a exactement p solutions linéairement indépendantes. L'ensemble des solutions est donc, dans notre construction algébrique, plus riche que dans le calcul opérationnel. Par exemple l'équation

$$x''(\lambda)+s^2x(\lambda) = 0 \tag{41}$$

n'a pas de solutions, sauf 0, parmi les fonctions opérationnelles, tandis qu'elle a deux solutions linéairement indépendantes dans l'espace $\mathcal{F}$.

En partant de la clôture algébrique du corps des opérateurs l'espace $\mathcal{F}$ devient un espace des fonctions exponentielles. La fonction $e^{w\lambda}$ existe pour tout opérateur w. En particulier les fonctions $e^{is\lambda}$ et $e^{-is\lambda}$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation (41). La théorie des équations différentielles est, dans cette interprétation, tout à fait analogue à la théorie classique des équations différentielles ordinaires, mais l'ensemble des fonctions exponentielles est beaucoup plus riche, même plus riche que dans le calcul opérationnel. Par l'adjonction d'un élément transcendant on obtient une construction analogue au calcul opérationnel, mais sur un niveau plus haut, une sorte de „calcul opérationnel du calcul opérationnel".

Travaux cités

[1] J. Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Math. 11 (1950), p. 41-70.

[2] — *Sur les équations différentielles du calcul opératoire et leurs applications aux équations classiques aux dérivées partielles*, ibidem 12 (1951), p. 227-270.

[3] — *Rachunek operatorów*, Warszawa 1953.

[4] — *Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire*, Studia Math. 12 (1951), p. 208-224.

[5] — *Sur les solutions linéairement indépendantes des équations différentielles à coefficients constants*, ibidem 16(1957).

[6] — *Sur les théorèmes d'unicité et le nombre de solutions linéairement indépendantes*, ibidem 16(1957), p. 95-98.

[7] — *Sur l'espace linéaire avec dérivation*, ibidem 16(1957), p. 113-123.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 12. 9. 1956

A property of multilinear operations

by

A. PEŁCZYŃSKI (Warszawa)

1. In this paper I prove a special property of multilinear operations (see [3]) defined in B^*-spaces[1]). It appears that if the space has some additional properties (*e. g.* weak completeness), these operations are continuous with respect to a sequential topology weaker than the topology induced by the norm (it follows hence in particular that in the space C_0 the polynomials are weakly continuous). For a class of spaces the functional $\|x\|$ is not continuous with respect to this topology. From this fact it follows that the functional $\|x\|$ cannot be uniformly approximated in these spaces by polynomials. This result partly coincides with some results of J. Kurzweil [2]. In the sequel I give an example of a non-separable space, in which the functional $\|x\|$ is not representable in any ball as the pointwise limit of polynomials.

I am indebted to Professor S. Mazur for calling my attention to this problem and the aid which he has given me in solving it.

2. Let E be a B^*-space, s — a real number from the interval $\langle 0, 1)$, (ε_i) — a sequence composed of $+1$'s or -1's. I shall define in E a sequential topology τ_s.

DEFINITION 1. The sequence $(x_n) \subset E$ is *τ_s-convergent to Θ*[2]) if there is a constant C such that for $k = 1, 2, \ldots$, for arbitrary different indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$ and for every sequence (ε_i) the inequality

$$\|\varepsilon_1 x_{n_1}+\varepsilon_2 x_{n_2}+\ldots+\varepsilon_k x_{n_k}\| \leqslant Ck^s \tag{1}$$

is satisfied.

The sequence (x_n) is τ_s-convergent to the element x_0 if the sequence (x_n-x_0) is τ_s-convergent to Θ[3]). This fact will be denoted in symbols: $x_n \underset{\tau_s}{\rightarrow} x_0$.

[1]) *i. e.*, in (not necessarily complete) linear subsets of B-spaces.

[2]) Θ denotes the null element of the space E.

[3]) It follows in particular from (1) that $x_n \xrightarrow[\tau_s]{} x_0$ implies $x_n \xrightarrow[\text{weakly}]{} x_0$; hence follows the unicity of the τ_s-limit.