The integration operator T in the space $\boldsymbol{L}^2$ of all functions integrable in the second power on $(0,1)$ does not satisfy the hypotheses of the determinant theories of Leżański and of Ruston. In fact, let us consider the operator $K\epsilon\mathfrak{K}_0$ (from $\boldsymbol{L}^2$ into $\boldsymbol{L}^2$) of the form (2) where $\xi_j(t)=\sin 2\pi jt$ and $x_j(s)=\cos 2\pi js$.

We have $\|K\|=1$ (see [6], Lemma 3.3) and

$$\operatorname{tr}(TK)=\sum_{j=1}^{m}\int_0^1\frac{\sin^2 2\pi jt}{2\pi j}\,dt=\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}.$$

The positive integer m being arbitrary, we infer that

$$\sup_{\substack{K\leqslant 1\\ K\epsilon\mathfrak{K}_0}}|\operatorname{tr}(TK)|=\infty,$$

i. e. the condition (*) is not satisfied.

References

[1] T. Leżański, *The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces*, Studia Math. 13 (1953), p. 244-276.

[2] — *Sur les fonctionnelles multiplicatives*, ibidem 14 (1953), p. 13-23.

[3] A. F. Ruston, *On the Fredholm theory of integral equations for operators belonging to the trace class of a general Banach space*, Proc. London Math. Soc. 2.53 (1951), p. 109-124.

[4] — *Direct products of Banach spaces and linear functional equations*, ibidem 3.1 (1951), p. 327-384.

[5] R. Schatten, *A theory of cross-spaces*, Annals of Math. Studies 1950.

[6] — *The cross-space of linear transformations*, Annals of Math. 47 (1946), p. 73-84.

[7] — and J. von Neumann, *The cross-space of linear transformations II*, ibidem 47 (1946), p. 608-630.

[8] R. Sikorski, *On Leżański's determinants of linear equations in Banach spaces*, Studia Math. 14 (1953), p. 24-48.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 15. 6. 1956

Sur l'espace linéaire avec dérivation

par

J. MIKUSIŃSKI (Warszawa)

1. Soit $\mathcal{F}$ un espace linéaire sur un corps commutatif $\mathcal{C}$ de caractéristique 0. Soit D un endomorphisme, assujetti à la condition suivante:

(I) *Quel que soit n naturel, toute équation $P(D)x=0$ d'ordre n ($P(D)=D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\ldots+a_0$) a au plus n solutions linéairement indépendantes.*

Dans un travail antérieur [1] j'ai démontré que s'il existe un autre endomorphisme T tel que

$$DTx=TDx+x, \tag{1}$$

la proposition suivante a lieu:

(II) *Si une équation $P_1(D)x=0$ a exactement p_1 solutions linéairement indépendantes et une autre équation $P_2(D)x=0$ en a exactement p_2, l'équation $P_1(D)P_2(D)x=0$ a exactement p_1+p_2 solutions linéairement indépendantes.*

Donc, l'existence d'un endomorphisme T satisfaisant à la condition (1) est une condition suffisante pour que la proposition (II) ait lieu.

Le but principal de cet article est de démontrer que cette condition est aussi nécessaire, pourvu que tout élément de $\mathcal{F}$ soit une solution d'une équation $P(D)x=0$.

La condition (II) exprime que, si l'on multiplie deux équations, les nombres de leurs solutions linéairement indépendantes s'ajoutent. Lorsque l'endomorphisme D est interprété comme une *dérivation*, l'endomorphisme T joue formellement le rôle d'une multiplication par un argument par rapport auquel on effectue la dérivation.

2. Soit $Q(\xi)=\xi^q+b_{n-1}\xi^{q-1}+\ldots+b_0$ un polynôme irréductible dans $\mathcal{C}$. Posons

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \ldots & -b_{q-1}\end{bmatrix}.$$

L'ensemble $\mathcal{C}_Q$ des matrices

$$A = a_0 I + a_1 B + \ldots + a_{q-1} B^{q-1}$$

est un corps commutatif qui contient une partie isomorphe avec le corps $\mathcal{C}$, ce qui permet d'écrire a au lieu de aI. D'après le théorème bien connu de Cayley et Hamilton, on a $Q(B) = 0$ et, par conséquent, le polynôme $Q(\xi)$ se décompose en facteurs dans $\mathcal{C}_Q$:

$$Q(\xi) = (\xi - B) Q_1(\xi).$$

L'ensemble $\mathcal{F}_Q$ des vecteurs

(2) $$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix},$$

où $x_i \in \mathcal{F}$, est un espace linéaire sur $\mathcal{C}_Q$. On peut vérifier que pour le vecteur

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \frac{1}{b_0} B^k \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q-1)$$

on a $y_1 = \ldots = y_{q-k} = 0$ et $y_{q-k+1} = x$. Il en résulte que le vecteur

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

dont le $i^{\text{ème}}$ élément est x_i et les autres éléments sont nuls, peut être représenté sous la forme

$$(a_1 B + \ldots + a_{q-i+1} B^{q-i+1}) \begin{bmatrix} x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et, par conséquent, que tout élément de $\mathcal{F}_Q$ peut être représenté sous la forme

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + A_1 \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + A_{q-1} \begin{bmatrix} x_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

où $A_i \in \mathcal{C}_Q$. L'ensemble des vecteurs

$$\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

est isomorphe avec l'espace $\mathcal{F}$; ceci permet d'écrire

$$x = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et $X = x_1 + A_1 x_2 + \ldots + A_{q-1} x_q$.

L'endomorphisme D étant défini dans $\mathcal{F}$, on l'étend sur $\mathcal{F}_Q$, en posant

$$D \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Dx_1 \\ \vdots \\ Dx_q \end{bmatrix}.$$

L'opération D peut aussi s'écrire sous la forme de la matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} D & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & D \end{bmatrix},$$

ce qui permet, d'une manière naturelle, d'attribuer un sens aux symboles du type $D - A$, par exemple. On a $DA = AD$, quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{C}_Q$.

Si x_0 est une solution de l'équation $Q(D)x = 0$, on peut facilement vérifier que le vecteur

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ Dx_0 \\ \vdots \\ D^{q-1} x_0 \end{bmatrix}$$

satisfait à l'équation

(3) $$DX = BX.$$

D'autre part, si un vecteur (2) satisfait à l'équation (3), on a $Dx_1 = x_2, \ldots, Dx_{q-1} = x_q$, $Dx_q = -b_{q-1} x_q - \ldots - b_0 x_1$. Il s'ensuit que $Q(D)x_1 = 0$. Si $x_1 = 0$, on a $x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0$. Donc, l'équation $DX = BX$ a, dans $\mathcal{F}_Q$, une solution non nulle lorsque $Q(D)x = 0$ a, dans $\mathcal{F}$, des solutions non nulles, et seulement dans ce cas.

3. Nous nous proposons maintenant de démontrer la proposition suivante:

Si la condition (I) *est satisfaite dans l'espace* $\mathcal{F}$, *elle est encore satisfaite dans l'espace* $\mathcal{F}_Q$.

Soit $P(\xi) = \xi^n + C_{n-1}\xi^{n-1} + \ldots + C_0$ $(C_i \in \mathcal{C}_Q)$ un polynôme irréductible dans $\mathcal{C}_Q$. Soit

$$Y_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}$$

une solution de l'équation

$$P(D)X = 0. \tag{4}$$

Alors les éléments $BY_1, \ldots, B^{q-1}Y_1$ sont encore des solutions de (4). En effet, les matrices C_i sont commutatives avec D, on a donc, en multipliant $P(D)Y_1 = 0$ par B^k, l'égalité $P(D)B^kY_1 = 0$.

L'équation (4) peut être interprétée comme un système de q équations de degré n,

$$D^n x_i = P_{i1}(D)x_1 + \ldots + P_{in}(D)x_q \quad (i = 1, \ldots, q), \tag{5}$$

où P_{ij} sont des polynômes en D de degré $\leqslant n-1$, à coefficients appartenant à $\mathcal{C}$.

En posant

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = Dx_1, \quad \ldots, \quad z_n = D^{n-1}x_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z_{qn-n+1} = x_q, \quad z_{qn-n+2} = Dx_q, \quad \ldots, \quad z_{qn} = D^{n-1}x_q,$$

le système (5) équivaut à un système de qn équations du premier degré

$$Dz_i = c_{i,1}z_1 + \ldots + c_{i,qn}z_{qn} \quad (i = 1, \ldots, qn), \tag{6}$$

où $c_{ij} \in \mathcal{C}$. Si la condition (I) est satisfaite pour l'espace $\mathcal{F}$, le système (6) a au plus qn solutions linéairement indépendantes [2], donc il en est de même du système (5). Par conséquent, il existe au plus qn solutions de (4) linéairement indépendantes dans $\mathcal{C}$ (nous disons généralement que les éléments $X_1, \ldots, X_m$ sont *linéairement indépendants dans un corps* $\mathcal{K}$, lorsque, pour $a_i \in \mathcal{K}$, l'égalité $a_1X_1 + \ldots + a_mX_m = 0$ entraîne $a_1 = \ldots = a_n = 0$). Il faut démontrer qu'il existe au plus n solutions de (4) linéairement indépendantes dans $\mathcal{C}_Q$.

Les éléments

$$Y_1, BY_1, \ldots, B^{q-1}Y_1 \tag{7}$$

sont linéairement indépendants dans $\mathcal{C}$, pourvu que $Y_1 \neq 0$. Admettons qu'il existe encore une solution Y_2 de (4), linéairement indépendante des précédentes. Alors les éléments (7) et

$$Y_2, BY_2, \ldots, B^{q-1}Y_2 \tag{8}$$

sont linéairement indépendants. En effet, supposons au contraire qu'il existe deux polynômes non nuls $R_1(\xi)$ et $R_2(\xi)$ à coefficients de $\mathcal{C}$ et de degré $\leqslant n-1$ tels que

$$R_1(B)Y_1 = R_2(B)Y_2. \tag{9}$$

L'inverse de $R_2(B)$ peut être mis sous la forme

$$\frac{1}{R_2(B)} = N_2(B),$$

où $N_2(\xi)$ est encore un polynôme de degré $\leqslant n-1$, ce qui résulte de l'égalité $Q(B) = 0$ et de l'irréductibilité du polynôme $Q(\xi)$. En multipliant (9) par $N_2(B)$, il vient $R_3(B)Y_1 = Y_2$, où $R_3(\xi)$ est un polynôme de degré $\leqslant n-1$ tel que $R_3(B) = N_2(B)R_1(B)$. Cela contredit l'hypothèse que l'élément Y_2 est linéairement indépendant des éléments (7).

S'il existe encore une solution Y_3 de (4) qui est linéairement indépendante des éléments (7) et (8), alors tous les éléments (5), (6) et

$$Y_3, \quad BY_3, \quad \ldots, \quad B^{q-1}Y_3$$

sont linéairement indépendants, ce qui se démontre comme tout à l'heure. Par induction, on voit qu'il existe r éléments $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ $(r \leqslant n)$ tels que les éléments

$$Y_1, \quad BY_1, \quad \ldots, \quad B^{q-1}Y_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y_r, \quad BY_r, \quad \ldots, \quad B^{q-1}Y_r$$

sont des solutions de (4) linéairement indépendantes dans $\mathcal{C}$ et qu'il n'existe pas d'autres solutions linéairement indépendantes. Il s'ensuit que toute solution de (4) peut être mise sous la forme

$$X = P_1(B)Y_1 + \ldots + P_k(B)Y_r,$$

où $P_i(B)$ sont des polynômes en B de degré $\leqslant q-1$.

Cela prouve que l'équation (4) a exactement r solutions linéairement indépendantes dans $\mathcal{C}_Q$.

La proposition est donc démontrée pour toute équation (4), où P est un polynôme irréductible. Lorsque le polynôme P n'est pas irréductible, il peut être décomposé en facteurs irréductibles $P = P_1 \ldots P_m$. Le nombre des solutions linéairement indépendantes dans $\mathcal{C}_Q$ est alors au plus égal à la somme des nombres de solutions linéairement indépendantes des équations $P_i(D)x = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ([1], Proposition 2), donc au plus égal au degré n du polynôme P. Cela achève la démonstration.

4. Supposons que tout élément de $\mathcal{F}$ soit une solution d'une équation $P(D)x = 0$, à coefficients appartenant à $\mathcal{C}$. (Nous ne supposons cependant pas que toute équation $P(D)x = 0$ a une solution). Soit D, comme précédemment, un endomorphisme défini dans $\mathcal{F}$ et satisfaisant à la condition (I). Cela étant, on a le théorème suivant:

Pour que la condition (II) *soit satisfaite, il faut et il suffit qu'il existe, dans $\mathcal{F}$, un autre endomorphisme T tel que $DTx = TDx + x$ pour tout $x \in \mathcal{F}$.*

La suffisance de cette condition a été établie dans un autre travail, comme nous l'avons dit au paragraphe 1. Démontrons qu'elle est nécessaire.

Nous allons définir une suite infinie de sous-ensembles de $\mathcal{F}$

$$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \tag{10}$$

dont la somme est une base de $\mathcal{F}$. Il suffira de déterminer l'opération linéaire T pour les éléments de cette base.

Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des polynômes irréductibles Q, à coefficients de $\mathcal{C}$, pour lesquels l'équation $Q(D)x = 0$ admet, dans $\mathcal{F}$, des solutions non nulles. A chaque polynôme $Q \in \mathcal{Q}$ faisons correspondre d'une manière quelconque un élément $e_Q \in \mathcal{F}$ tel que $e_Q \neq 0$ et $Q(D)e_Q = 0$. Désignons par $\mathcal{B}_0$ l'ensemble de tous les éléments $D^k e_Q$ $(Q \in \mathcal{Q},\ 0 \leqslant k \leqslant q-1,\ q = \text{degré de } Q)$.

Les éléments de $\mathcal{B}_0$ sont linéairement indépendants. En effet, supposons que l'on ait, au contraire,

$$N_0(D)e_{Q_0} = N_1(D)e_{Q_1} + \ldots + N_r(D)e_{Q_r} \tag{11}$$

pour des polynômes N_i non nuls à coefficients de $\mathcal{C}$ et dont le degré est inférieur au degré de Q_i. L'élément $N_i(D)e_{Q_i}$ satisfait à l'équation $Q_i(D)x = 0$. Par conséquent, le second membre de (11) satisfait à l'équation

$$Q_1(D) \ldots Q_r(D)x = 0$$

et le premier membre de (11) satisfait à l'équation

$$Q_0(D)x = 0.$$

Les deux équations ont donc une solution commune non nulle. Par suite, le polynôme $Q_0(D)$ et le polynôme $Q_1(D) \ldots Q_r(D)$ ont un diviseur commun ([1], Proposition 4). Or, c'est impossible, car ce sont des polynômes irréductibles différents.

L'ensemble $\mathcal{B}_0$ étant défini, les ensembles consécutifs de la suite (10) seront définis par réccurence.

Supposons que les ensembles $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{p-1}$ soient déjà définis et que les éléments de

$$\bigcup_{i=0}^{p-1} \mathcal{B}_i$$

soient linéairement indépendants. Supposons que l'opération T soit définie sur les ensembles $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{p-2}$ de manière que $x \in \mathcal{B}_{i-1}$ entraîne $Tx \in \mathcal{B}_i$ et que $DTx = TDx + x$ pour $x \in \mathcal{B}_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$. L'opération T étant linéaire par hypothèse, cette opération est définie sur l'espace linéaire $\mathcal{E}_{p-2}$, en désignant généralement par $\mathcal{E}_j$ l'espace linéaire engendré par la base

$$\bigcup_{i=0}^{j} \mathcal{B}_i.$$

Pour $\mathcal{E}_{p-1}$ cette base se compose d'éléments

$$T^i D^k e_Q, \tag{12}$$

où

$$Q \in \mathcal{Q}, \quad 0 \leqslant k \leqslant q-1 \quad (q = \text{degré de } Q), \quad 0 \leqslant i \leqslant p-1. \tag{13}$$

On a les relations

$$D^k T^i e_Q = \sum_{j=0}^{\min(i,k)} j! \binom{i}{j} \binom{k}{j} T^{i-j} D^{k-j} e_Q$$

et

$$T^i D^k e_Q = \sum_{j=0}^{\min(i,k)} (-1)^j j! \binom{i}{j} \binom{k}{j} D^{k-j} T^{i-j} e_Q,$$

d'où il résulte que les bases (12) et $D^k T^i e_Q$, où (13), sont équivalentes.

Fixons un polynome Q choisi arbitrairement dans l'ensemble $\mathcal{Q}$. On a $Q(D)e_Q = 0$. Le vecteur

$$E_Q = \begin{bmatrix} e_Q \\ De_Q \\ \vdots \\ D^{q-1}e_Q \end{bmatrix}$$

satisfait à l'équation

$$(D - B)X = 0,$$

où le sens des symboles est le même qu'au paragraphe 2.

Posons généralement

$$T^i \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^i x_1 \\ \vdots \\ T^i x_q \end{bmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, p-1).$$

Les vecteurs $E_Q, TE_Q, \ldots, T^{p-1}E_Q$ satisfont à l'équation

(14) $$(D-B)^{p+1}X = 0.$$

Le déterminant de la matrice $D-B$ est égal au polynôme $Q(D)$, donc le déterminant de $(D-B)^{p+1}$ est $[Q(D)]^{p+1}$. Par suite, chacun des éléments

(15) $$T^i D^k e_Q \qquad (0 \leqslant i \leqslant p-1,\ 0 \leqslant k \leqslant q-1)$$

satisfait à l'équation (cf. [1], Proposition 5)

(16) $$[Q(D)]^{p+1}x = 0.$$

Cette équation est d'ordre $(p+1)q$, il résulte donc de la condition (II) que cette équation a, outre (15), encore q solutions linéairement indépendantes. Soit x_0 l'une de ces solutions. Alors tous les $(p+1)q$ éléments

(17) $$x_0, Dx_0, \ldots, D^{pq+q-1}x_0$$

sont linéairement indépendants. En effet, soit $P(D)$ le polynôme de D, de degré le plus petit possible, tel que $P(D)x_0 = 0$. Posons

$$[Q(D)]^{p+1} = P(D)P_0(D) + R(D),$$

où le degré de R est inférieur à celui de P. Il s'ensuit que x_0 satisfait à l'équation $R(D)x = 0$, d'où, en vertu de la définition de P, il résulte $R(D) = 0$. Le polynôme Q^{p+1} se divise donc par P et l'on a $P = Q^r$ $(r \leqslant p+1)$. Si r était inférieur à $p+1$, l'élément x_0 serait une solution de l'équation $[Q(D)]^p x = 0$ qui, par conséquence, aurait $qp+1$ solutions linéairement indépendantes: x_0 et (15). Or c'est impossible, car l'équation est de degré qp. Cette contradiction prouve que les éléments (17) sont linéairement indépendants dans $\mathcal{C}$.

Soit $B_{ij}(D)$ le déterminant adjoint à l'élément de la matrice $(D-B)^{p+1}$, qui se trouve dans la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne. Posons

$$B^*(D) = \begin{bmatrix} B_{11}(D) & \ldots & B_{q1}(D) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ B_{1q}(D) & \ldots & B_{qq}(D) \end{bmatrix}.$$

Alors on a

(18) $$(D-B)^{p+1}B^*(D) = [Q(D)]^{p+1}I$$

et, par conséquent,

$$(D-B)^{p+1}B^*(D) \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Le vecteur

$$X_0 = B^*(D) \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}(D)x_0 \\ \vdots \\ B_{1q}(D)x_0 \end{bmatrix}$$

est donc une solution de l'équation (14). Cette solution n'est pas nulle; en effet, si elle l'était, la première colonne de la matrice $B^*(D)$ serait nulle et l'on aurait $Q(D) = 0$, en vertu de (18).

Les éléments $DX_0, \ldots, D^pX_0$ sont encore des solutions de l'équation (14). Ces solutions et la solution X_0 sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{C}_Q$. En effet, supposons que l'on ait, au contraire,

(19) $$(C_0 + C_1D + \ldots + C_rD^r)B^*(D)x_0 = 0,$$

où $C_i \in \mathcal{C}_Q$, $C_r \neq 0$ et $r \leqslant p$. Le polynôme $B_{11}(D)$ est exactement de degré $(p+1)(q-1)$ et les polynômes restants $B_{ij}(D)$ sont de degré non supérieur à $(p+1)(q-1)$. Comme le déterminant de la matrice C_r est non nul, l'un au moins des polynômes $P_i(D)$ dans le vecteur

$$C_rB^*(D) = \begin{bmatrix} P_1(D)x_0 \\ \vdots \\ P_q(D)x_0 \end{bmatrix}$$

est de degré $(p+1)(q-1)$ et les polynômes $P_i(D)$ restants sont de degré $\leqslant (p+1)(q-1)$. Il s'ensuit que l'une au moins des coordonnées du vecteur représenté par le premier membre de (19) est de la forme $P(D)x_0$, où $P(D)$ est un polynôme de degré $(p+1)(q-1)+r < (p+1)q$. Cette contradiction prouve que les éléments $X_0, DX_0, \ldots, D^pX_0$ sont linéairement indépendants dans $\mathcal{C}_Q$.

Par conséquent, l'équation (16) a, outre (15), au moins une solution linéairement indépendante dans $\mathcal{C}_Q$; désignons-la par X_1.

Le vecteur DX_1 est encore une solution de l'équation (16). Cette équation a au plus $p+1$ solutions linéairement indépendantes dans $\mathcal{C}_Q$, donc DX_1 s'exprime par

$$(20) \qquad X_1 \quad \text{et} \quad E_Q,\ TE_Q, \ldots, T^{p-1}E_Q$$

et l'on peut écrire

$$(D-C)X_1 = A_0E_Q + A_1TE_Q + \ldots + A_{p-1}T^{p-1}E_Q \qquad (C,\ A_i \epsilon \mathcal{C}_Q).$$

En multipliant cette égalité par $(D-B)^p$, il vient

$$(D-B)^p(D-C)X_1 = 0.$$

L'équation $(D-B)^p(D-C)X = 0$ et l'équation (16) ont les mêmes $p+1$ solutions (20) linéairement indépendantes dans $\mathcal{C}_Q$, on a donc (cf. [1], Proposition 5) $C = B$ et

$$(D-B)X = A_0E_Q + A_1TE_Q + \ldots + A_{p-1}T^{p-1}E_Q.$$

Si l'on avait $A_{p-1} = 0$, on aurait, en multipliant cette égalité par $(D-B)^{p-1}$, l'égalité $(D-B)^pX_1 = 0$ et l'équation $(D-B)^pX = 0$ aurait $p+1$ solutions linéairement indépendantes dans $\mathcal{C}_Q$, ce qui est impossible. Donc $A_{p-1} \neq 0$.

L'élément

$$X_2 = \frac{p}{BA_{p-1}}(BX_1 + A_1E_Q + \ldots + A_{p-1}T^{p-2}E_Q)$$

satisfait à l'équation (16) et, de plus, on a

$$(21) \qquad DX_2 = BX_2 + pT^{p-1}E_Q.$$

Posons par définition

$$\begin{bmatrix} T^pe_Q \\ \vdots \\ T^pD^{q-1}e_Q \end{bmatrix} = T^pE_Q = X_2.$$

Alors on a, en vertu de $BE_Q = DE_Q$

$$BX_2 = T(T^{p-1}DE_Q) = T[D(T^{p-1}E_Q) - (p-1)T^{p-2}E_Q],$$

d'où, en vertu de (21),

$$DT^pE_Q = TDT^{p-1}E_Q + T^{p-1}E_Q.$$

Cette égalité vectorielle est équivalente aux q égalités

$$DTy_i = TDy_i + y_i \qquad (i = 1, \ldots, q),$$

où $y_i = T^{p-1}D^{i-1}e_Q$.

Nous avons ainsi prolongé la définition de l'opération T aux éléments de $\mathcal{B}_{p-1}$ de manière que l'égalité (1) soit satisfaite. En prolongeant cette opération sur l'ensemble linéaire $\mathcal{E}_{p-1}$ comme une opération linéaire, l'égalité (1) sera encore satisfaite. L'espace $\mathcal{B}_p$ est, par définition, l'ensemble des éléments Tx, où $x \epsilon \mathcal{B}_{p-1}$.

Tous les éléments des ensembles $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ sont linéairement indépendants. En effet, si l'on avait

$$\sum_{ij} c_{ij}T^iD^je_{Q_0} = \sum_{ijk} c_{ijk}T^iD^je_{Q_k} = x_0 \neq 0,$$

on aurait

$$[Q_0(D)]^px_0 = \prod_k [Q_k(D)]^px_0$$

et le polynôme $Q_0(D)$ aurait un diviseur commun avec le produit

$$\prod_k [Q_k(D)]^p,$$

ce qui n'est pas vrai. Ainsi l'indépendance est démontrée.

On peut définir par induction la suite infinie d'ensembles $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots$ et l'opération T sur l'espace linéaire engendré par la somme

$$\mathcal{B} = \bigcup_i \mathcal{B}_i.$$

Cet espace linéaire coïncide avec $\mathcal{F}$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{F}$. En effet, tout élément $x \epsilon \mathcal{F}$ satisfait à une équation $[Q_1(D)]^{p_1} \ldots [Q_r(D)]^{p_r}x = 0$ et toute solution de cette équation est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $T^iD^je_{Q_k}$.

L'existence de l'endomorphisme linéaire T est ainsi démontrée.

On peut remarquer que, dans la démonstration, nous n'avons profité de la condition (II) que sous une forme un peu plus faible: Lorsque Q est un polynôme irréductible et l'équation $Q(D)x = 0$ a q solutions linéairement indépendantes, l'équation $[Q(D)]^px = 0$ en a pq.

Travaux cités

[1] J. Mikusiński, *Sur les solutions linéairement indépendantes des équations différentielles à coefficients constants*, Studia Math. 16 (1957), p. 41-47.

[2] — *Sur les théorèmes d'unicité et le nombre de solutions linéairement indépendantes*, ibidem 16(1957), p. 95-98.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 9. 7. 1956