Sur les théorèmes d'unicité et le nombre de solutions linéairement indépendantes

par

J. MIKUSIŃSKI (Warszawa)

1. S. Drobot et J. Mikusiński [1] ont démontré, pour un espace abstrait très général, un théorème d'unicité pour les équations différentielles à coefficients constants d'ordre arbitraire. Un peu plus tard, J. Mikusiński [2] a démontré un théorème analogue pour des systèmes d'équations du premier ordre. Le théorème d'unicité pour les systèmes d'équations entraîne, trivialement, celui pour une seule équation d'ordre quelconque. Réciproquement, si l'unicité a lieu pour toute équation d'ordre arbitraire, l'unicité subsiste encore pour les systèmes d'équations. Nous le montrerons dans le paragraphe 5 de cette note.

Du théorème d'unicité on déduit, dans la théorie des équations différentielles linéaires, que (I) toute équation d'ordre n a au plus n solutions linéairement indépendantes, et, pareillement, que (II) tout système de n équations de premier ordre a au plus n solutions linéairement indépendantes. Dans cette note, nous démontrerons que les deux propositions (I) et (II) sont équivalentes *pour toute opération linéaire dans un espace linéaire quelconque*. Ce théorème est énoncé dans le paragraphe 3.

2. Soit $\mathcal{E}$ un espace linéaire sur un corps commutatif $\mathcal{C}$ de caractéristique 0. Supposons qu'une opération D, dite *dérivation*, fasse correspondre des éléments $Dx \in \mathcal{E}$ à certains éléments $x \in \mathcal{E}$ et que cette opération soit linéaire, c'est-à-dire que l'on ait, pour $a, b \in \mathcal{C}$ et $x, y \in \mathcal{E}$,

$$D(ax+by) = aDx+bDy. \tag{1}$$

Si un élément $x \in \mathcal{E}$ satisfait à une équation

$$a_n D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \ldots + a_0 x = 0 \qquad (n \geqslant 1,\ a_n \neq 0), \tag{2}$$

cet élément est évidemment „indéfiniment dérivable'', c'est-à-dire $D^i x$ est un élément de $\mathcal{E}$, quel que soit le nombre naturel i.

En introduisant des polynômes en D

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_0,$$

l'équation (2) peut s'écrire tout court

$$P(D)x = 0.$$

Désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les éléments de $\mathcal{E}$ qui sont une solution d'une équation quelconque de la forme (2). Si, pour un $x \epsilon \mathcal{F}$, on a $P(D)x = 0$, on a encore $P(D)(Dx) = 0$; donc la „dérivée" d'un élément de $\mathcal{F}$ est encore un élément de $\mathcal{F}$. De plus, *l'ensemble* $\mathcal{F}$ *est un espace linéaire*. En effet, si $x \epsilon \mathcal{F}$ et $y \epsilon \mathcal{F}$, il existe des polynômes $P(D)$ et $Q(D)$ tels que $P(D)x = 0$ et $Q(D)y = 0$. Il s'ensuit que

$$P(D)Q(D)(ax+by) = 0,$$

d'où la proposition.

Si l'on étudie le nombre de solutions des équations $P(D)x = 0$, il revient au même de considérer le sous-espace $\mathcal{F}$ au lieu de $\mathcal{E}$. L'opération D est un endomorphisme dans $\mathcal{F}$.

3. Nous allons démontrer que *les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(I) *Toute équation* $P(D)x = 0$ *d'ordre* n *a au plus* n *solutions linéairement indépendantes.*

(II) *Tout système de* n *équations*

$$Dx_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

a au plus n *solutions linéairement indépendantes.*

L'inclusion „(II) entraîne (1)" est triviale, il suffit donc démontrer que „(I) entraîne (II)".

4. Désignons par A la matrice (a_{ij}) et par X le vecteur (x_i). En posant, par définition, $DX = D(x_i) = (Dx_i)$, le système (3) s'écrira

$$DX = AX. \tag{4}$$

Il faut démontrer que l'équation (4) a au plus n solutions linéairement indépendantes.

Soit B une matrice d'éléments de $\mathcal{C}$, non singulière, qui transforme A dans la forme normale

$$BAB^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_p \end{bmatrix},$$

où les matrices J_i sont de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{\nu-1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

En particulier, certaines des matrices J_i peuvent se réduire à un seul élément $-a_0$, l'égalité $a_0 = 0$ n'étant pas exclue.

Soient $X_1, \ldots, X_q$ des solutions linéairement indépendantes de l'équation (4), c'est-à-dire telles que l'égalité $c_1X_1 + \ldots + c_qX_q = 0$ $(c_i \epsilon \mathcal{C})$ entraîne $c_1 = \ldots = c_q = 0$. Alors les éléments $BX_1, \ldots, BX_q$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$DX = (BAB^{-1})X. \tag{6}$$

Donc, au lieu de démontrer que l'équation (4) a au plus n solutions linéairement indépendantes, il suffit de démontrer que l'équation (6) en a au plus n. De plus, en tenant compte de la forme de la matrice BAB^{-1}, il suffit de démontrer que l'équation

$$DX = JX, \tag{7}$$

où J est de la forme (6) et X est un vecteur de ν éléments, a au plus ν solutions linéairement indépendantes.

Si le vecteur

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix}$$

est une solution de (7), on a $x_i = D^i x_1$ $(i = 0, \ldots, \nu-1)$, donc cette solution est déterminée univoquement par l'élément x_1. D'autre part, l'élément x_1 satisfait ([3], Proposition 3) à l'équation

$$(D^\nu + a_{\nu-1}D^{\nu-1} + \ldots + a_0)x = 0,$$

il peut donc exister d'après (I), au plus ν éléments x_1 qui sont linéairement indépendants. Par conséquent, il existe au plus ν solutions linéairement indépendants de (7), ce qui achève la démonstration.

5. Supposons maintenant qu'à chaque élément $x \epsilon \mathcal{F}$ on fasse correspondre un élément $x(0) \epsilon \mathcal{C}$ de manière que l'on ait généralement

$$(ax+by)(0) = ax(0) + by(0). \tag{10}$$

L'élément $x(0)$ peut être interprété comme *valeur initiale* de x. Cela étant, *les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *Toute solution* x *de l'équation* $P(D)x = 0$ *d'ordre* n, *satisfaisant aux conditions initiales* $x(0) = Dx(0) = D^{n-1}x(0) = 0$, *est nulle;*

(ii) *Toute solution* $x_1, \ldots, x_n$ *du système de* n *équations* (3), *satisfaisant aux conditions initiales* $x_1(0) = \ldots = x_n(0) = 0$, *est nulle.*

La démonstration de cette équivalence est plus élémentaire que pour (I) et (II).

L'inclusion „(II) entraîne (I)" se démontre trivialement.

Pour démontrer l'inclusion „(I) entraîne (II)", multiplions (3) par D^{j-1} $(j = 1, \ldots, n)$

$$D^j x_i = a_{i1}D^{j-1}x_1 + \ldots + a_{in}D^{j-1}x_n \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

De ces égalités il vient, en tenant compte de (10),

$$L^j x_i(0) = a_{i1}D^{j-1}x_1(0) + \ldots + a_{in}D^{j-1}x_n(0),$$

d'où successivement

$$Dx_i(0) = 0, \ \ldots, \ D^{n-1}x_i(0) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Or, tout élément x_i satisfait à l'équation d'ordre n, $P(D)x = 0$, où $P(D) = |a_{ij} - \delta_{ij}D|$ (cf. [3]). Donc, d'après (i), on a $x_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$, ce que nous voulions démontrer.

Travaux cités

[1] S. Drobot et J. Mikusiński, *Sur l'unicité des solutions de quelques équations différentielles dans les espaces abstraits (II)*, Studia Mathematica 11 (1950), p. 38-40.

[2] J. Mikusiński, *Un théorème d'unicité pour quelques systèmes d'équations différentielles, considérées dans les espaces abstraits*, ibidem 12 (1951), p. 80-83.

[3] — *Sur les solutions linéairement indépendantes des équations différentielles à coefficients constants*, ibidem 16 (1957), p. 41-47.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMI NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 15. 6. 1956

On determinants of Leżański and Ruston

by

R. SIKORSKI (Warszawa)

1. Ruston [3], [4] has developed recently a theory of determinants of linear equations

(1) $$x + Tx = x_0$$

in Banach spaces. His definition of determinants is given only for operators T belonging to the trace class and is based on the notion of the trace of linear[1]) operators. The definition of the trace and of the trace class is as follows.

Let X be a Banach space and Ξ — its conjugate. Let $\mathfrak{K}$ be the class of all linear operators from X into X, and $\mathfrak{K}_0$ — the class of all finitely dimensional operators from X into X, *i. e.*, $\mathfrak{K}_0$ is the class of all operators of the form[2])

(2) $$Kx = \sum_{i=1}^{m} \xi_i x \cdot x_i$$

where $\xi_i \in \Xi$, $x_i \in X$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. The norm of $K \in \mathfrak{K}$ is

$$\|K\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Kx\|.$$

Besides the norm $\| \ \|$ we shall also consider in $\mathfrak{K}_0$ the following norm:

$$\|K\|^* = \inf \sum_{i=1}^{m} \|\xi_i\| \cdot \|x_i\|,$$

where inf is taken over all representations (2) of the operator $K \in \mathfrak{K}_0$. It is easy to see that

(3) $$\|K\| \leqslant \|K\|^* \quad \text{for} \quad K \in \mathfrak{K}_0.$$

[1]) The word "linear" always means "additive and continuous".

[2]) We assume the following notation: the letters x, y (with indices, if necessary) will always denote elements of X, and the letters ξ, η — elements of Ξ. The symbol ξx denotes the value of the functional $\xi \in \Xi$ at the point $x \in X$. The symbol $\xi x \cdot x_0$ denotes the product of the scalar ξx with the element $x_0 \in X$. If K is an operator from X into X, then Kx is the value of K at the point $x \in X$. Consequently, ξKx denotes the value of the functional $\xi \in \Xi$ at the point $Kx \in X$.