Über die Verteilung der Fastperioden von fastperiodischen Funktionen auf Gruppen

von

S. HARTMAN (Wrocław)

Ist $f(x)$ eine komplexe Funktion auf einer Gruppe G, so wird $s \epsilon G$ eine *ε-Fastperiode* von f genannt, wenn $|f(xsy)-f(xy)|<\varepsilon$ für beliebige $x,y \epsilon G$ gilt. Im weiteren wird f stets eine festgesetzte fastperiodische Funktion bedeuten. Man weiß, daß für eine fastperiodische Funktion von Bohr die ε-Fastperioden bei beliebigem $\varepsilon>0$ relativ dicht auf der Geraden liegen, was samt der Stetigkeit eben die übliche Definition dieser Funktionen ausmacht. Auch andere Eigenschaften der Verteilung von Fastperioden sind für die Bohrschen Funktionen bekannt, die wir nun auf allgemeine fastperiodische Funktionen auf Gruppen zu übertragen suchen.

Satz I. *Für jedes $\varepsilon>0$ und jedes $t \epsilon G$ liegen ε-Fastperioden in der Folge t^n relativ dicht, d. h. es gibt eine solche Zahl l, daß unter den Elementen $t^{k+1}, t^{k+2}, \ldots, t^{k+l}$ immer eine Fastperiode auftritt.*

Den Beweis stützen wir auf einen elementaren Hilfssatz, der vielleicht auch für sich einiges Interesse beanspruchen darf.

Hilfssatz. *Liegen endlichviele Mengen $N_1, \ldots, N_r$ natürlicher Zahlen vor, die zusammen alle natürlichen Zahlen erschöpfen, und denken wir uns diese Mengen in wachsende (vielleicht endliche) Folgen $N_i=\{n_j^i\}$ geordnet, so hat zumindest eine davon die Eigenschaft* (A): *es gibt eine Zahl K derart, daß beliebig lange Abschnitte $n_{j_0}^i, n_{j_0+1}^i, \ldots, n_{j_0+s}^i$ mit $n_{j_0+m+1}^i - n_{j_0+m}^i < K$ $(m=0,\ldots,s-1)$ existieren.*

Wir beweisen es indirekt. Hat N_1 die Eigenschaft (A) nicht, so muß es eine solche Folge von Zahlenpaaren $\alpha_1, \alpha_1'; \alpha_2, \alpha_2'; \ldots$ geben, daß

$$\lim_{j\to\infty} (\alpha_j' - \alpha_j) = \infty$$

und daß zwischen α_j und α_j' keine Zahlen aus N_1 liegen. Nun seien β_1 und β_1' zwei Zahlen mit möglichst großem Abstand, welche die Bedingung

$\alpha_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_1' \leqslant \alpha_1'$ erfüllen und zwischen denen keine Zahlen aus N_2 liegen; analog seien $\beta_2, \beta_2'; \beta_3, \beta_3'; \ldots$ erklärt. Dann hat man

$$\lim_{j\to\infty} (\beta_j' - \beta_j) = \infty,$$

denn sonst würden sich wegen $\alpha_j' - \alpha_j \to \infty$ beliebig lange Abschnitte von N_2 mit beschränkten Differenzen finden, was der Annahme widerspräche. Analog schließen wir auf die Existenz der Zahlenpaare $\gamma_1, \gamma_1'; \gamma_2, \gamma_2'; \ldots$, die den Bedingungen $\beta_j \leqslant \gamma_j \leqslant \gamma_j' \leqslant \beta_j'$ und $\gamma_j' - \gamma_j \to \infty$ genügen, so daß zwischen γ_j und γ_j' keine Zahlen aus N_3 und demzufolge auch keine aus $N_1 \cup N_2 \cup N_3$ liegen. Nach r-maliger Anwendung dieser Schlußweise erhält man Paare von nichtbenachbarten Zahlen, zwischen welchen keine Zahlen aus $N_1 \cup \ldots \cup N_r$ liegen, was mit der Voraussetzung des Hilfssatzes im Widerspruch steht.

Nun beweisen wir Satz I. Nach der Definition der fastperiodischen Funktionen läßt sich die Gruppe G für ein beliebiges $\varepsilon>0$ mit endlichvielen Mengen $E_1, \ldots, E_r$ so überdecken, daß aus $t_1, t_2 \epsilon E_i$

$$|f(xt_1y) - f(xt_2y)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x, y \epsilon G$$

folgt. Wird ein $t \epsilon G$ gewählt, so bestehe die Klasse N_i $(i=1,\ldots,n)$ aus denjenigen natürlichen Zahlen k, für welche $t^k \epsilon E_i$. Laut Hilfssatz hat zumindest eine der Mengen N_i die Eigenschaft (A); dies sei die Menge N_1. Wenn $k, l \epsilon N_1$, $k<l$, so hat man

$$\sup_{x,y \epsilon G} |f(xt^{l-k}y) - f(xy)| < \varepsilon,$$

daher ist t^{l-k} eine ε-Fastperiode. Laut (A) kann man eine wachsende beliebig lange Folge $k_1, \ldots, k_s \epsilon N_1$ derart bilden, daß $k_{j+1}-k_j<K$ ist. Die Elemente $t^{k_2-k_1}, t^{k_3-k_1}, \ldots, t^{k_s-k_1}$ sind Fastperioden. Dabei können die Exponenten beliebig groß gemacht werden, weil s beliebig groß sein kann. Der erste Exponent und die Differenz zwischen zwei benachbarten überschreiten nicht die Zahl K. Mithin liegen die Fastperioden in der Folge $\{t^k\}$ relativ dicht und Satz I ist bewiesen.

Folgerung 1. Ist $f(x)$ fastperiodisch auf der Geraden und t eine beliebige reelle Zahl, so treten die ε-Fastperioden in der arithmetischen Progression kt relativ dicht auf.

Für die stetigen fastperiodischen Funktionen auf der Geraden, d. h. für die Bohrschen Funktionen, ist dieses Ergebnis bekannt.

Folgerung 2. Ist $f(x)$ fastperiodisch auf der als additive Gruppe betrachteten Folge der ganzen Zahlen, so treten die ε-Fastperioden in dieser Folge relativ dicht auf. Mithin ist $f(x)$ eine fastperiodische Folge im üblichen Sinne.

Von nun an setzen wir G als Abelsch voraus und untersuchen die Verteilung der Fastperioden in den arithmetischen Progressionen $t+ns$ $(n=0,1,\ldots)$. Abgesehen von dem durch den Satz I erledigten Fall $t=0$ wäre es unrichtig zu vermuten, daß in einer solchen Progression Fastperioden vorhanden sein müssen. Das Beispiel der Funktion $e^{i\pi x}$ $(-\infty<x<\infty)$ und der Folge $1+2n$ lehrt das Gegenteil: für $\varepsilon<2$ gibt es hier keine ganzzahligen ungeraden Fastperioden. Ist aber f eine Bohrsche Funktion, so treten ihre Fastperioden in jeder Progression auf, deren Differenz $s\neq 0$ für keine Fourierexponenten $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ von f und keine gazen $c_1,\ldots,c_n,d$ $(d\neq 0)$ die Gleichung $s(c_1\lambda_1+\ldots+c_n\lambda_n)=2\pi d$ erfüllt. Dieses leicht beweisbare Ergebnis werden wir als Sonderfall eines allgemeineren und präziseren Satzes (Satz III) erhalten, dem wir nun einige Überlegungen vorausschicken.

Es sei $f_t(x)=f(xt)$ $(t\in G)$. M^* bedeute das homomorphe Bild von G, das man durch die Zuordnung $t\to f$ erhält. Der Fastperiodizitätsbegriff bringt es mit sich, daß M^* bedingt kompakt in bezug auf die für zwei beschränkte Funktionen auf G durch

$$\varrho(f_1,f_2)=\sup_{x\in G}|f_1(x)-f_2(x)|$$

erklärte Entfernung ist. M sei die vollständige Hülle von M^*. Mithin ist M kompakt, und zwar ist M eine kompakte Gruppe, was bekannt ([3], p. 131) und übrigens leicht nachweisbar ist.

Es sei $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\chi_\nu(x)$ die Fourierentwicklung[1]) der Funktion f auf G. Wir bilden G mittels der Funktion

$$\psi(x)=\big(\chi_1(x),\chi_2(x),\ldots\big)$$

in die toroidale Gruppe $K^{\aleph_0}$ ab. $\overline{\psi(G)}$ bedeute die abgeschlossene Hülle von $\psi(G)$ in $K^{\aleph_0}$. Mithin ist $\overline{\psi(G)}$ eine kompakte Gruppe.

Satz II. *Die Gruppen M und $\overline{\psi(G)}$ sind isomorph und homöomorph.*

Vor allem beweisen wir, daß die Funktion ψ, obwohl explizit auf G erklärt, einen umkehrbar gleichmäßig stetigen Isomorphismus zwischen den Gruppen M^* und $\psi(G)$ bewerkstelligt. Wir zeigen zunächst, daß man zu jedem $\varepsilon>0$ und n ein δ finden kann mit folgender Eigenschaft: aus $\varrho(f_{t_1},f_{t_2})<\delta$ folgt für $\nu=1,\ldots,n$ die Ungleichung $|\chi_\nu(t_1)-\chi_\nu(t_2)|\leqslant\varepsilon$. Dies ergibt sofort, daß wenn $f_{t_1}=f_{t_2}$ ist, auch $\chi_\nu(t_1)=\chi_\nu(t_2)$ für jedes ν gilt, so daß die Funktion ψ die Elemente $t_1,t_2\in G$ nur dann trennt,

[1]) Die hier gebrauchten Begriffe und Sätze aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen sind im Buche von W. Maak [1] zu finden.

wenn sie in M^* unterscheidbar sind. Mithin dürfen wir ψ tatsächlich als eine Abbildung von M^* auf $\psi(G)$ auffassen, die außerdem auf M^* gleichmäßig stetig ist.

Zum Beweise der oben genannten Eigenschaften bedienen wir uns des Approximationssatzes in seiner verschärften Form: $f(x)$ ist der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge

$$S_q(x)=\sum_{\nu=1}^{n_q}k_\nu^{(q)}a_\nu\chi_\nu(x)\qquad\text{wobei}\qquad\lim_{q\to\infty}k_\nu^{(q)}=1\ \text{für jedes}\ \nu\ \text{ist.}$$

Setzt man

$$T_q(x)=S_q(t_1x)-S_q(t_2x),$$

so sind die Fourierkoeffizienten von $T_q(x)$ gleich

$$b_\nu^{(q)}=k_\nu^{(q)}a_\nu[\chi_\nu(t_1)-\chi_\nu(t_2)].$$

Nehmen wir an, daß

$$|T_q(x)|<\varepsilon_1\qquad(x\in G)\tag{2}$$

ist. Dann sind alle $b_\nu^{(q)}$ absolut kleiner als ε_1. Da

$$\lim_{q\to\infty}b_\nu^{(q)}=a_\nu[\chi_\nu(t_1)-\chi_\nu(t_2)]$$

ist, so hat man $|\chi_\nu(t_1)-\chi_\nu(t_2)|\leqslant\varepsilon_1/|a_\nu|$. Wird $\varepsilon_1=\min(\varepsilon|a_1|,\ldots,\varepsilon|a_n|)$ gesetzt, so wird $|\chi_\nu(t_1)-\chi_\nu(t_2)|\leqslant\varepsilon$ $(\nu=1,\ldots,n)$. Die Bedingung (2) ist befriedigt, wenn $\varrho(f_{t_1},f_{t_2})<\varepsilon_1/3$ ist und wenn q so groß gewählt wird, daß $\varrho(S_q,f)<\varepsilon_1/3$ ist.

Jetzt hat man zu zeigen, daß die umgekehrte Abbildung ψ^{-1} von $\psi(G)$ auf M^* eindeutig und gleichmäßig stetig ist. Es leuchtet aber ein, daß wenn die Werte $\chi_\nu(t_1)$ und $\chi_\nu(t_2)$ für $\nu=1,\ldots,n$ mit hinreichend großem n hinreichend wenig voneinander abweichen, die Ungleichung $|T_q(x)|<\varepsilon/3$ $(x\in G)$ für ein vorgegebenes q erfüllt werden kann. Ist dabei $\varrho(S_q,f)<\varepsilon/3$, so wird $\varrho(f_{t_1},f_{t_2})<\varepsilon$. Daraus ergibt sich sowohl die Eindeutigkeit, wie auch die gleichmäßige Stetigkeit von ψ^{-1}. Dank den bewiesenen Eigenschaften kann ψ zu einem Iso- und Homöomorphismus zwischen M und $\overline{\psi(G)}$ als kompakten Hüllen von M^* und $\psi(G)$ erweitert werden.

Satz III. *Ist $s\in G$ derart, daß aus $\chi_1^{r_1}(s)\cdot\ldots\cdot\chi_m^{r_m}(s)=1$ $(r_1,\ldots,r_m$ ganz) immer $\chi_1^{r_1}(x)\cdot\ldots\cdot\chi_m^{r_m}(x)\equiv 1$ $(x\in G)$ folgt, so treten die ε-Fastperioden in der arithmetischen Progression $t+ns$ für jedes $\varepsilon>0$, von einer höchstens abzählbaren Wertemenge abgesehen, für jedes t mit einer wohlbestimmten positiven Häufigkeit auf, die nur von ε, nicht aber von s noch von t abhängt.*

1° Den ersten Teil des Beweises führen wir nach einer Idee von C. Ryll-Nardzewski. Wir müssen die stetigen Charaktere von $\overline{M}$ ermitteln. Wegen Satz II genügt es dazu die Charaktere von $\overline{\psi(G)}$ zu kennen. Da die Gruppe $\overline{\psi(G)}$ eine abgeschlossene Untergruppe von $K^{\aleph_0}$ ist, so lassen sich ihre Charaktere nach dem allgemeinen Satz über die Erweiterung von Charakteren ([2], p. 138) als Teilcharaktere von $K^{\aleph_0}$ auffassen. Sie sind somit von der Form $X=x_1^{c_1}\cdot\ldots\cdot x_m^{c_m}$, wo x_i die i-te Koordinate im cartesischen Produkt $K^{\aleph_0}$ bedeutet und die Exponenten c_i ganz sind. Gehört der Punkt $\{x_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$ zu $\psi(G)$, so gibt es ein $t\epsilon G$, für welches $x_i=\chi_i(t)$ und daher $X(\{x_i\})=\chi_1^{c_1}(t)\cdot\ldots\cdot\chi_m^{c_m}(t)$ ist. Anders ausgedrückt: nur diejenigen Charaktere von M^* lassen sich zu Charakteren von M erweitern, die von der Form $\chi_1^{c_1}\cdot\ldots\cdot\chi_m^{c_m}$ sind.

2° Wir wollen beweisen, daß wenn s der Voraussetzung von Satz III genügt, so ist für jede auf M stetige Funktion φ und für jedes $t\epsilon G$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(t+js)=\int_M \varphi\, d\mu, \tag{3}$$

wo μ das normierte Haarsche Maß auf M bedeutet. Da φ sich beliebig genau durch Linearkombinationen von Charakteren der Gruppe M approximieren läßt, so genügt es (3) für die Charaktere zu beweisen.

Die Schreibweise $\varphi(t+js)$ ist abgekürzt, denn eigentlich sollte hier als Argument anstatt $t+js$ sein Bild in M^* also $f_{t+js}(\cdot)$ stehen, wir verzichten aber auf diese Formalität und fassen $t+js$ als Element von M^* auf, wobei wir beachten, daß zwei Elemente $t_1, t_2\epsilon G$ nur dann in M^* verschieden sind, wenn die Funktionen $f(t_1,x)$ und $f(t_2,x)$ nicht identisch auf G übereinstimmen.

Da unter dem Summenzeichen in (3) nur Werte von φ auf M^* stehen, so können sie, wenn φ ein Charakter ist, in der Form

$$\chi_1^{c_1}(t)\cdot\ldots\cdot\chi_m^{c_m}(t)\cdot\chi_1^{c_1 j}(s)\cdot\ldots\cdot\chi_m^{c_m j}(s)$$

geschrieben werden. Man setze

$$\chi_1^{c_1}(t)\cdot\ldots\cdot\chi_m^{c_m}(t)=g, \qquad \chi_1^{c_1}(s)\cdot\ldots\cdot\chi_m^{c_m}(s)=\gamma.$$

Ist φ der Hauptcharakter ($\varphi\equiv 1$ auf G), so ist (3) trivial. Andernfalls ist φ schon auf M^* nicht identisch 1 und gemäß der Eigenschaft von s folgt $\gamma\neq 1$. Da in diesem Falle $\int_M \varphi\, d\mu=0$, so hat man zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} g\sum_{j=0}^{n-1}\gamma^j=0.$$

Diese Formel ist evident, weil $|\gamma|=1$, $\gamma\neq 1$.

3° Die Relation (3) gilt auch für die „Riemannschen" Funktionen auf M, d. h. für solche Funktionen φ, die sich zwischen zwei stetige Funktionen φ_1, φ_2 einschließen lassen, deren Integrale beliebig wenig voneinander abweichen:

$$\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2, \qquad \int_M \varphi_2\, d\mu-\int_M \varphi_1\, d\mu<\varepsilon.$$

Die charakteristische Funktion einer Borelschen Menge $E\subset M$ ist „Riemannsch", wenn E „nach Jordan meßbar" ist, d. h. wenn der Rand von E das Maß μ gleich 0 hat. Aus der abzählbaren Additivität von μ geht hervor, daß es höchstens abzählbar viele ε-Werte gibt, für welche der Rand der offenen Kugel K_ε mit dem Mittelpunkt in der Gruppeneinheit (und das ist die Funktion $f(\cdot)$!) und vom Radius ε ein positives Maß hat. Gehört ε nicht zu diesen Ausnahmewerten und ist $\eta(x)$ die charakteristische Funktion von K_ε, so erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}\eta(t+js)=\mu(K_\varepsilon).$$

Mithin treten die n-Werte, für welche $t+ns\epsilon K_\varepsilon$ ist, mit der Häufigkeit $\mu(K_\varepsilon)$, also mit einer von t und s unabhängigen Häufigkeit auf. Die Relation $t+ns\epsilon K$ bedeutet aber nichs anderes, als daß die Ungleichung $|f(t+ns+x)-f(x)|<\varepsilon$ für jedes $x\epsilon G$ gilt, daß also $t+ns$ eine ε-Fastperiode ist. Dermaßen ist Satz III bewiesen.

Bemerkung. Es scheint zweifelhaft, ob sich Satz III für nicht-Abelsche Gruppen sinngemäß umformen läßt, es liegt nämlich die Folge ns in M^* dicht, wie aus den Prämissen des Beweises hervorgeht; in der „nicht-Abelschen" Schreibweise müßte daher s^n in M^* [2]) dicht liegen, also M^* Abelsch sein, und das, ist nicht möglich ohne daß die Funktion f genügend viele Elemente in G identifiziert.

[2]) Im nicht-Abelschen Fall besteht M^* aus den Funktionen $f_{t,u}(x)=f(txu)$.

Zitate

[1] W. Maak, *Fastperiodische Funktionen*, Berlin 1950.

[2] L. Pontrjagin, *Topological groups*, Princeton 1946.

[3] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Publications de l'Institut de Mathématiques de Clermont-Ferrand IV (1940).

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 20. 6. 1953