3. H. Messel ([7], S. 128) gab die Lösung der Gleichung (2) für einen Nukleonschauer in folgender Gestalt an: $m(\varepsilon, x) = e^{-\alpha x} H(\varepsilon, x)$, wobei

$$H(\varepsilon, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - i\infty}^{x_0 + i\infty} z^{-1} \varepsilon^{-z} e^{W(z)x} dz,$$

$$W(z) = \int_0^1 (\varepsilon')^z \left\{ \int_0^1 [w(\varepsilon', \varepsilon'') + w(\varepsilon'', \varepsilon')] \, d\varepsilon'' \right\} d\varepsilon'.$$

Aus der Abschätzung (1) folgt

$$\lim_{x \to \infty} H(\varepsilon, x) = \infty \quad \text{für} \quad 0 < \varepsilon < 1$$

und — für jedes $\beta > 0$ —

$$\lim_{x \to \infty} e^{-\beta x} H(\varepsilon, x) = 0 \quad \text{für} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Ähnliche Folgerungen kann man aus den Abschätzungen (19) für die von Jánossy und Messel ([6], S. 1104) angegebenen Lösungen der Gleichungen (20) ziehen.

Literaturnachweis

[1] N. Arley, *On the theory of stochastic processes and their application to the theory of cosmic radiations*, New York 1948.

[2] W. Feller, *On the theory of stochastic processes, with particular reference to applications*, Proceedings of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (1949), S. 403-432.

[3] P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York 1950.

[4] L. Jánossy, *Note on the Fluctuation Problem of Cascades*, Proc. of the Physical Society A. 63 (1950), S. 241-249.

[5] — *Note on the Fluctuation Problem of Cascades*, Proc. of the Physical Society A. 66 (1953), S. 117.

[6] — and H. Messel, *Fluctuations of the Electron-Photon Cascade — Moments of the Distribution*, Proc. of the Physical Society A. 63 (1950), S. 1101-1115.

[7] H. Messel, *On the fluctuation of a nucleon cascade in homogeneous nuclear matter and calculation of average numbers*, Proc. of the Royal Irish Academy A. 54 (1951), S. 125-135.

[8] R. E. A. C. Paley and N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, New York 1934.

[9] L. Takács, *Occurrence and coincidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration*, Acta Mathematica Acad. Scient. Hung. II. (3-4) (1951), S. 275-298.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 12. 9. 1954

Lösung eines Problems von Herrn Hartman

von

P. SZÜSZ (Budapest)

In der vorliegenden Arbeit werden folgende Bezeichnungen benützt: Ist ω eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl und I ein Teilintervall von $(0,1)$, so bezeichnet $N_\omega(n, I)$ die Anzahl derjenigen ganzen Zahlen ν $(1 \leqslant \nu \leqslant n)$, für die $(\nu\omega) \epsilon I$ gilt, wobei $(\nu\omega)$ der Bruchteil von $\nu\omega$ $\big((\nu\omega) = \nu\omega - [\nu\omega]\big)$ ist. Sind α und β zwei Zahlen $(0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1)$ und I ein zweidimensionales Teilintervall des Einheitsquadrats der z-Ebene, so bezeichnet $N_{\alpha,\beta}(n, I)$ die Anzahl der ganzen Zahlen ν $(1 \leqslant \nu \leqslant n)$, für die der Punkt $z_\nu = (\nu\alpha) + i(\nu\beta)$ zu I gehört.

Es ist schon lange bekannt, daß falls ω irrational ist, zwar die asymptotische Relation

$$\big|N_\omega(n, I) - n|I|\big| = O(n)\ ^{1})$$

gilt ($|I|$ bedeutet die Länge von I), die Differenz

$$\big|N_\omega(n, I) - n|I|\big|$$

aber im allgemeinen nicht beschränkt bleibt (Behnke [1]).

Die Größenordnung des Wachstums hängt von der Kettenbruchentwicklung von ω ab. Andererseits gibt es nach Ostrowski[2]) eine unendliche, in $(0,1)$ überall dicht liegende Zahlenmenge, nämlich die Zahlenmenge

$$l_{\nu,\mu} = |(\nu\omega) - (\mu\omega)| \qquad (\nu, \mu = 0, 1, \ldots)$$

derart, daß

$$\big|N_\omega(n, I) - n|I|\big| = O(1)$$

ist, sobald nur $|I| = l_{\nu,\mu}$ ist; die Schranke, die von $\big|N_\omega(n, I) - n|I|\big|$ nicht überschritten wird, hängt lediglich von $l_{\nu,\mu}$ ab, also weder von n noch von der speziellen Lage von I.

S. Hartman hat die Frage aufgeworfen, ob ein analoger Satz gilt, wenn wir den mehrdimensionalen, zunächst zweidimensionalen Fall

---

[1]) H. Weyl [5].

[2]) Ostrowski [3]. Dieser Satz wurde früher in schwächerer Form von Hecke bewiesen.

betrachten. Genauer: es seien α,β zwei zwischen 0 und 1 gelegene Zahlen, für die α, β, 1 linear unabhängig sind, I ein achsenparalleles Teilintervall des Einheitsquadrats der z-Ebene ($z=x+iy$), dessen Seiten $(q\alpha)$ bzw. $(q\beta)$ sind (q natürlich). Dann soll entschieden werden, ob die Relation

$$|N_{\alpha,\beta}(n,I)-(q\alpha)(q\beta)n|=O(1) \tag{1}$$

gilt (Hartman [2]).

In einer früheren Note[3]) habe ich für spezielle schiefwinklige Parallelogramme einen zu (1) analogen Satz bewiesen. Aus diesem Satz leitete ich einen äußerst einfachen Beweis, für die — natürlich längst bekannte — Tatsache her, daß für ein linear unabhängiges Tripel $\alpha,\beta,1$ die Punkte

$$z_\nu=(\nu\alpha)+i(\nu\beta) \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

im Einheitsquadrat der z-Ebene gleichverteilt liegen.

Nun ist es mir gelungen, die Hartmansche Frage im negativen Sinne zu entscheiden. Ich konstruiere nämlich ein Zahlenpaar α,β derart, daß, wenn I das Intervall $0\leqslant x<\alpha$, $0\leqslant y<\beta$ bedeutet, die Relation

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|N_{\alpha,\beta}(n,I)-\alpha\beta n|=\infty \tag{2}$$

gilt.

Ob sich in dieser Richtung ein allgemeiner Satz aussprechen läßt, d. h. ob (2) für alle, oder mindestens für alle Zahlenpaare, für die 1, α,β linear unabhängig sind, weiß ich nicht. Ich beweise nur, daß (1) im allgemeinen nicht gilt, nicht einmal, wenn $q=1$ ist.

1. Es sei also I das Teilintervall $0\leqslant x<\alpha$, $0\leqslant y<\beta$ des Einheitsquadrats der z-Ebene ($z=x+iy$).

Zunächst leiten wir einen brauchbaren Ausdruck für $N_{\alpha,\beta}(n,I)$ her. $N_{\alpha,\beta}(n,I)$ ist definitionsgemäß gleich der Anzahl der natürlichen $\nu\leqslant n$, für die die Relationen

$$(\nu\alpha)<\alpha, \tag{3}$$ $$(\nu\beta)<\beta \tag{4}$$

gleichzeitig gelten. Die ν (und nur diese) für welche (3) gilt, haben offenbar die Gestalt

$$[k/\alpha+1] \qquad (k=1;2,\ldots,[n\alpha]). \tag{5}$$

[3]) P. Szüsz, *Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats*, Acta Math. Hung. 5 (1954), S. 35-38.

Zusatz bei der Korrektur. Dort ist mir eine Ungenauigkeit unterlaufen. Der Satz lautet richtig wie folgt: Es seien α und β zwischen Null und Eins gelegene Zahlen; ferner sei q eine natürliche Zahl mit $(q\alpha)\leqslant(q\beta)$. Ist dann I_q ein auf das Einheitsquadrat reduziertes halbabgeschlossenes Parallelogramm, dessen Seiten mit den komplexen Zahlen $(q\alpha)/(q\beta)$ und $(q\alpha)+i(q\beta)$ repräsentiert werden können, so gilt $|N_{\alpha,\beta}(n,I_q)-(q\alpha)n|=O(1)$.

Im folgenden setzen wir α und β als irrational voraus. Damit (3) und (4) gleichzeitig gelten, muß wegen (5) und (4)

$$([k/\alpha+1]\beta)<\beta \tag{6}$$

sein. Es sei p eine beliebige reelle Zahl. $[k/\alpha+1]\beta<p$ ist gleichbedeutend mit $[k/\alpha]\leqslant[p/\beta-1]$, woraus $k/\alpha<[p/\beta]$, also

$$k\leqslant[\alpha[p/\beta]] \tag{7}$$

folgt.

$N_{\alpha,\beta}(n,I)$ setzt sich aus der Anzahl der k, für die $[k/\alpha+1]\beta<\beta$ gilt, dann derjenigen k, für die $1\leqslant[k/\alpha+1]\beta<1+\beta$ gilt, usw. zusammen. Daher ist wegen (7)

$$N_{\alpha,\beta}(n,I)=\sum_{0\leqslant\nu\leqslant n\beta}\{[[(\nu+\beta)/\beta]\alpha]-[[\nu/\beta]\alpha]\}. \tag{8}$$

Ferner ist $[[(\nu+\beta)/\beta]\alpha]-[[\nu/\beta]\alpha]$ gleich 1 oder 0, je nach dem ob die Ungleichung $1-\alpha\leqslant([\nu/\beta]\alpha)$ gilt oder nicht. Daher ist

$$N_{\alpha,\beta}(n,I)=\sum_{\substack{0\leqslant\nu\leqslant n\beta\\ 1-\alpha\leqslant([\nu/\beta]\alpha)}}1. \tag{9}$$

2. Wir benötigen drei Hilfssatze.

Hilfssatz 1. *Für jedes natürliche l und jedes ganze m ist*

$$N_{l\alpha}(n/l\alpha,|m\alpha,(m+1)\alpha|)=N_{1/l\alpha}(n,((l-m-1)/l,(l-m)/l))+O(1), \tag{10}$$

wobei sämtliche hier auftretenden Intervalle mod 1 *reduziert zu verstehen sind, also möglicherweise in zwei Intervalle zerfallen.*

Beweis. Wir bezeichnen mit I_m das Intervall $|m\alpha,(m+1)\alpha|$, welches natürlich (mod 1) reduziert worden ist. Die Relation $\nu+m\alpha<rl\alpha<\nu+(m+1)\alpha$ (ν ganz) gilt dann und nur dann, wenn r eine ganze Zahl zwischen $(\nu+m\alpha)/l\alpha$ und $[\nu+(m+1)\alpha]/l\alpha$ ist. Darum hat man

$$N_{l\alpha}(n/l\alpha,I_m)=\sum_{0\leqslant\nu<n}\{[(\nu+(m+1)\alpha)/l\alpha]-[(\nu+m\alpha)/l\alpha]\}+O(1)$$
$$=\sum_{\substack{0\leqslant\nu<n\\ (l-1)/l\leqslant(\nu/l\alpha+m/l)}}1+O(1),$$

also

$$N_{l\alpha}(n/l\alpha,I_m)=N_{1/l\alpha}(n,((l-m-1)/l,(l-m)/l))+O(1).$$

Hilfssatz 2. *Es seien: ω eine beliebige Irrationalzahl, $\zeta_1,\zeta_2,\ldots$ die vollständigen Quotienten der Kettenbruchentwicklung von ω, $b_0,b_1,\ldots$ ihre Teilnenner und $A_1/B_1,A_2/B_2,\ldots$ die irreduziblen Näherungsbrüche von ω. Es sei B_r ein gegebener Näherungsnenner, l eine natürliche Zahl, für die*

$$(B_r,l)=1 \tag{11}$$

ist. Dann gilt für natürliche ν, l, *wobei* $\nu < B_r$, $l < b_{r+1}/2$ *ist, und ganze* k

$$|(\nu\omega) - k/l| > |B_{r-1}\omega - A_{r-1}|/2l. \tag{12}$$

Beweis. Bekanntlich ist

$$\left|\frac{B_r\omega - A_r}{B_{r-1}\omega - A_{r-1}}\right| = \frac{1}{\zeta_{r+1}} < \frac{1}{b_r}. \tag{13}$$

Für die Kettenbruchentwicklung von ω gilt bekanntlich (Perron [4], S. 53) das Gesetz der besten Näherung: für jedes natürliche v, wobei $v < B_r$ und jedes ganze u hat man

$$|v\omega - u| \geqslant |B_{r-1}\omega - A_{r-1}|. \tag{14}$$

Setzt man insbesondere $u = [v\omega]$, so folgt

$$(v\omega) \geqslant |B_{r-1}\omega - A_{r-1}| \qquad (v < B_r); \tag{15}$$

setzt man $u = [v\omega]+1$, so erhält man für $v < B_r$ $|v\omega - [v\omega] - 1| = 1 - (v\omega) > |B_{r-1}\omega - A_{r-1}|$, also

$$(v\omega) \leqslant 1 - |B_{r-1}\omega - A_{r-1}|. \tag{16}$$

Nun ist

$$|(\nu\omega) - k/l| = |l(\nu\omega) - k|/l = |(l\nu\omega) + T|/l, \tag{17}$$

wobei T irgendeine ganze Zahl ist, auf deren Wert es nicht ankommt. Ist nun $\nu < B_r/l$, so gilt wegen (14) und (17)

$$|(\nu\omega) - k/l| \geqslant |B_{r-1}\omega - A_{r-1}|/l.$$

Es sei jetzt

$$B_r/l \leqslant \nu < B_r. \tag{18}$$

νl läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$\nu l = qB_r + s, \tag{19}$$

wobei

$$1 \leqslant q < l \leqslant b_{r+1}/2, \tag{20}$$

$$1 \leqslant s \leqslant B_r - 1 \tag{21}$$

ist. (20) gilt wegen (18) und auf Grund der Voraussetzung $\nu < B_r$. Die erste Hälfte von (21) kann man folgendermaßen beweisen. Wäre $s = 0$, so müßte wegen (11) B_r ein Teiler von ν sein, was der zweiten Hälfte von (18) widerspricht; die zweite Hälfte von (21) ist trivial. Es gilt also für $B_r/l \leqslant \nu < B_r$

$$|(\nu\omega) - k/l| = |(\nu l\omega) + T|/l = |(qB_r\omega + s\omega) + T|/l, \tag{22}$$

wobei $1 \leqslant q < l$, $1 \leqslant s \leqslant B_r - 1$ sind.

Offenbar haben wir für beliebige positive $x_1, x_2, \ldots, x_m$, die der Bedingung $n \leqslant (x_1) + (x_2) + \ldots + (x_m) < n+1$ genügen, die Gleichheit

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m) = (x_1) + (x_2) + \ldots + (x_m) - n. \tag{23}$$

Nach einer bekannten Formel der Kettenbruchlehre ist

$$B_r\omega - A_r = (-1)^r/(B_r\zeta_{r+1} + B_{r-1}); \tag{24}$$

$B_r\omega - A_r$ ist also positiv oder negativ, je nachdem r gerade oder ungerade ist.

1° Es sei zuerst r gerade. Da $B_r\omega - A_r$ positiv und infolge von (24) jedenfalls kleiner als 1 ist, so gilt

$$A_r = [B_r\omega], \qquad B_r\omega - A_r = (B_r\omega);$$

also, da die rechte Seite von (24) kleiner als $1/B_r b_{r+1}$ ist, gilt auch

$$(B_r\omega) < 1/B_r b_{r+1}. \tag{25}$$

Ist $q \leqslant b_{r+1}/2$, so ist wegen (25), (23), (21), (16) und (13)

$$(qB_r\omega) + (s\omega) = q(B_r\omega) + (s\omega) < q(B_r\omega - A_r) + 1 - |B_{r-1}\omega - A_{r-1}|$$
$$< q|B_{r-1}\omega - A_{r-1}|/b_{r+1} + 1 - |B_{r-1}\omega - A_{r-1}| < 1 - |B_{r-1}\omega - A_{r-1}|/2 < 1,$$

also, wegen (22) und nochmaliger Anwendung von (23),

$$|(\nu\omega) - k/l| = |(qB_r\omega + S\omega) + T|/l = |q(B_r\omega) + (s\omega) + T|/l, \tag{26}$$

wobei T (wie bei (17)) eine ganze Zahl ist, auf deren Wert es nicht ankommt. Nun ist aber auf Grund von (14), wobei wir s statt des dortigen v und $-T + [s\omega]$ statt des dortigen u setzen,

$$|(s\omega) + T| \geqslant |B_{r-1}\omega - A_{r-1}|,$$

während wegen $q \leqslant (b_r + 1)/2$ und (13)

$$q(B_r\omega) = q|B_r\omega - A_r| \leqslant q|B_{r-1}\omega - A_{r-1}|/b_{r+1} \leqslant (B_{r-1}\omega - A_{r-1})/2$$

ist. Hieraus und aus (26) folgt

$$|(\nu\omega) - k/l| = |q(B_r\omega) + (s\omega) + T|/l$$
$$\geqslant \big||(s\omega) + T| - q(B_r\omega)\big|/l > |B_{r-1}\omega - A_{r-1}|/2l,$$

womit (12) für gerade r bewiesen ist.

2° Es sei nun r ungerade. Die Rechnung verläuft völlig analog; wir leiten die zu (25) und (26) analogen Formeln her ((25) und (26) waren ja die wesentlichen Punkte des Beweises im Falle eines geraden r) und verzichten dann auf die weitere Rechnung. Ist r ungerade, so folgt aus (24)

$$A_r - B_r\omega = 1/(B_r\zeta_{r+1} + B_{r-1}) < 1/B_r b_{r+1},$$

also $A_r=[B_r\omega]+1$, daher ist nach (24)

$$|A_r-B_r\omega|=1-(B_r\omega)<1/(B_rb_r+1),$$
(27)
$$(B_r\omega)>1-1/B_rb_{r+1}.$$

Für $q<b_{r+1}/2$ haben wir infolge von (23) und (27)

$$(qB_r\omega)=q(B_r\omega)-(q-1)=1-q\big(1-(B_r\omega)\big)=1-q|B_r\omega-A_r|,$$

also wegen (13) und (14)

$$(qB_r)+(s\omega)\geqslant 1-q|B_r\omega-A_r|+|B_{r-1}\omega-A_{r-1}|$$
$$\geqslant 1-q|B_{r-1}\omega-A_{r-1}|/b_{r+1}+|B_{r-1}\omega-A_{r-1}|\geqslant 1+|B_{r-1}\omega-A_{r-1}|/2>1.$$

Daher gilt nach (23) für $q\leqslant b_{r+1}/2$, $1\leqslant s<B_r$,

$$(qB_r\omega+s\omega)=1-q\big(1-(B_r\omega)\big)+(s\omega)-1=(s\omega)-q\big(1-(B_r\omega)\big).$$

Hieraus folgt wegen (22)

(28) $$|(\nu\omega)-k/l|=|(qB_r\omega+s\omega)+T|/l=|(s\omega)-q\big(1-(B_r\omega)\big)+T|/l,$$

und der weitere Beweis kann genau so geführt werden, wie im Falle eines geraden r.

Hilfssatz 3. *Es sei l eine gegebene natürliche Zahl. Mit $b_0,b_1,\ldots$ werden die Teilnenner, mit $B_0,B_1,\ldots$ die Näherungsnenner der Kettenbruchentwicklung von $1/l\alpha$ bezeichnet. Ist für irgendein r*

(29) $$(B_r,l)=1,$$

so gilt für jedes natürliche $c\leqslant b_{r+1}/2l$ und für ganze m

(30) $$N_{l\alpha}\big(cB_r/l\alpha,\big((m\alpha,(m+1)\alpha)\big)=cN_{l\alpha}\big(B_r/l\alpha,\big(m\alpha,(m+1)\alpha\big)\big)+O(1),$$

wobei $O(1)$ so zu verstehen ist, daß die Schranke, die vom Glied $O(1)$ nicht überschritten wird, nur von α, also weder von l noch von B_r, noch von c abhängt.

(Für unsere Zwecke würde es auch genügen, daß $O(1)$ von c und b_{r+1} unabhängig ist.)

Beweis. Wegen (10) genügt es die Gleichung

(31) $$N_{1/l\alpha}\big(cB_r,\big((l-m-1)/l,(l-m)/l\big)\big)=cN_{1/l\alpha}\big(B_r,\big((l-m-1)/l,(l-m)/l\big)\big)$$

für $c<b_{r+1}/2l$ zu beweisen.

Wir setzen der Kürze halber $1/l\alpha=\omega$; die b und B haben dieselbe Bedeutung wie im Hilfssatz 2. Wir bezeichnen mit $I_{l,k}$ das Intervall $\big(k/l,(k+1)/l\big)$ $(k=0,1,\ldots,l-1)$. Wenn wir zeigen, daß jedem ν mit $(\nu\omega)\in I_{l,k}$ und jedem $q=1,2,\ldots,[b_{r+1}/2l-1]$ eineindeutig ein ν_q zugeordnet werden kann, das den Bedingungen $(\nu_q\omega)\in I_{l,k}$, $qB_r\leqslant\nu_q<(q+1)B_r$ genügt, so sind wir am Ziel.

Wir teilen die ν $(0\leqslant\nu<[b_{r+1}/2l-1]B_r)$ in Restklassen mod B_r ein. Für jedes ν ist $\nu=qB_r+s$ mit irgendeinem ganzen q $(0\leqslant q<b_{r+1}/2l)$ und irgendeinem ganzen s $(0\leqslant s\leqslant B_r-1)$. Ist r gerade, so haben wir auf Grund der bereits gebrauchten Formel $(qB_r\omega+s\omega)=q(B_r\omega)+(s\omega)$ und wegen der Formel (13)

(32) $$(\nu\omega)-(s\omega)=q(B_r\omega)<q|B_{r-1}\omega-A_{r-1}|/b_{r+1}\leqslant|B_{r-1}\omega-A_{r-1}|/2l.$$

Der Abstand der Punkte $(s\omega)$ $(s=1,2,\ldots,B_r-1)$ von jedem Punkt k/l $(k=0,1,\ldots,l)$ ist nach Hilfssatz 2 größer als $|B_{r-1}\omega-A_{r-1}|/2l$. Hieraus und aus (32) folgt, daß für $\nu=qB_r+s$ $(q<b_{r+1}/2l, 0<s<B_r)$ die Relationen $(s\omega)\in I_{l,k}$ und $(\nu\omega)\in I_{l,k}$ äquivalent sind.

Es sei $s=0$. Es handelt sich also um die Vielfachen von B_r. Nach (25), (23) und (13) ist für $q\leqslant b_{r+1}/2l$

$$(qB_r\omega)=q(B_r\omega)=q|B_r\omega-A_r|<q|B_{r-1}\omega-A_{r-1}|/b_{r+1}<1/2l,$$

sämtliche Vielfache von $(B_r\omega)$ liegen also im Intervall $(0,1/l)$. Hiermit ist Hilfssatz 3 für gerade r bewiesen.

Es sei r ungerade. Die Rechnung verläuft völlig analog; die Rolle von (32) übernimmt dann die genau so beweisbare Formel (wir erinnern an die Bedeutung von q und s: $q=1,2,\ldots[b_{r+1}/2l-1]$; $s=0,1,\ldots,B_r-1$; $\nu=qB_r+s$)

(33) $$(s\omega)-(\nu\omega)=q\big(1-(B_r\omega)\big)<q|B_{r-1}\omega-A_{r-1}|/b_{r+1}<|B_{r-1}\omega-A_{r-1}|/2l.$$

Das Ergebnis ist für $s=1,2,\ldots,B_r-1$ genau dasselbe, wie im Falle eines geraden r für $s=0$ (also für die Zahlen $(qB_r\omega)$ gilt $(qB_r\omega)\in\big((l-1)/l,1\big)$).

3. Nun sind wir in der Lage, unser Gegenbeispiel zu konstruieren. Nach (9) gilt für jedes natürliche m

(34) $$N_{\alpha,\beta}(n,I)=\sum_{\substack{0\leqslant\nu\leqslant n\beta\\ 1-\alpha\leqslant([\nu/\beta]\alpha)}}1+O(1)=\sum_{s=0}^{m-1}\sum_{\substack{0\leqslant\nu\leqslant n\beta\\ 1-\alpha\leqslant([\nu/\beta]\alpha)\\ \nu\equiv s\ (\mathrm{mod}\, m)}}1+O(1).$$

Für den Rest dieser Arbeit bezeichnen $b_0,b_1,\ldots$ die Teilnenner und $B_0,B_1,\ldots$ die Näherungsnenner der Kettenbruchentwicklung von $1/\beta$. Die neuen Bezeichnungen haben also mit den in den Hilfssätzen 2-3 gebrauchten nichts zu tun.

Ist r gerade, $q<b_{r+1}$, $s<B_r$, so gilt

(35) $$[(qB_r+s)/\beta]=q[B_r/\beta]+[s/\beta].$$

Ist nämlich für positive $x_1,x_2,\ldots,x_k$, $(x_1)+(x_2)+\ldots+(x_k)<1$, so gilt

$$[x_1+x_2+\ldots+x_k]=[x_1]+[x_2]+\ldots+[x_k];$$

es genügt also das Bestehen der Ungleichung

$$q(B_r/\beta)+(s/\beta)<1$$

nachzuweisen. Dies folgt aber sofort aus (13) und (16), wenn wir $1/\beta$ statt ω und s statt des dortigen v setzen (die Bedeutung von B_r hier und in (13), (16) stimmt zufällig überein).

Wir setzen in (34) $m=B_r$ mit geradem r, dann haben wir

$$N_{\alpha,\beta}(n,I)=\sum_{s=0}^{B_r-1}\sum_{\substack{0\leqslant\nu\leqslant n\beta\\ \nu\equiv s\ (\mathrm{mod}\ B_r)\\ 1-\alpha<([\nu/\beta]\alpha)}}1+O(1)=\sum_{s=0}^{B_r-1}\sum_{\substack{0\leqslant q<(n\beta-s)/B_r\\ 1-\alpha<([(qB_r+s)/\beta]\alpha)}}1+O(1). \tag{36}$$

Setzt man noch

$$n<B_r b_{r+1}/\beta, \tag{37}$$

so genügen die q-Werte im letzten Glied von (36) folgender Ungleichung:

$$0\leqslant q<(B_r b_{r+1}-s)/B_r<b_{r+1};$$

darnach kann man die zweite Bedingung für q in demselben Ausdruck laut (35) umformen. Es folgt also für $n<B_r b_{r+1}/\beta$

$$\begin{aligned}N_{\alpha,\beta}(n,I)&=\sum_{s=0}^{B_r-1}\sum_{\substack{0\leqslant q<(n\beta-s)/B_r\\ 1-\alpha<(q[B_r/\beta]\alpha+[s/\beta]\alpha)}}1+O(1)\\ &=\sum_{s=0}^{B_r-1}N_{[B_r/\beta]\alpha}\Big((n\beta-s)/B_r,\big(1-\alpha-([s/\beta]\alpha),1-([s/\beta]\alpha)\big)\Big)+O(1)\\ &=\sum_{s=0}^{B_r-1}N_{[B_r/\beta]\alpha}\Big(n\beta/B_r,\big(1-\alpha-([s/\beta]\alpha),1-([s/\beta]\alpha)\big)\Big)+O(B_r),\end{aligned}$$

letzteres wegen der Tatsache, daß man durch Ersetzung von $(n\beta-s)/B_r$ durch $n\beta/B_r$ in jedem Summanden einen Fehler begeht, dessen absoluter Betrag höchstens gleich 1 ist. Auf Grund von Hilfssatz 1 erhält man

$$N_{\alpha,\beta}(n,I)=\sum_{s=0}^{B_r-1}N_{1/[B_r/\beta]\alpha}\left(\frac{n\beta}{B_r}\left[\frac{B_r}{\beta}\right]\alpha,I_s\right)+O(B_r), \tag{38}$$

wobei wir mit I_s das Intervall

$$I_s=\left(\frac{([B_r/\beta]+[s/\beta]}{[B_r/\beta]},\frac{[B_r/\beta]+[s/\beta]+1}{[B_r/\beta]}\right) \tag{39}$$

bezeichnen.

Alles, was wir bewiesen haben, gilt allgemein. Nun versuchen wir α und β geeignet zu wählen.

Die Teilnenner $b_0,b_1,\ldots$ von $1/\beta$ sollen folgende Eigenschaften besitzen: für jedes gerade r sei

$$[B_r/\beta]=P \quad (P=\text{Primzahl}), \tag{40}$$

$$b_r\geqslant B_{r-1}^6 \quad (r=1,2,\ldots). \tag{41}$$

Daß diese beiden Bedingungen gleichzeitig befriedigt werden können, beweist man folgendermaßen: Ist r gerade, so ist $[B_r/\beta]$ gleich dem Näherungszähler des r-ten Näherungsbruchs von $1/\beta$. Zwei konsekutive Näherungszähler einer Kettenbruchentwicklung sind bekanntlich teilerfremd. Hieraus, aus der bekannten rekurrenten Formel für die Näherungszähler und aus dem Dirichletschen Satz über die Primzahlen in einer arithmetischen Progression folgt sofort, daß (40) bei beliebig schnell wachsenden b_r, also insbesondere unter Berücksichtigung von (41), erfüllt werden kann. Ist β gegeben (wobei angenommen wird, daß (40) und (41) erfüllt sind), so konstruieren wir eine Zahl α mit den näher zu bestimmenden Eigenschaften.

Wir bezeichnen mit $a_0,a_1,\ldots$ die Teilnenner und mit $Z_1/A_1,Z_2/A_2,\ldots$ die Näherungsbrüche von $1/\alpha$; ähnlich bedeuten $a_0^{(r)},a_1^{(r)},\ldots$ bzw. $Z_1^{(r)}/A_1^{(r)},\ldots$ die Teilnenner bzw. die Näherungsbrüche von $1/[B_r/\beta]\alpha$ $(r=1,2,\ldots)$. Die Zahl α soll folgende Bedingung erfüllen:

Es existieren unendlichviele r, die mit $r_1,r_2,\ldots$ bezeichnet werden mögen, derart, daß für ein $\lambda=\lambda(r)$

$$B_r<A_\lambda^{(r)}<B_r^{2,5}, \tag{42}$$

$$a_{\lambda+1}^{(r)}>A_\lambda^{(r)4}, \tag{43}$$

$$([B_r/\beta],A_\lambda^{(r)})=1. \tag{44}$$

Wir zeigen, daß sich für $1/\alpha$ ein Kettenbruch angeben läßt, der all diesen Bedingungen genügt. Zu diesem Zwecke beweisen wir, daß man beliebig viele gerade Zahlen $r_1<\ldots<r_k$ und geeignete Zahlen $a_0,a_1,\ldots,a_n$ so bestimmen kann, daß

(i) wenn die Kettenbruchentwicklung von $1/\alpha$ mit $a_0,a_1,\ldots,a_n$ beginnt, d. h. $1/\alpha=[a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots]$ ist, so erfüllt α zusammen mit den $r_1,\ldots,r_k$ bei geeigneten $\lambda_i=\lambda(r_i)$ die Bedingungen (42)-(44).

Wir wollen annehmen, daß für ein bestimmtes k die Zahlen r_i und a_j $(i=1,\ldots,k;\ j=0,1,\ldots,n)$ schon vorliegen; wir werden nun ein weiteres gerades $r=r_{k+1}>r_k$ und die nächstfolgenden Teilnenner $a_{n+1},\ldots,a_{m+2}$ so bestimmen, daß (i) durch $m+2$ und $k+1$ anstatt durch n und k erfüllt ist.

Wir nehmen zu den $a_0,a_1,\ldots,a_n$ nötigenfalls weitere Zahlen a_{n+1}, $a_{n+2},\ldots,a_{m-2}$ hinzu, welche uns die Ungleichung

$$\frac{Z_{m-2}}{A_{m-2}}>\frac{12}{13}\cdot\frac{1}{\alpha} \tag{45}$$

sichern, falls $1/\alpha=[a_0,a_1,\ldots,a_{m-2},\ldots]$. Wir dürfen somit über die a_{m-1}, $a_m,\ldots$ beliebig verfügen, ohne damit die Gültigkeit von (45) zu beeinträchtigen. Als r_{k+1} wählen wir ein gerades $r>r_k$, das den Ungleichungen

$$\left[\frac{B_r}{\beta}\right] > 13^2 \frac{1}{\beta^5} Z_{m-2}^2, \qquad B_r^{3/2} > \frac{\beta^2}{\alpha}, \tag{46}$$

falls $1/\alpha=[a_0, a_1, \ldots, a_{m-2}, \ldots]$ ist, genügt. Im weiteren schreiben wir ϱ anstatt r_{k+1} und bestimmen a_{m-1} so, daß

$$[B_\varrho/\beta]/Z_{m-1} \tag{47}$$

gilt ($[B_\varrho/\beta]$ geht in Z_{m-1} auf). Wegen $Z_{m-1}=Z_{m-2}a_{m-1}+Z_{m-3}$ und $(Z_{m-2}, [B_\varrho/\beta])=1$ (letzteres folgt leicht aus (40) und (46)) kann dies stets erreicht werden, sogar so daß

$$a_{m-1} \leqslant [B_\varrho/\beta] \tag{48}$$

ist. Nun setze man

$$a_m=2, \qquad a_{m+1}=2[B_\varrho/\beta]. \tag{49}$$

Aus der bekannten Relation

$$\left|\frac{1}{\alpha}-\frac{Z_m}{A_m}\right| < \frac{1}{a_{m+1}A_m^2}$$

folgt wegen (49)

$$\left|\frac{1}{[B_\varrho/\beta]\alpha}-\frac{Z_m}{A_m[B_\varrho/\beta]}\right| < \frac{1}{2[B_\varrho/\beta]^2 A_m^2},$$

falls $1/\alpha=[a_0, a_1, \ldots a_m, \ldots]$. Hieraus folgt wegen eines Satzes von Legendre (Perron [4], S. 45) daß $Z_m/[B_\varrho/\beta]A_m$ ein Näherungsbruch von $1/[B_\varrho/\beta]\alpha$ ist. Es sei etwa

$$\frac{Z_m}{[B_\varrho/\beta]A_m}=\frac{Z_{\lambda'-1}^{(\varrho)}}{A_{\lambda'-1}^{(\varrho)}};$$

auf Grund von (40), (47) und $(Z_m, Z_{m-1})=1$ gilt

$$Z_m=Z_{\lambda'-1}^{(\varrho)}, \qquad [B_\varrho/\beta]A_m=A_{\lambda'-1}^{(\varrho)}. \tag{50}$$

Wir setzen

$$a_{m+2}=2[B_\varrho/\beta]A_{m+1}^4. \tag{51}$$

Es folgt

$$\left|\frac{1}{\alpha}-\frac{Z_{m+1}}{A_{m+1}}\right| < \frac{1}{2[B_\varrho/\beta]A_{m+1}^4}\cdot\frac{1}{A_{m+1}^2},$$

falls $1/\alpha=[a_0, a_1, \ldots, a_{m+2}, \ldots]$; hieraus erhalten wir

$$\left|\frac{1}{[B_\varrho/\beta]\alpha}-\frac{Z_{m+1}}{A_{m+1}[B_\varrho/\beta]}\right| < \frac{1}{2A_{m+1}^4}\cdot\frac{1}{[B_\varrho/\beta]^2 A_{m+1}^2}. \tag{52}$$

Daher ist auch $Z_{m+1}/[B_\varrho/\beta]A_{m+1}$ dem Werte nach ein Näherungsbruch von $1/[B_\varrho/\beta]\alpha$; auf Grund von $Z_{m+1}=Z_m a_{m+1}+Z_{m-1}$, (47) und (49) ist er aber reduzibel. Es sei etwa

$$Z_{m+1}/[B_\varrho/\beta]=Z_\mu^{(\varrho)}, \qquad A_{m+1}=A_\mu^{(\varrho)}. \tag{53}$$

Aus (50) und (53) folgt

$$Z_\mu^{(\varrho)}A_{\lambda'-1}^{(\varrho)}-A_\mu^{(\varrho)}Z_{\lambda'-1}^{(\varrho)}=\frac{Z_{m+1}}{[B_\varrho/\beta]}\left[\frac{B_\varrho}{\beta}\right]A_m-A_{m+1}Z_m=(-1)^m=(-1)^{\lambda'-1}.$$

Auf Grund von (50), (49) und (53) ist jedenfalls $\mu\geqslant\lambda'$. Nach der bekannten Formel (Perron [4], S. 17) hat man für $\nu\geqslant 1$

$$Z_{\nu+\lambda'-1}^{(\varrho)}A_{\lambda'-1}^{(\varrho)}-A_{\nu+\lambda'-1}^{(\varrho)}Z_{\lambda'-1}^{(\varrho)}=(-1)^{\lambda'-1}A_{\nu-1,\lambda'},$$

wo für einen Augenblick

$$[a_{\lambda'}^{(\varrho)}, a_{\lambda'+1}^{(\varrho)}, \ldots, a_{\lambda'+\nu}^{(\varrho)}]=Z_{\nu,\lambda'}/A_{\nu,\lambda'} \qquad \big((Z_{\nu,\lambda'}, A_{\nu,\lambda'})=1\big)$$

gesetzt wurde. Daher gilt

$$\text{entweder} \quad \mu=\lambda' \quad \text{oder} \quad \mu=\lambda'+1, \quad a_{\lambda'+1}^{(\varrho)}=1. \tag{54}$$

Nun zeige ich, daß für $1/\alpha=[a_0, a_1, \ldots, a_{m+2}, \ldots]$ die Bedingungen (42)-(44) durch $r=\varrho$, $\lambda=\mu$ erfüllt sind. Da $m+2>n$, so gilt dann infolge der induktiven Annahme auch (i) mit $m+2$ und $k+1$ anstatt n und k.

Wegen (50)-(54) und $A_{\lambda'}^{(\varrho)}>A_{\lambda'-1}^{(\varrho)}$ gilt jedenfalls $A_\mu^{(\varrho)}>B_\varrho$. Andererseits hat man infolge von (53), (49), (48), (45) und (46) (die erste Ungleichung)

$$\begin{aligned}A_\mu^{(\varrho)}&=A_{m+1}=2[B_\varrho/\beta]A_m+A_{m-1}=2[B_\varrho/\beta](2A_{m-1}+A_{m-2})+A_{m-1}\\&=(4[B_\varrho/\beta]+1)A_{m-1}+2[B_\varrho/\beta]A_{m-2}\leqslant(4[B_\varrho/\beta]+1)([B_\varrho/\beta]+1)A_{m-2}\\&\quad+2[B_\varrho/\beta]A_{m-2}\leqslant 12[B_\varrho/\beta]^2A_{m-2}\leqslant 12[\beta_\varrho/\beta]^2\alpha(13/12)Z_{m-2}<B_\varrho^{2,5},\end{aligned}$$

(42) ist also bewiesen.

(43) folgt aus (52); es ist nämlich

$$a_{\mu+1}^{(\varrho)}=\left[\left(A_\mu^{(\varrho)2}\left|\frac{1}{[B_\varrho/\beta]\alpha}-\frac{Z_\mu^{(\varrho)}}{A_\mu^{(\varrho)}}\right|\right)^{-1}-\frac{A_{\mu-1}^{(\varrho)}}{A_\mu^{(\varrho)}}\right],$$

also wegen (52) und (53) jedenfalls $a_{\mu+1}^{(\varrho)}>A_\mu^{(\varrho)4}$.

(44) folgt im Falle $\mu=\lambda'$ aus (50) und $(A_{\lambda'-1}^{(\varrho)}, A_{\lambda'}^{(\varrho)})=1$. Im Falle $\mu=\lambda'+1$, $a_{\lambda'+1}^{(\varrho)}=1$ erhalten wir sie aus denselben Beziehungen unter Berücksichtigung der Relation $A_{\lambda'+1}^{(\varrho)}=A_{\lambda'}^{(\varrho)}+A_{\lambda'-1}^{(\varrho)}$.

Obige Konstruktion läßt sich unbeschränkt wiederholen. Zu ihrem Beginn, d. h. wenn noch keine r vorliegen, wähle man die $a_0, a_1, \ldots, a_{m-2}$ so, daß (45) erfüllt ist, sonst aber beliebig; dann bestimmt man $r=r_1$ nach (46) und das weitere Verfahren stimmt mit dem oben beschriebenen völlig überein. Mithin haben wir für die Konstruktion der Zahl α, die die verlangten Eigenschaften besitzt, eine rekurrente Methode angegeben.

Aus dieser Methode erhellt, daß sich zu jedem β eine unabzählbare Menge von α konstruieren läßt. Es gibt also insbesondere auch linear unabhängige α, β, 1, die unseren Voraussetzungen genügen.

Ist nun r eine der Zahlen $r_1, r_2, \ldots$ und $\lambda=\lambda(r)$ so bestimme man n (nicht notwendig ganzzahlig) derart, daß

$$\frac{n\beta}{B_s}[B_r/\beta]\alpha = A_\lambda^{(r)}$$

wird. Dann ist wegen (41) und (42)

$$n=\frac{A_\lambda^{(r)}B_r}{\alpha\beta[B_r/\beta]}<\frac{2A_\lambda^{(r)}}{\alpha}<\frac{2}{\alpha}B_r^{2,5}=\frac{2\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{B_r^{4,5}}\cdot\frac{B_r^7}{\beta}<\frac{2\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{B_r^{4,5}}\cdot\frac{B_r b_{r+1}}{\beta}.$$

Nun gilt (37) und (38) mit cn statt des dortigen n, wobei c eine beliebige natürliche Zahl ist, die der Bedingung

$$c<\frac{\alpha}{2\beta}B_r^{4,5} \tag{55}$$

genügt. Wir haben nun

$$N_{\alpha,\beta}\left(c\frac{A_\lambda^{(r)}B_r}{\alpha\beta[B_r/\beta]}, I\right)=\sum_{s=0}^{B_r-1}N_{1/[B_r/\beta]\alpha}(cA_\lambda^{(r)}, I_s)+O(B_r) \tag{56}$$

(die Bedeutung von I_s ist diejenige aus (39)).

Ist $c<a_{\lambda+1}^{(r)}/2[B_r/\beta]$, so folgt hieraus auf Grund von (31)

$$N_{\alpha,\beta}(cA_\lambda^{(r)}B_r/\alpha\beta[B_r/\beta], I)=c\sum_{s=0}^{B_r-1}N_{1/[B_r/\beta]\alpha}(A_\lambda^{(r)}, I_s)+O(B_r). \tag{57}$$

Wir beweisen, daß

$$\left|\sum_{s=0}^{B_r-1}N_{1/[B_r/\beta]\alpha}(A_\lambda^{(r)}, I_s)-\frac{A_\lambda^{(r)}B_r}{[B_r/\beta]}\right|\geqslant\frac{1}{[B_r/\beta]} \tag{58}$$

ist. Da die Summe der linken Seite von (58) jedenfalls eine ganze Zahl ist, genügt es nachzuweisen, daß $A_\lambda^{(r)}B_r/[B_r/\beta]$ keine ganze Zahl sein kann. Dies folgt aber sofort aus (44) und aus der Tatsache, daß B_r der Näherungsnenner, $[B_r/\beta]$ der Näherungszahler desselben Näherungsbruches von $1/\beta$ ist. Aus (57) folgt für $c<a_{\lambda+1}^{(r)}/2[B_r/\beta]$

$$\begin{aligned}&|N_{\alpha,\beta}(cA_\lambda^{(r)}B_r/\alpha\beta[B_r/\beta], I)-cA_\lambda^{(r)}B_r/[B_r/\beta]|\\&=c\left|\sum_{s=0}^{B_r-1}N_{1/[B_r/\beta]\alpha}(A_\lambda^{(r)}, I_s)-A_\lambda^{(r)}B_r/[B_r/\beta]\right|+O(B_r).\end{aligned} \tag{59}$$

Wegen (42) und (43) ist $a_{\lambda+1}^{(r)}>A_\lambda^{(r)4}>B_r^{(4)}$, also

$$a_{\lambda+1}^{(r)}/2[B_r/\beta]>\beta B_r^3/2. \tag{60}$$

Setzt man $c=[\beta B_r^3/2]$, so ist wegen (46) (zweite Ungleichung) die Bedingung (55) erfüllt und infolge von (60) darf dieser Wert in (59) eingesetzt werden. Hieraus und aus (58) folgt

$$\begin{aligned}&|N_{\alpha,\beta}([\beta B_r^3/2]A_\lambda^{(r)}B_r/\alpha\beta[B_r/\beta], I)-[\beta B_r^3/2]A_\lambda^{(r)}B_r/[B_r/\beta]|\\&\geqslant[\beta B_r^3/2]/[B_r/\beta]+O(B_r)>KB_r^2+O(B_r),\end{aligned}$$

wobei K irgendeine von B_r unabhängige positive Konstante bedeutet. Der letzte Ausdruck wird aber mit $B_r\to\infty$ beliebig groß. Damit ist unser Beweis zu Ende.

Zitate

[1] H. Behnke, *Zur Theorie der diophantischen Approximationen*, Abh. a. d. Math. Sem. d. Hamburgischen Universität 3 (1924), S. 261-318.

[2] S. Hartman, Colloquium Mathematicum 1 (1948), S. 239, P37.

[3] A. Ostrowski, *Mathematische Miszellen XVI, Zur Theorie der linearen diophantischen Approximationen*, Jahresber. der Deutschen Math. Verein. 39 (1930), S. 34-46.

[4] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Berlin-Leipzig 1929.

[5] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Annalen 77 (1916), S. 313-352.

BUDAPEST, INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 10. 1. 1954