Bemerkungen über die mittlere Anzahl von Partikeln in gewissen stochastischen Schauern

von

K. URBANIK (Wrocław)

In probabilistischen Schemen von Nukleonschauern in einem homogenen Medium, welche energetische Änderungen nicht berücksichtigen, ist die mittlere Anzahl (die mathematische Erwartung) von Nukleonen in der Tiefe x, eines aus einem Nukleon entstandenen Schauers, gleich e^{ax}, wobei a eine gewisse Konstante ist (Arley [1], S. 92, und Feller [2], S. 410); $m(\varepsilon,x)$ bezeichne die mittlere Anzahl von Nukleonen in der Tiefe x mit der Energie größer als εE_0, in dem die energetischen Änderungen berücksichtigenden Schema von Jánossy eines aus einem Nukleon mit der Energie E_0 entstandenen Nukleonschauers (Jánossy [4], S. 241-243). Aus physikalischen Gründen (Gesetz von der Erhaltung der Energie) nehmen wir an, daß $m(\varepsilon,x)=0$ für $\varepsilon\geqslant 1$ ist.

J. Łopuszański stellte folgende Frage: Gilt für $m(\varepsilon,x)$ die asymptotische Formel

$$m(\varepsilon,x)\approx b(\varepsilon)e^{a(\varepsilon)x},\qquad b(\varepsilon)\neq 0,\qquad \text{für}\qquad 0<\varepsilon<1,$$

wenn x gegen ∞ strebt?

In dieser Arbeit beantworten wir diese Frage im negativen Sinne. *Es gilt nämlich für* $0<\varepsilon<1$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x}m(\varepsilon,x)=\begin{cases}0 & \textit{für}\quad \lambda<a,\\ \infty & \textit{für}\quad \lambda\geqslant a,\end{cases}\tag{1}$$

wobei a der totale Wirkungsquerschnitt einer Nukleon-Nukleon-Streuung ist. Die Formel (1) gibt überdies noch eine asymptotische Abschätzung der Schnelligkeit der Konvergenz gegen Null von $m(\varepsilon,x)$, wenn x unbeschränkt wächst.

Im ersten Teil der Arbeit beweisen wir Formel (1) für einen Nukleonschauer, im zweiten Teil eine ähnliche Formel für einen Elektron--Photon-Schauer (ohne Berücksichtigung der Jonisation), im dritten Teil ziehen wir aus der Formel (1) gewisse Schlüsse für die Lösungen von

Jánossy und Messel. In den Beweisen bedienen wir uns gewisser Ideen von L. Takács ([9], S. 282).

1. Aus den sogenannten *G-Gleichungen von Jánossy*, welche einen Nukleonschauer beschreiben (Jánossy [4], S. 242, und [5]), folgt, daß $m(\varepsilon,x)$ für $0\leqslant\varepsilon<1$ und $x\geqslant 0$ folgender Gleichung genügt:

$$m(\varepsilon,x)=\int_0^x e^{-a(x-\xi)}\int_0^1\int_0^1[m(\varepsilon/\varepsilon',\xi)+m(\varepsilon/\varepsilon'',\xi)]w(\varepsilon',\varepsilon'')\,d\varepsilon'\,d\varepsilon''\,d\xi+e^{-ax},\tag{2}$$

wobei $w(\varepsilon',\varepsilon'')$ der Wirkungsquerschnitt einer Nukleon-Nukleon-Streuung ist, das heißt, $w(\varepsilon',\varepsilon'')\,d\varepsilon'd\varepsilon''dx$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Nukleon mit der Energie E_0 in einer Schicht von der Dicke dx einem Zusammenstoß erliegt, in dessen Folge zwei Nukleone entstehen, deren Energie entsprechend in den Intervallen

$$\big(\varepsilon'E_0,(\varepsilon'+d\varepsilon')E_0\big)\qquad\text{und}\qquad\big(\varepsilon''E_0,(\varepsilon''+d\varepsilon'')E_0\big)$$

liegt;

$$a=\int_0^1\int_0^1 w(\varepsilon',\varepsilon'')\,d\varepsilon'\,d\varepsilon''$$

ist der totale Wirkungsquerschnitt einer Nukleon-Nukleon-Streuung. Aus physikalischen Gründen nehmen wir an, daß

$$\begin{aligned} &w(\varepsilon',\varepsilon'')=0 \qquad \begin{cases}\text{für}\quad \varepsilon'+\varepsilon''>1,\\ \text{für}\quad \varepsilon'<\varepsilon'',\end{cases}\\ &w(\varepsilon',\varepsilon'')>0 \qquad \text{für alle übrigen positiven } \varepsilon',\varepsilon''.\end{aligned}\tag{3}$$

Weiter setzen wir voraus, daß der totale Wirkungsquerschnitt endlich ist.

Wir werden zunächst beweisen, daß

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x}m(\varepsilon,x)=\infty\qquad\text{für}\qquad \lambda\geqslant a\ \text{ und }\ 0<\varepsilon<1.\tag{4}$$

Zu diesem Zweck genügt es offenbar zu beweisen, daß

$$\lim_{x\to\infty} e^{ax}m(\varepsilon,x)=\infty\qquad\text{für}\qquad 0<\varepsilon<1.\tag{5}$$

Aus der der Gleichung (2) erhalten wir unmittelbar, daß für ein $x\geqslant 0$

$$e^{ax}m(\varepsilon,x)\geqslant 1\qquad\text{für}\qquad 0<\varepsilon<1,\tag{6}$$

$$e^{ax}m(\varepsilon,x)\geqslant\int_0^x\int_0^1\Big[\int_\varepsilon^1 e^{a\xi}m(\varepsilon/\varepsilon',\xi)w(\varepsilon',\varepsilon'')\,d\varepsilon'\Big]d\varepsilon''\,d\xi\qquad\text{für}\qquad 0<\varepsilon<1\tag{7}$$

gilt. Aus (6) und (7) folgt, daß

$$e^{ax}m(\varepsilon,x)\geqslant x\int_0^1\Big[\int_\varepsilon^1 w(\varepsilon',\varepsilon'')\,d\varepsilon'\Big]d\varepsilon''\qquad\text{für}\qquad 0<\varepsilon<1.\tag{8}$$

Aus (3) folgt, daß

$$\int_0^1 \Big[\int_\varepsilon^1 w(\varepsilon',\varepsilon'')\,d\varepsilon'\Big]\,d\varepsilon''>0 \quad \text{für} \quad 0<\varepsilon<1.$$

Daraus und aus (8) erhalten wir (5), was die Gleichung (4) beweist.

Wir werden jetzt beweisen, daß

(9) $$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} m(\varepsilon,x)=0 \quad \text{für} \quad \lambda<\alpha \text{ und } 0<\varepsilon<1.$$

Aus der Definition von $m(\varepsilon,x)$ folgt, daß

(10) $$m(\varepsilon',x)\geqslant m(\varepsilon'',x) \quad \text{für} \quad \varepsilon'<\varepsilon'',$$

was wegen der Gleichheit $m(0,x)=e^{\alpha x}$, die aus (2) hervorgeht,

(11) $$m(\varepsilon,x)\leqslant e^{\alpha x} \quad \text{für} \quad \varepsilon>0$$

nach sich zieht. Mit Hilfe der Gleichung (2) kann man leicht beweisen, daß $m(\varepsilon,x)$ eine stetige Funktion von x ist.

Es sei

(12) $$\lambda<\alpha$$

und r eine natürliche Zahl, welche die Ungleichung

(13) $$A=\int_0^1\int_0^1 [(\varepsilon')^{r+1}+(\varepsilon'')^{r+1}]\,w(\varepsilon',\varepsilon'')\,d\varepsilon'\,d\varepsilon''<\alpha-\lambda$$

erfüllt. Wir setzen

(14) $$M(x)=e^{\lambda x}\int_0^1 m(\varepsilon,x)\varepsilon^r\,d\varepsilon.$$

Aus (11) und der Stetigkeit von $m(\varepsilon,x)$ in x folgt, daß

1° *$M(x)$ eine stetige Funktion ist.*

Multipliziert man Gleichung (2) beiderseits mit $\varepsilon^r e^{\lambda x}$ und integriert dann von 0 bis 1 nach ε, so erhält man folgende Gleichung für $M(x)$:

(15) $$M(x)+\int_0^x K(x-\xi)M(\xi)\,d\xi=(r+1)^{-1}e^{(\lambda-\alpha)x},$$

wobei

(16) $$K(x)=-Ae^{(\lambda-\alpha)x}.$$

Aus (12) und (15) erhalten wir:

2° $$\lim_{x\to\infty}\Big[M(x)+\int_0^x K(x-\xi)M(\xi)\,d\xi\Big]=0.$$

Aus (12) und (16) folgt unmittelbar, daß

3° $$\int_0^\infty |K(x)|\,dx<\infty.$$

z sei eine komplexe Zahl der rechten Halbebene, d. h. $\mathrm{Re}(z)\geqslant 0$. Aus (12) und (16) folgt dann

$$\int_0^\infty K(x)e^{-zx}\,dx=A(\lambda-\alpha-z)^{-1}.$$

Daraus erhalten wir

$$\Big|\int_0^\infty K(x)e^{-zx}\,dx\Big|\leqslant A(\alpha-\lambda)^{-1},$$

was wegen (13)

$$\Big|\int_0^\infty K(x)e^{-zx}\,dx\Big|<1$$

nach sich zieht. Es folgt insbesondere, daß

4° $\int_0^\infty K(x)e^{-zx}\,dx\neq -1$ *für* $\mathrm{Re}(z)\geqslant 0$ *ist.*

Aus 1°, 2°, 3° und 4° erhalten wir auf Grund des Satzes von Paley-Wiener ([8], S. 59) $\lim_{x\to\infty} M(x)=0$. Es ist also wegen (12) und (14)

(17) $$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x}\int_0^1 m(\varepsilon,x)\varepsilon^r\,d\varepsilon=0 \quad \text{für} \quad \lambda<\alpha.$$

Um (9) zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß für $\lambda<\alpha$ jede Folge $x_1,x_2,\ldots$ $(x_n\to\infty)$ eine Teilfolge $x_{k_1},x_{k_2},\ldots$ enthält, für welche

(18) $$\lim_{n\to\infty} e^{\lambda x_{k_n}} m(\varepsilon,x_{k_n})=0 \quad \text{für} \quad 0<\varepsilon<1$$

gilt. Es sei also $x_1,x_2,\ldots$ eine beliebige Folge, wobei $x_n\to\infty$. Dann erhalten wir aus (17), da ja die integrierte Funktion nichtnegativ ist, daß für $\lambda<\alpha$ die Folge $e^{\lambda x_n}m(\varepsilon,x_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ im Intervall $0<\varepsilon<1$ asymptotisch gegen Null konvergiert. Daraus ergibt sich auf Grund des Satzes von Riesz (Halmos [3], S. 93), daß eine Teilfolge $x_{k_1},x_{k_2},\ldots$ existiert, für welche die Folge $e^{\lambda x_{k_n}}m(\varepsilon,x_{k_n})$ $(n=1,2,\ldots)$ im Intervall $0<\varepsilon<1$ fast überall gegen Null konvergiert. Daraus folgern wir wegen (10), daß (18) erfüllt ist, was (9) beweist. Die Zusammenstellung der Formeln (4) und (9) ergibt (1).

2. Untersuchen wir jetzt das Schema eines Elektron-Photon-Schauers von Janossy, welches die Jonisation nicht berücksichtigt (Approximation A). Im Weiteren werden wir Elektronen, *Partikel erster Art*, Photonen, *Partikel zweiter Art* nennen. Es bezeichne $m_i^j(\varepsilon,x)$ $(i,j=1,2)$ die mittlere Anzahl von Partikeln j-ter Art in der Tiefe x mit der Energie größer als εE_0 in einem aus einem Partikel i-ter Art mit der Energie E_0 entstandenen Elektron-Photon-Schauer. Wir werden beweisen, daß *für* $0<\varepsilon<1$ *und* $i,j=1,2$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} m_i^j(\varepsilon,x)=\begin{cases}0 & \text{für}\quad \lambda<\min(\alpha_1,\alpha_2),\\ \infty & \text{für}\quad \lambda\geqslant\min(\alpha_1,\alpha_2)\end{cases} \tag{19}$$

gilt, wobei α_1 *der totale Wirkungsquerschnitt der Bremsstrahlung,* α_2 *der totale Wirkungsquerschnitt für die Bildung von Elektron-Positron-Paaren ist.*

Aus den G-Gleichungen von Jánossy, welche einen Elektron-Photon--Schauer beschreiben (Jánossy [4], S. 244, und [5]), folgt, daß die mittlere Anzahl der Partikel $m_i^j(\varepsilon,x)$ für $x\geqslant 0$ und $0\leqslant\varepsilon<1$ folgenden Gleichungen genügt:

$$m_i^j(\varepsilon,x) = \int_0^x e^{-\alpha_i(x-\xi)}\int_0^1 \big[m_1^j(\varepsilon/\varepsilon',\xi)+m_{3-i}^j\big(\varepsilon/(1-\varepsilon'),\xi\big)\big]w^{(i)}(\varepsilon')\,d\varepsilon'\,d\xi+\delta_i^j e^{-\alpha_i x}, \tag{20}$$

wobei $w^{(1)}(\varepsilon)$ der Wirkungsquerschnitt der Bremsstrahlung, $w^{(2)}(\varepsilon)$ der Wirkungsquerschnitt für die Bildung von Elektron-Positron-Paaren und

$$\alpha_i=\int_0^1 w^{(i)}(\varepsilon)\,d\varepsilon\qquad (i=1,2)$$

die entsprechenden totalen Wirkungsquerschnitte sind. Aus physikalischen Gründen nehmen wir an, daß für $i=1,2$

$$\begin{aligned} w^{(i)}(\varepsilon)&=0 &&\text{für}\quad \varepsilon>1,\\ w^{(i)}(\varepsilon)&>0 &&\text{für}\quad 0<\varepsilon<1\end{aligned} \tag{21}$$

gilt. Weiter setzen wir voraus, die totalen Wirkungsquerschnitte α_i seien endlich.

Wir werden zuerst beweisen, daß

$$\lim_{x\to\infty} e^{\alpha x} m_i^j(\varepsilon,x)=\infty \qquad \text{für}\quad 0<\varepsilon<1 \text{ und } i,j=1,2, \tag{22}$$

wobei $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$.

Die Formel (20) ergibt für den Fall $i=2$ einen Ausdruck für m_2^j, welchen wir statt m_{3-i}^j in (20) einsetzen, wobei wir $i=1$ setzen. Nach einfacher Umformung erhalten wir folgende Gleichungen für $m_1^j(\varepsilon,x)$ $(0\leqslant\varepsilon<1)$:

$$m_1^j(\varepsilon,x) = \int_0^x\int_0^1 [e^{-\alpha_1(x-\xi)}m_1^j(\varepsilon/\varepsilon',\xi)+h(x-\xi)N_j(\varepsilon/(1-\varepsilon'),\xi)]w^{(1)}(\varepsilon')\,d\varepsilon'\,d\xi+P_j(x), \tag{23}$$

wobei

$$N_j(\varepsilon,x)=\int_0^1 [m_1^j(\varepsilon/\eta,x)+m_1^j(\varepsilon/(1-\eta),x)]w^{(2)}(\eta)\,d\eta, \tag{24}$$

$$h(x)=\begin{cases} xe^{-\alpha x}, & \text{wenn}\quad \alpha_1=\alpha_2=\alpha,\\ (\alpha_1-\alpha_2)^{-1}[e^{-\alpha_2 x}-e^{-\alpha_1 x}], & \text{wenn}\quad \alpha_1\neq\alpha_2,\end{cases} \tag{25}$$

$$P_1(x)=e^{-\alpha_1 x},\qquad P_2(x)=\alpha_1 h(x).$$

Aus den Gleichungen (20) schließen wir unmittelbar, daß für $0<\varepsilon<1$ folgende Ungleichungen gelten:

$$m_i^i(\varepsilon,x)\geqslant e^{-\alpha_i x}\qquad \text{für}\quad i=1,2, \tag{26}$$

$$m_1^2(\varepsilon,x)\geqslant \int_0^x e^{-\alpha_1(x-\xi)}\int_0^{1-\varepsilon} m_2^2\big(\varepsilon/(1-\varepsilon'),\xi\big)\,w^{(1)}(\varepsilon')\,d\varepsilon'\,d\xi. \tag{27}$$

Aus (26) und (27) folgt

$$m_1^2(\varepsilon,x)\geqslant\int_0^{1-\varepsilon} w^{(1)}(\varepsilon')\,d\varepsilon'\cdot\int_0^x e^{-\alpha_1(x-\xi)-\alpha_2\xi}\,d\xi,$$

woraus wegen (21) folgt, daß, für $x>0$ und $0<\varepsilon<1$, $m_1^2(\varepsilon,x)>0$ ist. Daraus und aus (26) folgt wegen (24)

$$\int_0^1 N_j\big(\varepsilon/(1-\varepsilon'),x\big)w^{(1)}(\varepsilon')\,d\varepsilon'>0\qquad \text{für}\quad x>0,\ 0<\varepsilon<1 \text{ und } j=1,2.$$

Auf Grund von (23) und (25) erhalten wir daraus für $j=1,2$ und $0<\varepsilon<1$

$$\liminf_{x\to\infty} e^{\alpha x}m_1^j(\varepsilon,x)>0,$$

was, wie man sich an Hand von (24) leicht überzeugt

$$\liminf_{x\to\infty} e^{\alpha x}\int_0^1 N_j\big(\varepsilon/(1-\varepsilon'),x\big)w^{(1)}(\varepsilon')\,d\varepsilon'>0 \tag{28}$$

für $j=1,2$ und $0<\varepsilon<1$ nach sich zieht. Aus (25) folgt

$$\liminf_{x\to\infty} e^{\alpha x}h(x-\xi)\geqslant(\alpha+|\alpha_1-\alpha_2|)^{-1}e^{\alpha\xi}.$$

Daraus und aus (23) schließen wir, daß für $j=1$, und $0<\varepsilon<1$

$$\liminf_{x\to\infty} e^{\alpha x}m_1^j(\varepsilon,x)\geqslant(\alpha+|\alpha_1-\alpha_2|)^{-1}\int_0^\infty e^{\alpha\xi}\int_0^1 N_j\big(\varepsilon/(1-\varepsilon'),\xi\big)w^{(1)}(\varepsilon')\,d\varepsilon'\,d\xi$$

ist, was wegen (28)

$$\lim_{x\to\infty} e^{\alpha x}m_1^j(\varepsilon,x)=\infty\qquad \text{für}\quad j=1,2 \text{ und } 0<\varepsilon<1 \tag{29}$$

nach sich zieht. Mithin haben wir Gleichung (22) für $i=1$ bewiesen. Aus den Gleichungen (20) folgt, daß für $j=1,2$, $0<\varepsilon<1$ und $x\geqslant 1$

$$e^{\alpha x}m_2^j(\varepsilon,x)\geqslant\int_{x-1}^{x}e^{(\alpha-\alpha_2)(x-\xi)}\int_0^1 e^{\alpha\xi}m_1^j(\varepsilon/\varepsilon',\xi)\,w^{(2)}(\varepsilon')\,d\varepsilon'\,d\xi$$

gilt. Daraus erhalten wir für $j=1,2$ und $0<\varepsilon<1$

$$e^{\alpha x}m_2^j(\varepsilon,x)\geqslant e^{(\alpha-\alpha_2)}\int_0^1\inf_{x-1\leqslant\xi\leqslant x}e^{\alpha\xi}m_1^j(\varepsilon/\varepsilon',\xi)\,w^{(2)}(\varepsilon')\,d\varepsilon',$$

woraus wegen (29) die Formel (22) für $i=2$ folgt.

Wir werden jetzt beweisen, daß für $0<\varepsilon<1$ und $i,j=1,2$ die Gleichung

(30) $$\lim_{x\to\infty}e^{\lambda x}m_i^j(\varepsilon,x)=0\quad\text{für}\quad\lambda<\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$$

gilt.

Es sei λ eine reelle Zahl, welche der Ungleichung

(31) $$\lambda<\alpha$$

genügt. Setzen wir für $i,j=1,2$

(32) $$M_i^j(x)=e^{\lambda x}\int_0^1 m_i^j(\varepsilon,x)\varepsilon^r\,d\varepsilon,$$
$$A_i=\int_0^1\varepsilon^{r+1}w^{(i)}(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$
$$B_i=\int_0^1(1-\varepsilon)^{r+1}w^{(i)}(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

wobei r eine natürliche Zahl ist, für die

(33) $$(\alpha-\lambda)^{-1}A_1+(\alpha-\lambda)^{-2}B_1(A_2+B_2)<1,\quad\text{wenn}\quad\alpha_1=\alpha_2,$$
$$(\alpha-\lambda)^{-1}A_1+2|(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha-\lambda)|^{-1}B_1(A_2+B_2)<1,\quad\text{wenn}\quad\alpha_1\neq\alpha_2,$$

gilt. Auf dieselbe Art, wie für den Nukleonschauer, erhalten wir aus den Gleichungen (20) die Gleichungen

(34) $$M_i^j(x)=\int_0^x e^{(\lambda-\alpha_i)(x-\xi)}[A_iM_1^j(\xi)+B_iM_{3-i}^j(\xi)]\,d\xi+\delta_i^j(r+1)^{-1}e^{(\lambda-\alpha_i)x}.$$

Den daraus im Fall $i=2$ erhaltenen Ausdruck für M_2^j setzen wir in (34) an Stelle von M_{3-i}^j, wobei wir $i=1$ setzen. Dies liefert nach einfacher Umformung folgende Gleichungen für M_1^j:

(35) $$M_1^j(x)+\int_0^x K(x-\xi)M_1^j(\xi)\,d\xi=R_j(x)\quad\text{für}\quad j=1,2,$$

wobei

(36) $$K(x)=\begin{cases}-e^{(\lambda-\alpha)x}[A_1+B_1(A_2+B_2)x], & \text{wenn}\quad\alpha_1=\alpha_2,\\ (\alpha_2-\alpha_1)^{-1}B_1(A_2+B_2)e^{(\lambda-\alpha_2)x}-\\ \quad-[A_1+(\alpha_2-\alpha_1)^{-1}B_1(A_2+B_2)]e^{(\lambda-\alpha_1)x}, & \text{wenn}\quad\alpha_1\neq\alpha_2,\end{cases}$$
$$R_1(x)=(r+1)^{-1}e^{(\lambda-\alpha_1)x},$$
$$R_2(x)=\begin{cases}(r+1)^{-1}B_1xe^{(\lambda-\alpha)x}, & \text{wenn}\quad\alpha_1=\alpha_2,\\ [(r+1)(\alpha_1-\alpha_2)]^{-1}B_1[e^{(\lambda-\alpha_2)x}-e^{(\lambda-\alpha_1)x}], & \text{wenn}\quad\alpha_1\neq\alpha_2.\end{cases}$$

Ähnlich wie im ersten Teil dieser Arbeit beweisen wir auf Grund von (33), (35) und (36), daß $M_1^j(x)$ und $K(x)$ 1°, 2°, 3° und 4° genügen, woraus man auf Grund des zitierten Satzes von Paley-Wiener schließt, daß

(37) $$\lim_{x\to\infty}e^{\lambda x}\int_0^1 m_1^j(\varepsilon,x)\varepsilon^r\,d\varepsilon=0\quad\text{für}\quad\lambda<\alpha\ \text{und}\ j=1,2.$$

λ und μ seien reelle Zahlen, für welche

(38) $$\lambda<\mu<\alpha$$

gilt. Aus (32) und (34) erhalten wir

(39) $$M_2^j(x)=(A_2+B_2)e^{(\lambda-\mu)x}\int_0^x e^{(\mu-\alpha_2)(x-\xi)}e^{\mu\xi}\int_0^1 m_1^j(\varepsilon,\xi)\varepsilon^r\,d\varepsilon\,d\xi+$$
$$+\delta_2^j(r+1)^{-1}e^{(\lambda-\alpha_2)x}\quad\text{für}\quad j=1,2.$$

Aus (37) und (38) geht hervor, daß

$$e^{\mu\xi}\int_0^1 m_1^j(\varepsilon,\xi)\varepsilon^r\,d\varepsilon\leqslant C<\infty\quad\text{für}\quad\xi\geqslant 0\ \text{und}\ j=1,2$$

und $e^{(\mu-\alpha_2)(x-\xi)}\leqslant 1$ für $\xi\leqslant x$. Daraus erhalten wir auf Grund von (39) für $x\geqslant 0$:

$$M_2^j(x)\leqslant C(A_2+B_2)xe^{(\lambda-\mu)x}+(r+1)^{-1}e^{(\lambda-\alpha_2)x}\quad\text{für}\quad j=1,2,$$

was wegen (38) $\lim_{x\to\infty}M_2^j(x)=0$ nach sich zieht. Daraus und aus (37) folgt

$$\lim_{x\to\infty}e^{\lambda x}\int_0^1 m_i^j(\varepsilon,x)\varepsilon^r\,d\varepsilon=0\quad\text{für}\quad i,j=1,2\ \text{und}\ \lambda<\min(\alpha_1,\alpha_2).$$

Daraus erhält man auf dieselbe Weise wie im ersten Teil dieser Arbeit:

$$\lim_{x\to\infty}e^{\lambda x}m_i^j(\varepsilon,x)=0$$

für $\lambda<\min(\alpha_1,\alpha_2)$, $i,j=1,2$ und $0<\varepsilon<1$, was gemeinsam mit (22) die Formel (19) ergibt.

3. H. Messel ([7], S. 128) gab die Lösung der Gleichung (2) für einen Nukleonschauer in folgender Gestalt an: $m(\varepsilon,x)=e^{-\alpha x}H(\varepsilon,x)$, wobei

$$H(\varepsilon,x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} z^{-1}\varepsilon^{-z}e^{W(z)x}\,dz,$$

$$W(z)=\int_0^1 (\varepsilon')^z\Big\{\int_0^1 [w(\varepsilon',\varepsilon'')+w(\varepsilon'',\varepsilon')]\,d\varepsilon''\Big\}\,d\varepsilon'.$$

Aus der Abschätzung (1) folgt

$$\lim_{x\to\infty} H(\varepsilon,x)=\infty \quad \text{für} \quad 0<\varepsilon<1$$

und — für jedes $\beta>0$ —

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\beta x}H(\varepsilon,x)=0 \quad \text{für} \quad 0<\varepsilon<1.$$

Ähnliche Folgerungen kann man aus den Abschätzungen (19) für die von Jánossy und Messel ([6], S. 1104) angegebenen Lösungen der Gleichungen (20) ziehen.

Literaturnachweis

[1] N. Arley, *On the theory of stochastic processes and their application to the theory of cosmic radiations*, New York 1948.

[2] W. Feller, *On the theory of stochastic processes, with particular reference to applications*, Proceedings of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (1949), S. 403-432.

[3] P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York 1950.

[4] L. Jánossy, *Note on the Fluctuation Problem of Cascades*, Proc. of the Physical Society A. 63 (1950), S. 241-249.

[5] — *Note on the Fluctuation Problem of Cascades*, Proc. of the Physical Society A. 66 (1953), S. 117.

[6] — and H. Messel, *Fluctuations of the Electron-Photon Cascade — Moments of the Distribution*, Proc. of the Physical Society A. 63 (1950), S. 1101-1115.

[7] H. Messel, *On the fluctuation of a nucleon cascade in homogeneous nuclear matter and calculation of average numbers*, Proc. of the Royal Irish Academy A. 54 (1951), S. 125-135.

[8] R. E. A. C. Paley and N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, New York 1934.

[9] L. Takács, *Occurrence and coincidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration*, Acta Mathematica Acad. Scient. Hung. II. (3-4) (1951), S. 275-298.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 12. 9. 1954

Lösung eines Problems von Herrn Hartman

von

P. SZÜSZ (Budapest)

In der vorliegenden Arbeit werden folgende Bezeichnungen benützt: Ist ω eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl und I ein Teilintervall von $(0,1)$, so bezeichnet $N_\omega(n,I)$ die Anzahl derjenigen ganzen Zahlen ν $(1\leqslant\nu\leqslant n)$, für die $(\nu\omega)\in I$ gilt, wobei $(\nu\omega)$ der Bruchteil von $\nu\omega$ $\big((\nu\omega)=\nu\omega-[\nu\omega]\big)$ ist. Sind α und β zwei Zahlen $(0<\alpha<1,\ 0<\beta<1)$ und I ein zweidimensionales Teilintervall des Einheitsquadrats der z-Ebene, so bezeichnet $N_{\alpha,\beta}(n,I)$ die Anzahl der ganzen Zahlen ν $(1\leqslant\nu\leqslant n)$, für die der Punkt $z_\nu=(\nu\alpha)+i(\nu\beta)$ zu I gehört.

Es ist schon lange bekannt, daß falls ω irrational ist, zwar die asymptotische Relation

$$\big|N_\omega(n,I)-n|I|\big|=O(n)\ ^{1})$$

gilt ($|I|$ bedeutet die Länge von I), die Differenz

$$\big|N_\omega(n,I)-n|I|\big|$$

aber im allgemeinen nicht beschränkt bleibt (Behnke [1]).

Die Größenordnung des Wachstums hängt von der Kettenbruchentwicklung von ω ab. Andererseits gibt es nach Ostrowski[2]) eine unendliche, in $(0,1)$ überall dicht liegende Zahlenmenge, nämlich die Zahlenmenge

$$l_{\nu,\mu}=|(\nu\omega)-(\mu\omega)| \qquad (\nu,\mu=0,1,\ldots)$$

derart, daß

$$\big|N_\omega(n,I)-n|I|\big|=O(1)$$

ist, sobald nur $|I|=l_{\nu,\mu}$ ist; die Schranke, die von $\big|N_\omega(n,I)-n|I|\big|$ nicht überschritten wird, hängt lediglich von $l_{\nu,\mu}$ ab, also weder von n noch von der speziellen Lage von I.

S. Hartman hat die Frage aufgeworfen, ob ein analoger Satz gilt, wenn wir den mehrdimensionalen, zunächst zweidimensionalen Fall

---

[1]) H. Weyl [5].

[2]) Ostrowski [3]. Dieser Satz wurde früher in schwächerer Form von Hecke bewiesen.