[26] F. Riesz, *Sur l'intégrale de Lebesgue*, Acta Math. 42 (1920), p. 191-205.
[27] S. Saks, *Addition to the note on some functionals*, Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933), p. 967-974.
[28] G. Vitali, *Sull'integrazione per serie*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo 23 (1907), p. 137-155.

YALE UNIVERSITY, NEW HAVEN, CONNECTICUT, U.S.A.

Reçu par la Rédaction le 20. 9. 1955

Zum distributiven Gesetz der reellen Zahlen

von

S. GOŁĄB (Kraków)

Im Jahre 1952 habe ich im Zusammenhange mit einem Problem aus der Algebra der geometrischen Objekte (vgl. [4]) die Frage gestellt, welche (möglichst schwache) Voraussetzungen über die Funktionen f und g in der Gleichung des distributiven Gesetzes

$$(1) \qquad g[f(x,y),z]=f[g(x,z),g(y,z)]$$

hinreichend sind, um die Folgerung zu ziehen, daß f und g einen Automorphismus inbezug auf die Addition und Multiplikation im Bereiche der reellen Zahlen bilden.

Die gestellte Frage habe ich beantwortet. Die Lösung habe ich im Jahre 1953 Herrn J. Łoś schriftlich mitgeteilt und im Jahre 1954 habe ich sie in polnischer Sprache veröffentlicht [2].

Im Jahre 1953 ist eine Arbeit von Herrn M. Hosszú [3] erschienen, die unter gewissen Regularitätsannahmen über die Funktionen f und g eine allgemeine Lösung der Gleichung (1) gibt.

Da mein Satz inzwischen eine Anwendung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gefunden hat [1], da zweitens die Zeitschrift, in welcher mein Ergebnis erschienen ist, schwer zugänglich ist, und da letztens es gelungen ist eine der Voraussetzungen meines Satzes abzuschwächen, habe ich mich entschlossen den Satz nochmals zu publizieren.

SATZ. *Wenn die Funktionen $f(x,y)$ und $g(x,y)$ folgende Voraussetzungen erfüllen:*

I. *sie sind reell und in der ganzen Ebene definiert;*

II. *sie gehören auf der ganzen Ebene der Klasse $\mathcal{C}_1$ an (d. h. sie besitzen stetige Ableitungen erster Ordnung)* [1]*;*

---

[1]) Meine ursprüngliche Voraussetzung II war etwas stärker; sie lautete, daß die Funktion g mit den ersten Ableitungen $\partial g/\partial x$, $\partial g/\partial y$ und außerdem mit der zweiten Ableitung $\partial^2 g/\partial x\,\partial y$ (auf einer gewissen Geraden) ausgestattet ist. Meiner Schülerin U. Stono-Wróbel ist es gelungen diese Voraussetzung abzuschwächen. Dadurch habe ich die Beweismethode (in bezug auf die frühere) in zwei Punkten umändern müssen.

III. *die Funktion f besitzt einen Modul (Einheitselement), d. h. es gibt eine Zahl a, die den Gleichungen*

$$f(x,a)=f(a,x)=x \qquad \text{für alle } x$$

genügt;

IV. *die Funktion g besitzt einen linksseitigen Modul, d. h. es gibt eine Zahl e, für die die Gleichung $g(e,x)=x$ für alle x gilt;*

V. *es bestehen die Gleichungen $g(a,x)=g(x,a)=a$ für alle x (wobei a in III erklärt wurde);*

VI. *die Gleichung $f(b,x)=c$ ist für alle Werte b, c in x lösbar;*

VII. *es besteht das linksseitige distributive Gesetz, d. h. es ist*

$$g[f(x,y),z]=f[g(x,z),g(y,z)] \qquad \text{für alle } x,y,z;$$

dann gibt es eine für alle x erklärte und stark monotone Funktion $\omega(x)$, so daß die Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad f(x,y)=\Omega[\omega(x)+\omega(y)],\\ &\text{(b)} \quad g(x,y)=\Omega[\omega(x)\cdot\omega(y)] \end{aligned}$$

erfüllt sind, wobei Ω die zu ω inverse Funktion bedeutet.

Die Gleichungen (2) lassen sich nicht aus den Gleichungen des Herrn Hosszú ableiten und zwar erstens deswegen, daß Herr Hosszú stärkere Regularitätsannahmen über f und g macht, und zweitens deswegen, daß die entsprechenden Formeln von Herrn Hosszú einen beschränkten Existenzbereich haben (zu welchem der eventuelle Modul der Funktion f nicht gehört).

Beweis. Wir führen die folgenden kurzen Bezeichnungen ein:

$$(3)\qquad f_1=\frac{\partial f}{\partial x},\quad f_2=\frac{\partial f}{\partial y},\quad g_1=\frac{\partial g}{\partial x},\quad g_2=\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Die Differentiation der Identitäten III, IV und V ergibt sodann

$$(4)\qquad f_1(x,a)=f_2(a,x)=1,$$

$$(5)\qquad g_2(e,x)=1,$$

$$(6)\qquad g_2(a,x)=g_1(x,a)=0.$$

Wir bemerken, dass e von a verschieden sein muß. In der Tat, die Gleichheit $e=a$ hätte auf Grund von IV $g(a,x)=x$ zu Folge, was zusammen mit V zum Widerspruch $x=a$ führen würde.

Durch Einsetzen von $x=a$ in die Gleichungen (4) bekommen wir

$$(7)\qquad f_1(a,a)=f_2(a,a)=1.$$

Durch beiderseitige Differentiation der Gleichungen (1) in Bezug auf z erhält man

$$(8)\qquad g_2[f(x,y),z]=f_1[g(x,z),g(y,z)]\cdot g_2(x,z)+f_2[g(x,z),g(y,z)]\cdot g_2(y,z).$$

Wird hier $z=a$ eingesetzt und (4) und (6) benutzt, so bekommt man

$$(9)\qquad g_2[f(x,y),a]=g_2(x,a)+g_2(y,a).$$

Setzen wir weiter

$$(10)\qquad \omega(x)\stackrel{\text{df}}{=}g_2(x,a),$$

so kann man die Beziehung (9) folgendermaßen schreiben:

$$(11)\qquad \omega[f(x,y)]=\omega(x)+\omega(y).$$

Wir behaupten nun, daß die oben definierte Funktion $\omega(x)$ stark monoton ist. Den Beweis führen wir indirekt und deshalb setzen wir vorläufig voraus, daß es zwei verschiedene Werte x_1,x_2 $(x_1\neq x_2)$ gibt, für welche

$$(12)\qquad \omega(x_1)=\omega(x_2).$$

Da die Funktion ω stetig ist — dies folgt aus unseren Voraussetzungen — so muß sie im Innern des Intervalls $[x_1,x_2]$ ein Extremum erreichen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß es ein Maximum ist. Es gibt also einen Punkt z_0 derart, daß die Ungleichung

$$(13)\qquad \omega(x)\leqslant\omega(z_0)$$

für alle x aus einer gewissen Umgebung der Zahl z_0 erfüllt ist.

Es sei nun eine beliebige Zahl x_0 gegeben. Auf Grund der Voraussetzung VI ist die Gleichung $f(x_0,y)=z_0$ in y lösbar. Es existiert also ein y_0 (das von x_0 abhängen kann) mit der Eigenschaft $f(x_0,y_0)=z_0$.

Aus (11) erhalten wir $\omega(z_0)=\omega(x_0)+\omega(y_0)$. Andererseits haben wir auf Grund von (11) $\omega[f(x,y_0)]=\omega(x)+\omega(y_0)$.

Wegen der Stetigkeit von f liegen die Werte $f(x,y_0)$ nahe dem Werte $f(x_0,y_0)$, wenn nur x nahe x_0 ist. Folglich haben wir wegen (13)

$$\omega[f(x,y_0)]\leqslant\omega(z_0)$$

für genügend kleine $|x-x_0|$. Dies zieht, wenn $|x-x_0|$ genügend klein ist, die Ungleichung

$$\omega(x)+\omega(y_0)\leqslant\omega(z_0)=\omega(x_0)+\omega(y_0)$$

oder

$$\omega(x) \leqslant \omega(x_0)$$

nach sich. Dies besagt aber, daß ω im Punkte x_0 ein lokales Maximum besitzt, und da x_0 beliebig gewählt wurde, so haben wir das Ergebnis, daß ω in jedem Punkte ein lokales Maximum erreicht. Daraus folgt, daß ω konstant sein muß. Aus (10) und (6) würde aber folgen, daß diese Konstante gleich Null ist, d. h. daß die Gleichung $g_2(x,a)=0$ für alle x besteht. Insbesondere hätten wir $g_2(e,a)=0$, was der Beziehung (5) widerspricht.

Auf diese Weise haben wir die starke Monotonie der Funktion ω bewiesen. Die Funktion ω läßt sich also umkehren. Bezeichnen wir mit Ω die zu ω inverse Funktion, so können wir (11) folgendermaßen schreiben:

$$f(x,y) = \Omega[\omega(x)+\omega(y)]. \tag{14}$$

Die Gestalt der Funktion f wurde somit festgestellt und ein Teil unseres Satzes bewiesen.

Wir setzen $y=a$ in (14) ein und berücksichtigen III. Dies führt zu

$$x = \Omega[\omega(x)+\omega(a)]$$

oder

$$\omega(x) = \omega(x)+\omega(a),$$

oder endlich zu

$$\omega(a) = 0. \tag{15}$$

Aus (5) erhalten wir $g_2(e,a)=1$ oder

$$\omega(e) = 1. \tag{16}$$

Da

$$\Omega[\omega(y)] = y \tag{17}$$

erfüllt ist, so können wir statt (17) auch

$$\Omega[\omega(e)\cdot\omega(y)] = y \tag{18}$$

schreiben. Andererseits gilt die Identität IV,

$$g(e,y) = y. \tag{19}$$

Der Vergleich von (18) und (19) ergibt

$$g(e,y) = \Omega[\omega(e)\cdot\omega(y)]. \tag{20}$$

Die Gleichung (2b) ist folglich für $x=e$ erfüllt.

Wir werden jetzt zeigen, daß sie für alle x aus einer dichten Menge M erfüllt ist.

Zu diesem Zweck bezeichnen wir mit k eine beliebige ganze Zahl und betrachten die Gleichung $\omega(x)=k$. Diese Gleichung kann wegen der starken Monotonie der Funktion ω höchstens eine Lösung besitzen. Wir werden die (einzige) Lösung x_k dieser Gleichung effektiv berechnen.

Zunächst behaupten wir, daß die Rekursionsformel

$$x_n = f(e,x_{n-1})$$

besteht. In der Tat, wir haben (falls $\omega(x_n)=n$ vorausgesetzt wird)

$$\omega(x_{n+1}) = \omega[f(e,x_n)] = \omega\Omega[\omega(e)+\omega(x_n)] = \omega(e)+\omega(x_n) = 1+n.$$

Wir behaupten ferner

$$x_{-n} = f(e,x_{-n-1}),$$

was wegen (14) und (16) mit der folgenden Relation äquivalent ist:

$$x_{-n-1} = \Omega[\omega(x_{-n})-1].$$

Für $n=0$ ist die obige Relation gültig, da $\omega(x_0)=\omega(a)=0$ ist. Nehmen wir an, daß $\omega(x_{-n})=-n$ ist. Dann ist $\omega(x_{-n-1})=\omega(x_{-n})-1=-n-1$.

Die zweiseitige Folge x_k $(k=0,\ \pm1,\pm2,\ldots)$ ist also eindeutig bestimmt.

Wir werden jetzt feststellen, daß die Formel (2b) für

$$x = \bar{\bar{x}} = \Omega\left(\frac{\omega(\bar{x})}{2}\right) \tag{21}$$

besteht, falls sie für $x=\bar{x}$ besteht. Wir setzen also $g(\bar{x},y)=\Omega[\omega(\bar{x}),\omega(y)]$ voraus und berechnen $g(\bar{\bar{x}},y)$.

Auf Grund des distributiven Gesetzes haben wir

$$g[f(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{x}}),y] = f[g(\bar{\bar{x}},y),g(\bar{\bar{x}},y)].$$

Andererseits kann (wegen (21)) folgendes geschrieben werden:

$$f(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{x}}) = \Omega[\omega(\bar{\bar{x}})+\omega(\bar{\bar{x}})] = \Omega[2\omega(\bar{\bar{x}})] = \Omega[\omega(\bar{x})] = \bar{x}.$$

Folglich haben wir

$$g(\bar{x},y) = f[g(\bar{\bar{x}},y),g(\bar{\bar{x}},y)].$$

Die rechte Seite der letzten Formel ist auf Grund von (14) gleich $\Omega[2\omega\{g(\bar{\bar{x}},y)\}]$, so daß

$$\Omega[\omega(\bar{x})\cdot\omega(y)] = \Omega[2\omega\{g(\bar{\bar{x}},y)\}].$$

Wird oben beiderseitig das Zeichen des Operators Ω gestrichen, so erhalten wir

$$\frac{\omega(\bar{x})}{2}\cdot\omega(y)=\omega[g(\bar{\bar{x}},y)],\qquad \text{oder}\qquad g(\bar{\bar{x}},y)=\Omega\left(\frac{\omega(\bar{x})}{2}\,\omega(y)\right),$$

was zu beweisen war.

Man beweist nun durch vollständige Induktion die Richtigkeit der Formel (2b) für alle

$$x_n=\Omega\left(\frac{\omega(\bar{x})}{2^n}\right)\qquad (n=1,2,\ldots).$$

Die Zahlen

$$x_{k,n}=\Omega\left(\frac{\omega(k)}{2^n}\right)=\Omega\left(\frac{k}{2^n}\right),$$

wo k eine beliebige ganze Zahl und n eine beliebige natürliche Zahl bedeutet, bilden eine dichte Menge M. Die Gleichung

$$g(\bar{x},y)=\Omega[\omega(\bar{x})\cdot\omega(y)] \tag{22}$$

ist für alle x der Menge M und alle y erfüllt. Daraus folgt wegen der Stetigkeit der Funktionen ω, f, g, daß die Gleichung (22) für alle $\bar{x}$, y erfüllt sein muß.

Auf diese Weise ist auch der zweite Teil unseres Satzes bewiesen worden.

Umgekehrt: ist die überall definierte, stark monotone Funktion $\omega(x)$ gegeben, die die Menge aller Zahlen als Wertbereich hat, und sind mit Hilfe von ω die Funktionen f, g durch die Gleichungen (2) definiert (mit Ω ist die zu ω inverse Funktion bezeichnet), so sind, wie man leicht feststellt, alle Voraussetzungen unseres Satzes (außer etwa II) erfüllt.

Zitatennachweis

[1] J. Aczél, *A solution of some problems of K. Borsuk and L. Janossý*, Acta Physica Acad. Sc. Hung. IV. a (1955), S. 351-362.

[2] S. Gołąb, *Przyczynek do algebry działań w ciele liczb rzeczywistych*, Rocznik Naukowo-Dydaktyczny W. S. P. w Krakowie 1 (1954), S. 3-10.

[3] M. Hosszú, *On the functional equation of distributivity*, Acta Math. Acad. Sc. Hung. IV. 1-2 (1953), S. 159-167.

[4] H. Pidek, *Sur les objets géométriques de la classe zéro qui admettent une algèbre*, Ann. Soc. Pol. Math. 24 (1952/53), S. 111-128.

Reçu par la Rédaction le 24. 10. 1955

Realizations of some stochastic processes

by

M. FISZ (Warszawa)

1. Preliminary remarks and summary. We consider a real stochastic process $\{x_t, t\in I_0\}$, where I_0 is a closed finite interval. The x_t are functions of two arguments and can be explicitly written in the form $x_t(\omega)$, where $t\in I_0$ and $\omega\in\Omega$, Ω being the set of elementary events. The stochastic process is thus a family of random variables. The smallest Borel field $\mathfrak{F}_{I_0}$ of ω sets, with respect to which all the x_t are measurable, is generated by the field of ω sets of the form

$$\{[x_{t_1}(\omega),x_{t_2}(\omega),\ldots,x_{t_n}(\omega)]\in A\}, \tag{*}$$

where A is any right-hand semiclosed interval and $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ is any finite set of values of $t\in I_0$. The probability measure P of elements of $\mathfrak{F}_{I_0}$ is, as we know [4], uniquely determined by the P measure of ω sets of the form (*).

We shall assume that the process $\{x_t, t\in I_0\}$ is separable (see [3], p. 51). This implies that if $\{t_j\}$, $j=1,2,3,\ldots$, is a sequence satisfying the separability conditions and if ω does not belong to an exceptional ω set Λ of P measure 0, then

$$\underset{t\in I}{\mathrm{g.l.b.}}\,x_t=\underset{t_j\in I}{\mathrm{g.l.b.}}\,x_t,\qquad \underset{t\in I}{\mathrm{l.u.b.}}\,x_t=\underset{t_j\in I}{\mathrm{l.u.b.}}\,x_t \tag{1}$$

for every open interval $I\subset I_0$.

We assume further that the process $\{x_t, t\in I_0\}$ has no fixed discontinuity points, *i. e.* that

$$P[\lim_{s\to t}x_s(\omega)=x_t(\omega)]=1\qquad (t\in I_0). \tag{2}$$

It follows (see [3], p. 60) that the process considered is measurable, *i. e.* that $x_t(\omega)$ defines a function measurable in the pair of variables (t,ω) where $t\in I_0$, $\omega\in\Omega$.

The main result of this paper consists in stating that if relation (6) given below is satisfied, the ω set for which $x_t(\omega)$ are step functions has probability 1. In other words almost every realization $x_t(\omega)$ has only