Über gemischte Rand- und Anfangswertprobleme im Großen für gewisse Systeme von Differentialgleichungen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

(Eine Begründung der Fourierschen Methode)

von

K. MAURIN (Warszawa)

In der letzten Zeit wurde das gemischte Problem für hyperbolische und parabolische Gleichungen auf verschiedene Weise gelöst. Für hyperbolische Gleichungen hat Ladyženskaja [8] in ihrer Monographie verschiedene Methoden angegeben; besonders interessant ist die dort zum ersten Mal begründete Methode der Eigenfunktionen, die sogenannte *verallgemeinerte Fouriersche Methode*. Leider ist diese Methode nur auf den Fall eines reinen Punktspektrums des elliptischen Teiles, also auf beschränkte „Raum"-Gebiete anwendbar und der Beweis ist äußerst schwierig.

Dagegen ist die fast gleichzeitig erschienene Lösung des Cauchyschen Problems von Yosida [18] für eine etwas engere Klasse der hyperbolischen Gleichungen — die Wellengleichungen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten — viel einfacher behandelt worden.

Der Yosidaschen Methode ist diejenige von Browder [2] verwandt, der das gemischte Problem auf eine elegante Weise für eine weite Klasse von formal selbstadjungierten *parabolischen* Gleichungssysteme auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit Rand löst. Die letztgenannten Methoden sind für beliebige (auch unbeschränkte) Gebiete gültig, sie fußen auf dem Operatorenkalkül von Stone und von Neumann.

Die letztgenannte Methode ist der sogenannten stochastischen Integrationsmethode verwandt, welche auf der Theorie der einparametrigen Halbgruppen von Hille-Yosida begründet ist. Dieselbe wurde von Yosida [17], Milgram und Rosenbloom [10], Spencer [13], Conner [3] für die „Wärmeleitungsgleichung" für Differentialformen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten; von Liance [7] für parabolische Systeme mit starkelliptischer rechter Seite (für beschränkte Gebiete) ausgearbeitet.

Wohl auf einem anderen Prinzipe beruhen wahrscheinlich die sehr allgemeinen von Višik [16] angekündigten Ergebnisse (auch nur für

beschränkte Gebiete gültig), die hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt werden sollen.

Die von dem Verfasser verfolgte Methode bildet eine Verschmelzung und Vereinfachung der Theorie von K. Yosida. Die Idee ist folgend: Es sei

$$\partial^2 u/\partial t^2 = A_x u$$

ein System von Differentialgleichungen, wobei von A_x vorausgesetzt wird, daß es ein symmetrisches elliptisches System beliebiger Ordnung sei. Durch eine entsprechende Fortsetzung wird A_x zu einem selbstadjungierten Operator A_1, dessen Definitionsbereich einer Randbedingung genügt. Wenn man $\partial^2/\partial t^2$ als eine starke Ableitung (der abstrakten Funktion) interpretiert, bekommt man die operatorentheoretische Variante des Problems (es werden noch die Anfagswerte $u(-,0)=f, \partial u(-,0)/\partial t = g$ angegeben). Diese Variante löst man sofort mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen des Operators A_1. Man muß jetzt die Differenzierbarkeit der auf diese Weise erhaltenen verallgemeinerten Lösung beweisen und das war bisher der schwierigste Teil der Theorie; dem Verfasser gelang es dies auf eine äußerst einfache Weise zu lösen.

Wenn man die grundlegende Abhandlung von L. Gårding [5] (vgl. auch diejenige von Browder [2]) über die Eigenfunktionenentwicklungen heranzieht, stellt die hier gegebene Theorie eine Begründung der verallgemeinerten Fourierschen Methode dar.

Im Falle eines beschränkten Raum-Gebietes (reines Punktspektrums) erhält man die Fouriersche Reihenentwicklung (und eine weitgehende Verallgemeinerung der Ergebnisse von Ladyženskaja), im Falle eines reinen stetigen Spektrums die Begründung der Methode der verallgemeinerten Fourierschen Integrale.

Die hier entwickelte Theorie umfaßt die wichtigsten Gleichungen der mathematischen Physik: die Wellengleichung, die Wärmeleitungsgleichung (und zwar auch im Riemannschen Raume), die Bewegungsgleichungen der Elastizitätstheorie, die Maxwellschen Gleichungen, sowie die Bewegungsgleichungen der Quantenmechanik (die Schrödingersche Gleichung) [1]).

1. Definitionen; Zusammenfassung der Eigenschaften der schwachen Lösungen der elliptischen Gleichungssysteme. Um dem Leser die Lektüre der Beweise zu erleichtern, werden in diesem Abschnitt die Begriffe aus der Theorie des Hilbertschen Raumes zusammengestellt; es werden auch die wichtigsten Eigenschaften der schwachen (verallge-

[1]) Wie L. Maurin (in einer demnächst erscheinenden Abhandlung) gezeigt hat, ist auch das Diracsche Gleichungssystem in unserem Schema unterzubringen. Auch läßt sich unsere Theorie auf inhomogene Gleichungssysteme ausdehnen.

meinerten) Lösungen der formalselbstadjungierten elliptischen Gleichungssysteme beliebiger Ordnung ohne Beweise angeführt. Wegen der Beweise sei auf die einschlägige Literatur und eine Abhandlung des Verfassers verwiesen [9].

$\mathfrak{H}$ sei ein abstrakter Hilbertscher Raum mit dem Skalarprodukt $(u,v)=\overline{(v,u)}$; $\|u\|\overset{\text{def}}{=}(u,u)^{1/2}$. Die (abstrakte) Funktion $u(t)\subset\mathfrak{H}$, $t\in E^1$ (auf der reellen Achse) heißt *stark differenzierbar*, wenn eine Funktion $v(t)\subset\mathfrak{H}$ existiert, so daß

$$\left\|\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}-v(t)\right\|\underset{\Delta t\to 0}{\to}0;$$

$v(t)$ heißt dann die *starke Ableitung* von $u(t)$ und wird mit $\frac{du}{dt}(t)$ bezeichnet:

$$\frac{du}{dt}(t)\overset{\text{def}}{=}v(t).$$

Wenn $u(t)$ stark differenzierbar ist, dann folgt aus der Schwarzschen Ungleichung, daß die skalare Funktion $y(t)\overset{\text{def}}{=}\big(u(t),w\big)$, $w\in\mathfrak{H}$ (im gewöhnlichen Sinne) differenzierbar ist, und daß

$$y'(t)=\left(\frac{du}{dt}(t),w\right).$$

Wenn B ein beschränkter linearer Operator in $\mathfrak{H}$ ist, $B(\mathfrak{H})\subset\mathfrak{H}$, $\|B\|<\infty$, dann erhält man unmittelbar aus der Definition

$$\frac{dBu(t)}{dt}=B\frac{du}{dt}(t). \tag{1.2}$$

Jeder selbstadjungierte Operator $A_1=A_1^*$ bestimmt eine einparametrige Schar von Projektionsoperatoren $\{E(\lambda)\}$:

$$A_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\,dE(\lambda).$$

Nach J. von Neumann [11] kann man eine Funktion $F(A_1)$ des Operators A_1 definieren:

$$F(A_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)\,dE(\lambda).$$

Der Definitionsbereich von $F(A_1)$ ist daher

$$D\big(F(A_1)\big)=\Big\{f\in\mathfrak{H}:\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2d\|E(\lambda)f\|^2=\|F(A_1)f\|^2<\infty\Big\}. \tag{1.3}$$

Es gelten dabei die wichtigen Inklusionen[2])

$$\begin{aligned}(F_1+F_2)(A_1)&\supset F_1(A_1)+F_2(A_1),\\ (F_1\cdot F_2)(A_1)&\supset F_1(A_1)\cdot F_2(A_1).\end{aligned} \tag{1.4}$$

Man hat das Gleichheitszeichen z. B. dann, wenn $F_2(\lambda)$ fast überall in Bezug auf $\{E(\lambda)\}$ beschränkt ist. In diesem Falle hat man

$$\|F_2(A_1)\|=\operatorname{ess\,sup}|F_2(\lambda)| \tag{1.5}$$

in Bezug auf $\{E(\lambda)\}$.

Aus obigem folgt, daß

$$u(t)\overset{\text{def}}{=}F(A,t)f=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda,t)\,dE(\lambda)f$$

stark differenzierbar ist und daß

$$\frac{du(t)}{dt}=\left[\frac{\partial F}{\partial t}(A,t)\right]f=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial F}{\partial t}(\lambda,t)\,dE(\lambda)f \tag{1.6}$$

gilt, wenn z. B. $\big|\big(F(\lambda,t+\Delta t)-F(\lambda,t)\big)/\Delta t\big|<G(\lambda)\,\Delta t$ und $f\in D\big(G(A_1)\big)$.

Wenn wir A_1 mit dem Projektionsoperator $P_s\overset{\text{def}}{=}E(s)-E(-s)$, $0<s<\infty$, multiplizieren, so erhalten wir einen beschränkten Operator:

$$P_sA_1=A_1P_s=A_1P_s^2,\qquad \|P_sA_1\|\leqslant s<\infty. \tag{1.7}$$

Wenn $D(A_0)\subset D(A_1)$ und $A_0f=A_1f$ identisch für $f\in D(A_0)$ gilt, dann heißt A_1 die (selbstadjungierte) *Fortsetzung* von A_0. In Zeichen: $A_0\subset A_1$, oder $A_1\supset A_0$.

A_0 heißt *symmetrisch*, wenn $A_0\subset A_0^*$.

Im folgenden werden wir uns nur mit solchen symmetrischen Operatoren befassen, die eine selbstadjungierte Fortsetzung $A_1=A_1^*$ erlauben.

1° Bekanntlich existiert eine solche Fortsetzung im Falle eines halbbeschränkten Operators: $(A_0u,u)\geqslant a(u,u)$, $a>-\infty$, identisch für $u\in D(A_0)$.

---

[2]) Von F, F_1, F_2 wird vorausgesetzt, daß sie meßbar, endlich und fast überall in Bezug auf $\{E(\lambda)\}$, d. h. in Bezug auf alle Funktionen $(E(\lambda)f,f)=\|E(\lambda)f\|^2$ definiert sind (vgl. [1], S. 347).

Nach einem Satz von Friedrichs existiert ein halbbeschränkter selbstadjungierter Operator $A_1 = A_1^* \supset A_0$ derart, daß

$$(1.8) \qquad (A_1 v, v) \geqslant a(v, v), \qquad A_1 = \int\limits_a^\infty \lambda \, dE(\lambda),$$

identisch für $v \in D(A_1)$ (es ist dieselbe Konstante wie in voriger Ungleichung) gilt.

2° Im Falle eines sogenannten reellen symmetrischen Operators A_0 existiert auch eine selbstadjungierte Fortsetzung $A_1 \supset A_0$. Zu dieser Klasse gehören die formalselbstadjungierten Differentialoperatoren mit *reellen* Koeffizienten.

Es sei Ω eine differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $n \geqslant 1$.

$C_0^\sigma(\Omega)$ sei die Menge der σ-mal stetig in Ω differenzierbaren komplexwertigen Funktionen mit kompakten Trägern in Ω.

$C_0^{\sigma,r}(\Omega)$ sei die Menge der Vektorfunktionen mit r-Komponenten auf Ω, deren jede Komponente $\in C_0^\sigma(\Omega)$: $f \in C_0^{\sigma,r}(\Omega)$, wobei

$$f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_r(x)\big),$$

dann und nur dann, wenn $f_i \in C_0^\sigma(\Omega)$, $i = 1, \ldots, r$.

Es wird in dieser Abhandlung eine Realisation $L^{2,r}(\Omega)$ des Hilbertschen Raumes benutzt:

$L^{2,r}(\Omega)$ bedeutet die Menge der Vektorfunktionen, deren r komplexwertige Komponenten quadratisch integrierbar sind:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^r \int\limits_\Omega u_i(x) \overline{v_i(x)} \, dx$$

(Integration in Bezug auf das Lebesguesche n-Maß), $u(-, t) \in D(A_1)$ bedeutet eine (abstrakte) Vektorfunktion der reellen Variablen (des Parameters) t mit Werten im Definitionsbereich des Operators A_1: $D(A_1)$.

Ein System von differentiellen Operatoren der Ordnung σ $(\sigma \geqslant 1)$ mit komplexen Koeffizienten

$$(1.9) \quad Au = (Au)_i(x) = \sum_{j=1}^r \sum_{\substack{a_1, \ldots, a_s = 1 \\ 0 \leqslant s \leqslant \sigma}}^n a_{a_1, \ldots, a_s; ij}(x) \frac{\partial^s u_j}{\partial x_{a_1} \ldots \partial x_{a_s}} \qquad (i, j = 1, \ldots, r)$$

heißt *formal selbstadjungiert*, wenn

$$(1.10) \qquad Au = A^+ u$$

ist; wobei

$$(A^+ u)_i(x) = \sum_{j=1}^r \sum_{\substack{a_1, \ldots, a_s = 1 \\ 0 \leqslant s \leqslant \sigma}}^n (-1)^s \frac{\partial^s \big(\overline{a_{a_1, \ldots a_s; j, i}(x)} \, u(x)\big)}{\partial x_{a_1} \ldots \partial x_{a_s}}.$$

A heißt *elliptisch*, wenn die Matrix

$$a_{ij}(x, \xi) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{a_1, \ldots, a_s = 1}^n a_{a_1, \ldots, a_s; i, j}(x) \, \xi_{a_1} \ldots \xi_{a_s}$$

nicht singulär für $x \in \Omega$, $\xi \neq 0$ $\big(\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)\big)$ ist. Von den Koeffizienten des Operators A wird folgendes vorausgesetzt:

$$a_{a_1, \ldots, a_s, i, j} \in C^{s+\sigma}(\Omega), \qquad a_{a_1, \ldots, a_\sigma; i, j} \in C^{\max(\sigma+s, 2\sigma)}(\Omega).$$

Solche Koeffizienten werden im folgenden „hinreichend oft differenzierbar“ genannt [9].

Um die Theorie der symmetrischen Operatoren in Hilbertschen Raume auf A anwenden zu können, beschränken wir A auf beliebig oft differenzierbare Vektorenfelder mit kompakten Trägern in Ω; diesen Operator bezeichnen wir als A_0: $D(A_0) = C_0^{\infty, r}(\Omega)$, $A \supset A_0$; A_0 ist symmetrisch.

Wenn A_0 eine selbstadjungierte Fortsetzung von A_1 hat — was wir im folgenden immer annehmen werden — so haben wir die Inklusion $A_0 \subset A_1 = A_1^*$. Da aber $A_0^* \supset A_1^* = A_1$ gilt, hat man für jede selbstadjungierte Fortsetzung von A_0, A_1 die wichtige Inklusion $A_0 \subset A_1 \subset A_0^*$, daher auch

$$(1.11) \qquad A_0^q \subset A_1^q \subset (A_0^q)^* \qquad (q = 1, 2, \ldots).$$

Über die Elemente des Definitionsgebietes von A_0^* gilt folgendes *Lemma* (ein Spezialfall des Satzes über die schwachen Lösungen der allgemeinen elliptischen Systeme [9]):

Voraussetzung. $u \in D(A_0^q)^*$.

Behauptung. (a) *Für jedes x^0 gibt es eine solche Koordinatenumgebung $V(x^0) \subset \Omega$ von x^0, daß*

$$(1.12) \qquad u_i(x) = \sum_{\nu=1}^r \Big\{ \int\limits_{V(x^0)} \big(u_\nu(y) r_{\nu i}(y, x) \, dy + (A_0^{*q} u)_\nu(y) \, s_{\nu i}(y)\big) \, dy \Big\}$$

fast überall (f. ü.) in $V(x^0)$ gilt, wobei

$$(1.13) \qquad r_{ik}(-, x), s_{ik}(-, x) \in L^2\big(V(x^0)\big),$$

$$r_{ik} \in C^{q\sigma}\big(V(x^0) \times V(x^0)\big) \qquad (i, k = 1, \ldots, r);$$

die $s_{ik}(y, x)$ sind für $y \neq x$ $q\sigma$-mal stetig differenzierbar; die Integrale rechts gehören jedenfalls zu $C^{l,r}\big(V(x^0)\big)$, wobei $l < q\sigma - n/2$.

(b) *Es ist*

$$(1.14) \qquad u \in C^{l,r}(\Omega), \qquad l < q\sigma - n/2,$$

nach einer Korrektur auf einer Nullmenge (dies folgt augenblicklich aus (a)).

(c) *Insbesondere haben wir für $q > n/2\sigma+1$: wenn $u \epsilon D(A_0^{q*})$, dann $u \epsilon C^{\sigma,r}(\Omega)$.*

Wegen des Beweises sei auf die Abhandlung [9] verwiesen.

Bemerkung. Ein ganz analoger Satz gilt auch im Falle eines gewöhnlichen Gleichungssystems, da zu seinem Beweise nur die Existenz einer Grundlösung nötig ist (was bekanntlich im diesem Falle, d. h. für $n=1$ stattfindet). Die gewöhnlichen Gleichungen sind also ein „Spezialfall der elliptischen" im Sinne von L. Schwartz.

2. Lösung der gemischten Probleme für das System vom Typus $\partial^2 u/\partial t^2 = A_x u$. Nach diesen Vorbereitungen kann man zur Formulierung der gemischten Rand-und Anfangswertprobleme für eine wichtige Klasse der Gleichungssysteme auf der Mannigfaltigkeit Ω übergehen. Die in diesem Abschnitt behandelte Gleichungsklasse enthält als Sonderfälle:

1° $r=6$, $\sigma=2$. Dieser Spezialfall enthält als Sonderfall die Maxwellschen Wellengleichungen $n=3$ (nach der Diagonalisation).

2° $r=1$, $\sigma=2$. Dieser Fall enthält wieder als Sonderfall die Klein-Gordon'sche Gleichung der Quantenmechanik und die Wellengleichung im Riemannschen (also auch Euklidischen) Raume. Er wurde in der wichtigen Abhandlung von K. Yosida nach einer anderen Methode behandelt.

Auch fallen in diese Unterklasse die von Ladyženskaja nach einer anderen Methode behandelten hyperbolischen Gleichungen zweiter Ordnung, wobei die von ihr entwickelte Methode nur für beschränkte Gebiete und spezielle Randbedingungen gültig ist.

3° $r=3$, $\sigma=2$, $n=3$. Ω ist ein Bereich des 3-dimensionalen Euklidischen Raumes. Die Klasse enthält wiederum als Sonderfall die Schwingungsgleichungen der elastischen Körper.

Gesucht ist eine Lösung $u(x,t)$ des Systems

$$\partial^2 u(x,t)/\partial t^2 = A_x u(x,t) \qquad (A_x = A), \tag{2.1}$$

welche die Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = f(x), \qquad \partial u(x,0)/\partial t = g(x) \tag{2.2}$$

und eine homogene Randbedingung erfüllt:

$$u(-,t) \subset D(A_1). \tag{2.3}$$

Nach dem Vorbild von Yosida [18] formulieren wir gleich die *operatorentheoretische Variante* des Problems (2.1)-(2.3):

Gesucht ist eine (abstrakte) Funktion $u(-,t) \subset D(A_1)$, die eine Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dt^2}(-,t) = A_1 u(-,t) \tag{2.1'}$$

ist, und die Anfangswerte

$$u(-,0) = f, \qquad \frac{du}{dt}(-,0) = g \tag{2.2'}$$

annimmt.

Die Lösung von (2.1'), (2.2') wird im folgenden die *verallgemeinerte Lösung* von (2.1)-(2.3) genannt. Es gilt der folgende

HAUPTSATZ. Voraussetzung. 1° *$A = A^+ = A_x$ ist ein formalselbstadjungiertes elliptisches System der Ordnung σ mit hinreichend regulären Koeffizienten.*

2° *$-A_0$ ist von unten beschränkt, d. h. es gibt eine solche Konstante $\alpha > -\infty$, daß $(-A_0\varphi, \varphi) \geqslant \alpha(\varphi,\varphi)$.*

Behauptung. (a) *Wenn $f \epsilon D(A_1)$, $g \epsilon D(A_1^{1/2})$, dann besitzt das gemischte Problem eine (wie im Abschnitt 5 gezeigt wird — einzige) verallgemeinerte Lösung u,*

$$u(-,t) = \int_\alpha^\infty \cos\lambda^{1/2} t\, dE(\lambda) f + \int_\alpha^\infty \lambda^{-1/2} \sin\lambda^{1/2} t\, dE(\lambda) g, \tag{2.4}$$

wobei

$$-A_1 = \int_\alpha^\infty \lambda\, dE(\lambda)$$

die Spektraldarstellung von A_1 ist.

(b) *Wenn $f \epsilon D(A_1^{m+1})$, $g \epsilon D(A_1^m)$, $m > n/2\sigma+1$, dann ist $u(-,t)$ (gegeben durch (2.4)) mit einem Vektorfeld $\tilde{u}(x,t)$ in $\Omega\times T$ $\left(T = \{t : t \geqslant 0\}\right)$ äquivalent, wobei $\tilde{u}(-,t) \epsilon C^{\sigma,r}(\Omega)$, $\tilde{u}(x,-) \epsilon C^{2,r}(T)$, d. h. $\tilde{u}(x,t)$ die klassische Lösung des gemischten Problems* (2.1)-(2.3) *ist.*

(c) *Wenn $f, g \epsilon D(A^q)$ für jedes $q = 1,2,\ldots$, dann existiert eine beliebig oft differenzierbare Lösung des Problems* (2.1)-(2.3).

Genauer gesagt: $u(-,t)$ ist äquivalent mit dem Vektorenfeld $\tilde{u}(x,t) \epsilon C^{\infty,r}(\Omega\times T)$. (In diesem Falle werden die Koeffizienten von A_x als beliebig oft differenzierbar vorausgesetzt).

Der Beweis erfordert nur wenige Zeilen.

Ad (a). Durch zweifache Anwendung von (1.6)[3]) auf (2.4) bekommt man

$$\frac{du}{dt}(-,t)=\int_a^\infty \lambda^{1/2}\sin\lambda^{1/2}\,dE(\lambda)f+\int_a^\infty \cos\lambda^{1/2}t\,dE(\lambda)g,$$

$$-\frac{d^2u}{dt^2}(-,t)=\int_a^\infty \lambda\cos\lambda^{1/2}t\,dE(\lambda)f+\int_a^\infty \lambda^{1/2}\sin\lambda^{1/2}t\,dE(\lambda)g=-A_1u(-,t),$$

w. z. b. w.

Ad (b). Wenn wir $A_1^{m+1}u(-,t)=(A_0^{m+1})^*u(-,t)\overset{\mathrm{def}}{=}h(-,t)$ setzen, dann haben wir den über die Anfangswerte f,g gemachten Voraussetzungen gemäß — also nach (1.2) und (1.4) — daß $u(-,t)\subset D(A_0^{m+1*})$.

Durch die Anwendung der Gleichung (1.12) des Lemmas kommt

$$u_i(x,t)=\sum_{\nu=1}^{r}\int_{V(x0)}u_\nu(t,y)r_{\nu i}(y,x)\,dy+\sum_{\nu=1}^{r}\int_{V(x0)}h_\nu(y,t)s_{\nu i}(y,x)\,dy \tag{2.5}$$

f. ü. in $V(x^0)$.

Da $u(-,t)$ und $A_1^{m+1}u(-,t)=h(-,t)$ zweimal stark (nach t) differenzierbar sind, folgt wegen (1.13) und (1.1), daß die rechte Seite von (2.5) zweimal nach t differenzierbar ist. Ihre Differenzierbarkeit nach x ist in (1.14) enthalten.

Ad (c). Die unendlich-vielmalige Anwendung der Schlußweise von (b) erledigt auch diesen Fall. Der Beweis des Hauptsatzes ist also vollständig erbracht.

3. Die Lösung der gemischten Probleme für das System vom Typus $\partial u/\partial t=A_xu$. Die in diesem Abschnitt behandelte Klasse wurde vor kurzem von Browder [2] untersucht. Sie umfaßt im Falle $r=1$, $\sigma=2$ die Wärmeleitungsgleichung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Das Analogon des Hauptsatzes bildet der

SATZ VON BROWDER. *Bei den über den Operator A_x in Abschnitt 2 gemachten Voraussetzungen hat das gemischte Problem: „Gesucht ist eine Lösung $v(x,t)$ der Gleichung*

$$\partial v(x,t)/\partial t=A_xv(x,t), \tag{3.1}$$

die der Anfangsbedingung

$$\|v(-,t)-g\|\underset{t\to 0}{\to}0 \qquad (t>0,\ g\in L^{2,r}(\Omega)^{2,r}) \tag{3.2}$$

und einer homogenen Randbedingung $v(-,t)\subset D(A_1)$ genügt" eine einzige verallgemeinerte Lösung:

[3]) Die Anwendbarkeit von (1.6) ist wegen den über f und g gemachten Voraussetzungen gesichert.

$$v(-,t)=\int_{a>-\infty}^{\infty}e^{-\lambda t}\,dE(\lambda)g,\qquad t>0. \tag{3.3}$$

$v(-,t)$ ist nach der Korrektur auf einer Nullmenge gleich

$$v(x,t)\in C^{\infty,r}(\Omega\times R),\qquad wo\qquad R=\{t:t>0\}.$$

Der Beweis ist identisch mit dem des vorigen Abschnittes; die rasche Abnahme von $e^{-\lambda t}$ für $\lambda\to\infty$, $t>0$ erlaubt uns die Schlußweise von Abschnitt 2 (c) für ein beliebiges $g\in L^{2,r}(\Omega)$ anzuwenden, w. z. b. w.

4. Die Lösung der gemischten Probleme für Systeme vom Typus $(1/\sqrt{-1})(\partial u/\partial t)=A_xu$ (Bewegungsgleichungen der Quantenmechanik). Die in diesem Abschnitt behandelte Klasse enthält:

1° im Falle $r=1$, $\sigma=2$ die Schrödingersche Gleichung;

2° im Falle $r=4$, $\sigma=1$ die Diracsche Gleichung des Elektrons[4]). In diesem Falle wird keine Halbbeschränktheit von A_0 vorausgesetzt.

Es gilt der

SATZ. *Das System*

$$(-1)^{-1/2}\partial u(x,t)/\partial t=A_xu(x,t), \tag{4.1}$$

wobei $A_x=A$ ein formalselbstadjungiertes elliptisches Gleichungssystem mit hinreichend regulären Koeffizienten ist, besitzt eine klassische Lösung, die die gemischten Rand- und Anfangswertbedingungen

$$u(-,t)\subset D(A_1)\qquad mit\qquad A_1=A_1^*\supset A_0, \tag{4.2}$$

$$u(-,0)=f\in L^{2,r}(\Omega) \tag{4.3}$$

erfüllt.

Beweis. Die operatorentheoretische Variante von (4.1)-(4.3) hat die (einzige) Lösung

$$u(-,t)=e^{\sqrt{-1}tA_1}f=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\sqrt{-1}t\lambda}\,dE(\lambda)f \tag{4.4}$$

(gebildet durch die Anwendung der Gruppe der unitären Operatoren $e^{\sqrt{-1}tA_1}$).

Wenn $f\in D(A_1^m)$, wird wieder die Schlußweise des Abschnitts 2 zum Ziele führen, da die Ungleichung $|\lambda^m e^{\sqrt{-1}t\lambda}|\leqslant\lambda^m$ gilt, w. z. b. w.

[4]) Daß die hier entwickelte Theorie auf das Diracsche System anwendbar ist, d. h. daß A eine selbstadjungierte Fortsetzung besitzt, hat L. Maurin gezeigt. Im Falle der Schrödingerschen Gleichung ist dies evident wegen der Realität der Koeffizienten der rechten Seite, vgl. Abschnitt 1.

§ 5. Die Sachgemäßheit der operatorentheoretischen Varianten der gemischten Probleme.

§ 5. Die Sachgemäßheit der operatorentheoretischen Varianten der gemischten Probleme. Die in Abschnitten 2, 3, 4 gestellten Probleme haben 1° eine einzige Lösung, die 2° stetig von den Anfangswerten abhängt. Sie sind also korrekt gestellt. Es genügt diesen Satz im Falle der Gleichung $d^2u/dt^2=A_1u$ zu beweisen, da der „parabolische" und der „quantenmechanische" Fall noch einfacher nach demselben Muster erledigt wird. Wir beweisen also den folgenden

Satz. (a) *Die Lösung der Gleichung*

$$\frac{d^2u}{dt^2}(-,t)=A_1u(-,t), \tag{5.1}$$

die den Anfangsbedingungen $u(-,0)=0$, $(du/dt)(-,0)=0$ *genügt, verschwindet identisch.*

(b) *Wenn* u^i *die Lösung des Anfangswertproblemes*

$$\frac{d^2u^i}{dt^2}=A_1u,\quad u^i(-,0)=f^i,\quad \frac{du^i}{dt}(-,0)=g^i\quad (i=1,2)$$

ist, dann gilt die Ungleichung

$$\|u^1(-,t)-u^2(-,t)\|<C\{\|f^1-f^2\|+\|g^1-g^2\|\}, \tag{5.2}$$

wobei C *eine von* t, f, g *unabhängige positive Konstante ist.*

Beweis. *Ad* (a). Es sei $P_s\overset{\text{def}}{=}E(s)-E(-s)$ [5] $(0\leqslant s<\infty)$, wobei $\{E(\lambda)\}$ die Spektralschar von A_1 ist. Da P_sA_1 ein beschränkter linearer Operator ist, haben wir

$$P_s\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}P_su=P_sA_1u=A_1P_su=A_1P_s^2u=(P_sA_1)P_su,$$

d. h., wenn $u(-,t)$ eine Lösung des Problems (5.1)-(5.2) ist, dann ist $v_s(-,t)\overset{\text{def}}{=}P_su(-,t)$ eine Lösung des Problems

$$\frac{d^2v}{dt^2}=(P_sA_1)v_s, \tag{5.1'}$$

$$v_s(-,0)=0,\quad \frac{dv_s}{dt}(-,0)=0. \tag{5.2'}$$

Wegen $\|P_sA_1\|\leqslant s<\infty$ hat (5.1')-(5.2') nur die triviale Lösung $v_s(-,t)\underset{t}{\equiv}0$ (vgl. [1]).

Da aber $0=v_s(-,t)=P_su(-,t)\underset{s\to\infty}{\to}u(-,t)$ haben wir $u(-,t)=0$ für jedes t, w. z. b. w.

[5] Dieser einfache Eindeutigkeitsbeweis scheint von Hurgin [16] zu stammen.

Ad (b). Nach (a) und Abschnitt 2 hat $u^i(-,t)$ die folgende Gestalt:

$$u^i(-,t)=\cos(-A_1^{1/2}t)f^i+[(-A_1)^{-1/2}\sin(-A_1)^{1/2}t]g^i,$$

d. h.

$$\begin{aligned}&\|u^1(-,t)-u^2(-,t)\|\\&\quad=\|[\cos(-A_1^{1/2})t][f^1-f^2]+[(-A_1)^{-1/2}\sin(-A_1)^{1/2}t]\cdot[g^1-g^2]\|\\&\quad\leqslant C(\|f^1-f^2\|+\|g^1-g^2\|),\end{aligned}$$

wobei $C=\max(\operatorname{ess\,sup}|\cos\lambda^{1/2}t|,\operatorname{ess\,sup}\lambda^{-1/2}\sin\lambda^{1/2}t|)$, w. z. b. w.

6. Die Randbedingungen: $u(-,t)\subset D(A_1)$. Die Inklusion $u(-,t)\subset D(A_1)$, wobei $A_1\supset A_0$, umfaßt viele homogene Randbedingungen; dies wurde vor kurzem von Viŝik gezeigt [15]. Für eine wichtige Klasse von elliptischen Differenzialoperatoren wurden von ihm alle selbstadjungierten Fortsetzungen von $A_0\subset A_0^*$ aufgestellt, für welche A_1^{-1} vollstetig ist, bzw. für welche für die Gleichung $A_1u=h$ und die drei Fredholmschen Sätze gelten; er hat außerdem gezeigt, daß man jeder solchen Fortsetzung eine Randbedingung (in sogenannter *kanonischer Gestalt*) eindeutig zuordnen kann. Die Halbbeschränkheit der elliptischen Operatoren in endlichen Bereichen wurde von Viŝik, Gårding und Browder bewiesen.

7. Bemerkungen über das Cauchysche Problem. Wie wir gezeigt haben, führt die hier entwickelte Methode im Falle von Mannigfaltigkeiten mit Rand zu der Lösung der gemischten Rand- und Anfangswertaufgaben. Wenn Ω eine offene Mannigfaltigkeit *ohne Rand* ist, löst unsere Methode bloß das Cauchysche Problem (vgl. [18]). Die Inklusion $u(-,t)\subset D(A_1)$ dürfte dann als eine Bedingung für das Verhalten „im Unendlichen" aufgefaßt werden. Es wäre interessant diejenigen selbstadjungierten Fortsetzungen von A zu finden, die einer Verallgemeinerung der „Ausstrahlungsbedingung" von Sommerfeld entsprechen würden.

8. Eine Begründung der Fourierschen Methode. In einer grundlegenden Abhandlung von Gårding [4] (vgl. auch ähnliche Ergebnisse bei Browder [2]) wurde gezeigt, daß jeder selbstadjungierten Fortsetzung $A_1\supset A$ des Operators A_0 eine Entwicklung nach Eigenfunktionen entspricht. Die Spektralschar $\{E(\lambda)\}$ des Operators A_1 hat folgende „klassische" Realisation:

$$[E(\lambda_2)-E(\lambda_1)]f(x)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sum_{k=1}^{N(\lambda)}\Theta^k(y,\lambda)(Ff)^k(\lambda)\,d\tau(\lambda), \tag{8.1}$$

wobei

$$(Ff)^k(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \text{l. i. m.} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{r} \overline{\Theta_i^k(x,\lambda)}\, f_i(x)\, dx; \tag{8.2}$$

die $\Theta^j(x,\lambda)$ sind die zu dem Eigenwert λ gehörigen Eigenfunktionen des Operators A_x:

$$A_x \Theta^j(x,\lambda) = \lambda \Theta^j(x,\lambda), \qquad \Theta^j(-,\lambda) \in C^{\sigma,r}(\Omega);$$

im Falle eines gewöhnlichen Operators A ist ihre Zahl $N(\lambda)$ endlich, im Falle der elliptischen Operatoren wird $N(\lambda)$ im allgemeinen unendlich sein. $d\tau(\lambda)$ bedeutet ein nichtnegatives Maß auf der reellen Achse E^1. $Ff \in L^2(\tau)$ und das Integral in (8.2) konvergiert im quadratischen Mittel von $\tau(\lambda)$. Wenn wir (8.1) und entsprechendes für $[E(\lambda_1)-E(\lambda_2)]g(y)$ in die Formeln (2.4), (3.3), (4.4) einsetzen, erhalten wir die Lösung der gemischten, resp. Cauchyschen Probleme, in der Gestalt von verallgemeinerten Fourierschen Integrale. Die Lösung der im Abschnitt 2 behandelten Probleme hat also folgende Gestalt:

$$u(x,t) = F^* \cos t(\lambda)^{1/2} Ff + F^*(\lambda)^{-1/2} \sin t(\lambda)^{1/2} Fg,$$

wobei

$$(F\varphi)^k(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \underset{L^2(\tau)}{\text{l. i. m.}} \int\limits_{\Omega} \overline{\Theta^k(x,\lambda)} \cdot \varphi(x)\, dx,$$

$$F^* h(x) \overset{\text{def}}{=} \underset{L^2,r(\Omega)}{\text{l. i. m.}} \int\limits_{a}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(\lambda)} h^k(\lambda)\Theta^k(x,\lambda)\, d\tau(\lambda),$$

mit $\overline{\Theta^k(x,\lambda)} \cdot \varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{r} \overline{\Theta_i^k(x,\lambda)}\, \varphi_i(x)$.

Das Maß τ ist auf dem Spektrum von A_1 konzentriert. Im Falle eines reinen Punktspektrums von A_1 erhält man also verallgemeinerte (orthogonale) Fouriersche Reihen.

Bekanntlich hat man im letztgenannten Falle mit der Vollstetigkeit von A_1^{-1} zu tun, was (oft) im Falle eines beschränkten Gebietes des Euklidischen Raumes stattfindet. Vor kurzem wurde der Sonderfall $r=1$, $\sigma=2$ hier nach einer gänzlich anderen Methode von Ladyženskaja behandelt. Es soll nochmals betont werden, daß die hier entwickelte Methode für ein beliebiges Spektrum anwendbar ist, also auch im Falle der physikalisch so wichtigen unendlichen Gebiete.

Wie die „Bemerkung" des Abschnitts 1 zeigt, gelten alle Ergebnisse der Abschnitte 2-8 auch für $n=1$ (den Fall eines gewöhnlichen Systems A_x, so z. B. für die schwingende Saite).

Zitatennachweis

[1] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique*, Livre IV, chap. I, II, III, Paris 1949.

[2] F. E. Browder, *The eigenfunction expansion theorem for the general self-adjoint singular elliptic partial differential operator*, Proc. Math. Acad. Sc. U. S. A. 40 (1954), S. 454-463.

[3] P. E. Conner, *The Green's and Neumann's problems for differential forms on Riemannian manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. 40 (1954), S. 1151-1155.

[4] L. Gårding, *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations*, Mathematica Scand. 1 (1953), S. 55-71.

[5] — *Eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators*, 12 Skand. Math. Kongr., Lund 1953, S. 44-55.

[6] Я. И. Гургин, *О единвтреннdсти решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных*, Изв. АН СССР, Серия мат. 12 (1948), S. 213-223.

[7] В. Е. Лянце, *Об одной краевой задаче для параболических систем дифференциальных уравнений с сильно эллиптической правой частью*, Мат. сборник 35 (77) (1954), S. 357-368.

[8] О. А. Ладиженская, *Смешанная задача для гиперболического уравнения*, Москва 1953, insbesondere S. 24.

[9] K. Maurin, *Der Fundamentalsatz über schwache Lösungen der allgemeinen linearen Systeme der elliptischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung*, Bull. Acad. Pol. Sc., Cl. III, 2 (1954), S. 457-461.

[10] A. Milgram and P. Rosenbloom, *Harmonic forms and heat conduction*, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. 37 (1951), S. 180-184.

[11] J. v. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin 1932, insbesondere S. 250.

[12] F. Riesz et B. Sz. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest 1953.

[13] D. C. Spencer, *Heat equation on arbitrary Riemannian manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. 39 (1954), S. 327-330.

[14] B. Sz. Nagy, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes*, Berlin 1942.

[15] М. И. Вишик, *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений*, Труды Моск. Мат. Общества 1(1952), S. 187-246.

[16] — *Смешанные краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, содержащих вторую производную по времени и приближенный метод их решения*, Доклады АН СССР 100 (1955), S. 409-412.

[17] K. Yosida, *An ergodic theorem associated with harmonic integrals*, Proc. Japan Acad. 27 (1951), S. 540-544.

[18] — *On Cauchy's problem in the large for wave equations*, ibidem 28 (1952), S. 396-403.

Reçu par la Rédaction le 18. 7. 1955