by lemma 2, and it is identical with the space

$$X(\|x\|_k)/J_{k_0}, \quad \text{where} \quad J_{k_0} = \{x: \|x\|_{k_0} = 0\},$$

with the norm $\|\mathfrak{X}\|_{k_0} = \|x\|_{k_0}$ $(x \epsilon \mathfrak{X})$.

Thus $X(\|x\|_k)$ is relatively complete.

We express our thanks to Prof. Sikorski and Dr Altman for having read and corrected the manuscript.

Reçu par la Rédaction le 15. 6. 1955

Sur un problème du calcul de probabilité (II)*

(Mouvement d'une molécule sur plusieures droites parallèles)

par

S. PASZKOWSKI (Wrocław)

Dans ce travail nous nous occupons d'une généralisation des problèmes introduits dans la partie I [1]): elle consiste à considérer le mouvement d'une molécule le long de plusieures droites parallèles, avec possibilité de saut d'une droite sur l'autre.

Dans le § 2.1 nous précisons le problème et les hypothèses nécessaires. Les deux paragraphes suivants jouent un rôle auxiliaire: dans le § 2.2 nous donnons quelques lemmes algébriques, le § 2.3 complète la note I par quelques lemmes employés dans la suite. Les §§ 2.4-2.6 contiennent les résultats principaux du travail. Le § 2.7 est un résumé de ces résultats. La numération des formules fait suite à celle de la note I.

2.1. Problèmes. $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ sont des droites parallèles. Sur chaque droite se trouve dispersée une substance dont la masse est traitée du point de vue mathématique comme mesure. Ainsi, une mesure μ_i est supposée définie sur la droite Π_i $(i=1,2,\ldots,n)$, satisfaisant aux trois conditions: 1° elle est finie sur chaque intervalle, 2° elle est infinie sur chaque demi-droite, 3° elle est une fonction continue de l'intervalle.

Sur le système de droites $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ se meut une molécule qui peut changer de direction de sa marche, sauter d'une droite sur l'autre (mais seulement dans une direction orthogonale aux droites), ou être arrêtée. Nous supposons qu'une molécule arrêtée ne peut plus entrer en mouvement.

Considérons un système de segments $I_1, I_2, \ldots, I_n$, où $I_i \subset \Pi_i$, qui sont des projections orthogonales l'un de l'autre. Posons $x_1 = \mu_1(I_1)$, $x_2 = \mu_2(I_2), \ldots, x_n = \mu_n(I_n)$. La molécule qui se meut sur le système $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ peut entrer dans le système $I_1, I_2, \ldots, I_n$ du côté droit

* Ce travail fut présenté à la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Mathématique le 2. 12. 1955.

[1]) J. Mycielski et S. Paszkowski, *Sur un problème du calcul de probabilité (I) (Le mouvement d'une molécule sur une droite)*, Studia Mathematica, ce volume, p. 188-200. Dans la suite ce travail sera cité comme note I.

ou du côté gauche et peut en sortir à droite ou à gauche, ou bien être arrêtée dans le système.

L'objet de nos considérations sont les probabilités conditionnelles des phénomènes suivants: $q_{ij}(x)$ — la sortie de la molécule du côté gauche du segment I_j; $p_{ij}(x)$ — la sortie de la molécule du côté droit du segment I_j; $r_{ij}(x)$ — l'arrêt de la molécule dans le segment I_j (sous l'hypothèse que la molécule est entrée du côté gauche dans le segment I_i); $P_{ij}(x)$ — la sortie de la molécule du côté gauche du segment I_j; $Q_{ij}(x)$ — la sortie de la molécule du côté droit du segment I_j; $R_{ij}(x)$ — l'arrêt de la molécule dans le segment I_j (sous l'hypothèse que la molécule est entrée du côté droit dans le segment I_i), où $x=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ et $i,j=1,2,\ldots,n$.

Les lettres p, P correspondent au passage de la molécule sans changement de direction; les lettres q,Q — au passage avec changement (réflexion); les lettres r, R — à l'arrêt de la molécule.

Nous faisons l'hypothèse que *les probabilités définies ne dépendent que du numéro de la droite d'entrée* (i) *et celui de la droite de sortie* (j) *et des mesures* $x_1,x_2,\ldots,x_n$, ainsi elles ne dépendent pas du mouvement antérieur à l'entrée de la molécule dans le système.

Nous allons préciser encore une autre hypothèse sur les probabilités définies ci-dessus, qui sera essentielle dans ce travail.

Soient I et J deux systèmes de segments $I_1,I_2,\ldots,I_n$ et $J_1,J_2,\ldots,J_n$ où deux segments quelconques appartenant au même système sont des projections orthogonales l'un de l'autre, $I_i\subset\Pi_i$, $J_i\subset\Pi_i$ et les segments I_i et J_i sont contigus. Soit $I\cup J$ le système de segments $I_1\cup J_1,\ldots,I_n\cup J_n$.

Chaque mouvement de la molécule dans le système $I\cup J$ depuis le moment de l'entrée dans ce système jusqu'au moment de la sortie ou de l'arrêt peut être décomposé en phénomènes, introduits plus haut, concernant les systèmes I et J.

Nous supposons que *la probabilité d'un mouvement de la molécule dans le système* $I\cup J$ *(sous l'hypothèse que la molécule est entrée dans ce système) est égal au produit des probabilités* $p_{ij},q_{ij},\ldots,R_{ij}$ *des phénomènes qui constituent ce mouvement.*

On profite de cette hypothèse dans le § 2.4.

De plus, nous ferons une hypothèse analytique correspondant à l'inégalité (1) de la note I (voir § 2.4, (101)).

Ainsi nous avons défini $6n^2$ fonctions de n variables réelles non négatives. L'ensemble des arguments dépend des mesures $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$; il ne doit pas *a priori* contenir tous les systèmes de n nombres non négatifs. Mais dans le cas le plus important, lorsque nous supposerons l'identité des mesures (voir § 2.5), la variable x admettra toutes les valeurs $\{\underbrace{x,x,\ldots,x}_{n}\}$ où $x\geqslant 0$.

2.2. Quelques lemmes algébriques. Nous aurons besoin du

LEMME 1. *Si les nombres* $s_{11},\ldots,s_{1n},\ldots,s_{n1},\ldots,s_{nn}$ *sont tels que*

$$\sum_{j=1}^{n}|s_{ij}|<1 \quad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots,n,$$

alors

$$w=\begin{vmatrix} s_{11}-1 & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22}-1 & \ldots & s_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{nn}-1 \end{vmatrix} \tag{54}$$

est différent de zéro.

Ce lemme est connu (Mostowski i Stark [2], p. 108).

LEMME 2. *Si les fonctions* f_{kl} $(k,l=1,2,\ldots,n)$ *de* n^2 *variables* $s_{11},\ldots,s_{1n},\ldots,s_{n1},\ldots,s_{nn}$ *sont définies par la formule*

$$f_{kl}(s_{11},\ldots,s_{1n},\ldots,s_{n1},\ldots,s_{nn}) = s_{kl}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_m=1}^{n}s_{kj_1}s_{j_1j_2}\cdots s_{j_{m-1}j_m}s_{j_ml} \tag{55}$$

pour les valeurs des variables pour lesquelles les séries (55) *convergent pour tout* $k,l=1,2,\ldots,n$ *et pour lesquelles le déterminant* (54) *est différent de zéro, alors*

$$f_{kl}=-\left(\frac{w_{kl}}{w}+\delta_{kl}\right) \qquad (k,l=1,2,\ldots,n), \tag{56}$$

où w *est le déterminant* (54), w_{kl} — *le complément algébrique de l'élément de la* k*-ième colonne et de la* l*-ième ligne du déterminant* w[2]), *et* δ_{kl} *le symbole de Kronecker.*

Démonstration. D'après l'hypothèse de convergence des séries (55) nous pouvons mettre le membre droit de (55) sous la forme

$$f_{kl}=s_{kl}+\sum_{i=1}^{n}s_{ki}f_{il}. \tag{57}$$

Nous obtenons donc n systèmes d'équations linéaires pour définir les fonctions $f_{1l},f_{2l},\ldots,f_{nl}$ $(l=1,2,\ldots,n)$. Vérifions si les formules (56) donnent une solution de ces systèmes, qui est unique puisque $w\neq 0$.

Un théorème connu sur les compléments algébriques (Mostowski i Stark [2], p. 98, théorème 8), appliqué au déterminant (54), donne la formule

[2]) On désigne généralement ce complément algébrique par le symbole w_{lk}.

(58) $$\sum_{i=1}^{n}(s_{ki}-\delta_{ki})w_{il}=\delta_{kl}w.$$

Nous substituons (56) dans (57); vu (58), on a

$$f_{kl}-s_{kl}-\sum_{i=1}^{n}s_{ki}f_{il}=-\frac{w_{kl}}{w}-\delta_{kl}-s_{kl}+\sum_{i=1}^{n}s_{ki}\left(\frac{w_{il}}{w}+\delta_{il}\right)$$

$$=\frac{1}{w}\left(\sum_{i=1}^{n}(s_{ki}-\delta_{ki})w_{il}-\delta_{kl}w\right)=0, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Nous remarquerons encore qu'il existe des valeurs non nulles des variables pour lesquelles (55) converge. En effet, si $|s_{ij}|<s$, la série (55) peut être majorée par la série géométrique

$$s+\sum_{m=1}^{\infty}n^m s^{m+1}=s\sum_{m=0}^{\infty}(ns)^m.$$

Il résulte donc du lemme 1 que pour $|s_{ij}|<1/n$ la série (55) converge et sa somme est donnée par (56), tandis que si $s_{ij}=1/n$ pour $i,j=1,2,\ldots,n$, la série (55) diverge.

LEMME 3. *Le déterminant*

(59) $$V=\begin{vmatrix} t & u & u & \ldots & u \\ u & t & u & \ldots & u \\ u & u & t & \ldots & u \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u & u & u & \ldots & t \end{vmatrix}$$

d'ordre $n\geqslant 2$ a la valeur

(60) $$V=[t+(n-1)u](t-u)^{n-1}.$$

Le complément algébrique d'un élément de la diagonale principale (égal à t) est

(61) $$V_t=[t+(n-2)u](t-u)^{n-2},$$

le complément algébrique d'un élément qui n'est pas sur la diagonale principale (égal à u) est

(62) $$V_u=-u(t-u)^{n-2}.$$

Démonstration. La formule (60) est connue (cf. par exemple [1], problème 192, p. 28 et 172). Il en vient immédiatement (61), car V_t est un déterminant du même type que V. On voit aisément que les compléments algébriques des éléments u sont égaux. En développant le déterminant (59) par rapport aux éléments de la première ligne nous obtenons $V=tV_t+(n-1)uV_u$, d'où

$$(n-1)uV_u=[t^2+(n-2)tu-(n-1)u^2-t^2-(n-2)tu](t-u)^{n-2}$$
$$=-(n-1)u^2(t-u)^{n-2},$$

donc (62) est aussi vérifié.

Nous allons encore déduire quelques égalités qui seront utiles dans le § 2.6. D'après (60)-(62) il vient pour $t\neq u$, $t+(n-1)u\neq 0$,

$$\frac{V_t}{V}=\frac{t+(n-2)u}{[t+(n-1)u](t-u)}, \qquad \frac{V_u}{V}=-\frac{u}{[t+(n-1)u](t-u)};$$

les égalités suivantes en résultent:

(63) $$\frac{V_t}{V}-\frac{V_u}{V}=\frac{1}{t-u},$$

(64) $$\frac{V_t}{V}+(n-1)\frac{V_u}{V}=\frac{1}{t+(n-1)u}.$$

2.3. Etude du système (3)-(5), (7)-(9). Dans la suite nous aurons besoin d'une solution du système d'équations (3)-(5), (7)-(9) de la note I (en laissant de côté les équations $p(x)+q(x)+r(x)=1, P(x)+Q(x)+R(x)=1$) avec les hypothèses suivantes concernant les fonctions inconnues:

1° elles satisfont aux relations

(65) $$-1\leqslant p(x),q(x),r(x),P(x),Q(x),R(x)\leqslant 1 \quad \text{pour} \quad x\geqslant 0$$

(au lieu de (13)),

$$1-q(y)Q(x)\neq 0 \quad \text{pour} \quad x\geqslant 0, y\geqslant 0$$

(au lieu de (1)),

(66) $$p(0)=P(0)=1$$

(la dernière implique que nous nous bornons au cas I (voir § 1.2));

2° les fonctions p,q,r,P,Q,R possèdent dans chaque voisinage de droite de zéro un point de dérivabilité commun.

L'hypothèse 2° implique la dérivabilité de ces fonctions pour tout x positif et l'existence des dérivées à droite au point zéro (voir § 1.3). Il a fallu faire cette hypothèse, puisque les fonctions p,q,r,P,Q,R ne sont plus monotones *a priori*.

Nous maintiendrons les notations (14) et (16) de la note I. De plus, comme les formules (31) ne sont pas nécessairement satisfaites, nous introduisons de nouveaux paramètres:

(67) $$\mu=r'(0), \qquad M=R'(0).$$

La démonstration donnée dans § 1.3 pour le système (2)-(9) implique que les formules des fonctions p, q, P, Q qui y figurent restent vraies avec les restrictions suivantes:

1° Les fonctions q et Q n'ont pas besoin d'être non décroissantes, donc on n'a pas, en général, $\lambda = q'(0) \geqslant 0$, $\Lambda = Q'(0) \geqslant 0$. Ainsi le cas I.1 correspond à $\lambda \neq 0$, $\Lambda \neq 0$, le cas I.2 à $\lambda \neq 0$, $\Lambda = 0$ et le cas I.2* à $\lambda = 0$, $\Lambda \neq 0$. Mais il résulte de (65) et (66) que l'on a — comme auparavant — $\varkappa \leqslant 0$, $K \leqslant 0$.

2° Dans le cas I.1, pour trouver la solution de l'équation différentielle (29) on ne peut plus prouver l'inégalité $\sigma^2 - \lambda\Lambda \geqslant 0$ de la même manière que dans la note I. Elle est pourtant satisfaite, car l'inégalité $\sigma^2 - \lambda\Lambda < 0$ impliquerait que la solution de l'équation (29) n'est pas bornée.

3° Dans le cas I.1.2, lorsque $a = 0$, l'équation (29) entraîne

$$q'(x) = \Lambda\left(q(x) - \sqrt{\lambda/\Lambda}\right)^2$$

(car $\varkappa + K \leqslant 0$), d'où

$$q(x) = \frac{\lambda x}{1 + \sqrt{\lambda\Lambda}\, x}, \qquad Q(x) = \frac{\Lambda x}{1 + \sqrt{\lambda\Lambda}\, x}.$$

L'inégalité (65) implique que $|\lambda|/\sqrt{\lambda\Lambda} \leqslant 1$, $|\Lambda|/\sqrt{\lambda\Lambda} \leqslant 1$, donc $\lambda = \Lambda$ et

$$q(x) = Q(x) = \frac{\lambda x}{1 + |\lambda| x}. \tag{68}$$

De l'équation (33) il vient

$$p(x) = \frac{e^{\delta x}}{1 + |\lambda| x}, \qquad P(x) = \frac{e^{-\delta x}}{1 + |\lambda| x}. \tag{69}$$

Les fonctions (69) ne sont bornées toutes les deux que si $\delta = 0$, donc

$$p(x) = P(x) = \frac{1}{1 + |\lambda| x}. \tag{70}$$

Les paramètres $\varkappa, K, \lambda, \Lambda$ satisfont dans le cas I.1.2 aux relations suivantes: $-\varkappa = -K = |\lambda| = |\Lambda|$ et $\lambda\Lambda > 0$.

En tenant compte de 1°-3° nous allons trouver pour le cas I les fonctions r et R. Nous obtiendrons les résultats suivants:

A. *Si* $\varkappa K - \lambda\Lambda \neq 0$, *les fonctions* r *et* R *ont la forme*

$$r(x) = \frac{(K\mu - \lambda M)[p(x) - 1] + (\varkappa M - \Lambda\mu)\, q(x)}{\varkappa K - \lambda\Lambda}, \tag{71}$$

$$R(x) = \frac{(\varkappa M - \Lambda\mu)[P(x) - 1] + (K\mu - \lambda M)\, Q(x)}{\varkappa K - \lambda\Lambda}, \tag{72}$$

où μ *et* M *sont des paramètres introduits par la formule* (67), *de sorte que les inégalités* (65) *soient satisfaites.*

B. *Si* $\varkappa K - \lambda\Lambda = 0$, *on a*

$$\lambda M - K\mu = 0, \qquad \Lambda\mu - \varkappa M = 0, \tag{73}$$

et les fonctions r *et* R *ont les formes données dans la table suivante:*

formule	cas	hypothèse	$r(x)$	$R(x)$
(74)	I. 1.1 $\lambda \neq 0$, $\Lambda \neq 0$, $a \neq 0$	$a = \delta$	$\dfrac{\mu(e^{(\varkappa-K)x} - 1)}{-Ke^{(\varkappa-K)x} + \varkappa}$	$\dfrac{(\varkappa - K)Mx}{-Ke^{(\varkappa-K)x} + \varkappa}$
(75)		$a = -\delta$	$\dfrac{(K - \varkappa)\mu x}{-\varkappa e^{(K-\varkappa)x} + K}$	$\dfrac{M(e^{(K-\varkappa)x} - 1)}{-\varkappa e^{(K-\varkappa)x} + K}$
(76)	I. 1.2 $\lambda \neq 0$, $\Lambda \neq 0$, $a = 0$		$\dfrac{\mu x}{1 + \lvert\lambda\rvert x}$	$-\operatorname{sign}\lambda \dfrac{\mu x}{1 + \lvert\lambda\rvert x}$
(77)	I.2 $\lambda \neq 0$, $\Lambda = 0$	$\varkappa = 0$	$\dfrac{\mu}{K}(e^{Kx} - 1)$	$\dfrac{M}{K}(e^{Kx} - 1)$
(78)		$K = 0$	$\dfrac{\mu}{\varkappa}(e^{\varkappa x} - 1)$	0
	I.2* $\lambda = 0$, $\Lambda \neq 0$	*les formules s'obtiennent de* (77), (78) *en remplaçant les lettres* $r, \varkappa, \lambda, \mu$ *par* R, K, Λ, M, *et inversement*		
(79)	I.3 $\lambda = \Lambda = 0$	$\varkappa = 0$, $K \neq 0$	0	$\dfrac{M}{K}(e^{Kx} - 1)$
(80)		$\varkappa \neq 0$, $K = 0$	$\dfrac{\mu}{\varkappa}(e^{\varkappa x} - 1)$	0
(81)		$\varkappa = K = 0$	0	0

Démonstration des résultats A et B. Dans le cas I, en dérivant les équations (3)-(5) par rapport à x et en posant $x = 0$, nous obtenons les formules

$$(82)\qquad p'(x) = [\varkappa + \Lambda q(x)]\,p(x) \qquad \text{(formule (27))},$$

$$(83)\qquad q'(x) = [\varkappa + \Lambda q(x)]\,q(x) + \lambda + Kq(x) \qquad \text{(formule (29))},$$

$$(84)\qquad r'(x) = [\varkappa + \Lambda q(x)]\,r(x) + \mu + Mq(x),$$

et des formules analogues pour $P'(x)$, $Q'(x)$, $R'(x)$.

A. Nous remarquons d'abord l'identité suivante:

$$(K\mu - \lambda M)[\varkappa + \Lambda q(x)] + (\varkappa M - \Lambda\mu)[\lambda + Kq(x)] - (\varkappa K - \lambda\Lambda)[\mu + Mq(x)] \equiv 0.$$

Ainsi, si nous posons

$$(85)\qquad \tau(x) = (K\mu - \lambda M)[p(x) - 1] + (\varkappa M - \Lambda\mu)\,q(x) - (\varkappa K - \lambda\Lambda)\,r(x),$$

alors, d'après (82)-(84),

$$\tau'(x) = [\varkappa + \Lambda q(x)]\,\tau(x) = \frac{p'(x)}{p(x)}\,\tau(x),$$

donc $\tau(x) = a\,p(x)$. On a $a = 0$ et $\tau(x) \equiv 0$, puisque $p(0) = 1$ et $\tau(0) = 0$ (car $q(0) = r(0) = 0$). Ainsi, sous l'hypothèse $\varkappa K - \lambda\Lambda \neq 0$, de (85) il résulte (71) et, en remplaçant les lettres $p, q, r, \varkappa, \lambda, \mu$ par P, Q, R, K, Λ, M et inversement — la formule (72).

B. Supposons maintenant que

$$(86)\qquad \varkappa K - \lambda\Lambda = 0.$$

Or $\alpha^2 - \delta^2 = \sigma^2 - \lambda\Lambda - \delta^2 = \varkappa K - \lambda\Lambda$, donc l'hypothèse (86) peut être remplacée par

$$(87)\qquad \alpha^2 - \delta^2 = 0.$$

Les formules (84) et (82) impliquent que

$$r'(x) = \mu + Mq(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}\,r(x),$$

donc

$$\frac{p(x)r'(x) - p'(x)r(x)}{p^2(x)} = \frac{\mu + Mq(x)}{p(x)}.$$

D'après $r(0) = 0$ il vient

$$r(x) = p(x)\int_0^x \frac{\mu + Mq(t)}{p(t)}\,dt.$$

D'une manière analogue

$$(88)\qquad R(x) = P(x)\int_0^x \frac{M + \mu Q(t)}{P(t)}\,dt.$$

I. 1.1 [3]). La formule (87) est satisfaite quand $\alpha = \delta$ ou $\alpha = -\delta$. Dans le cas I.1.1 nous avons $\alpha > 0$, donc si $\alpha = \delta$, alors $\varkappa - K > 0$. Si $\alpha = \delta$, les formules (44) impliquent que

$$p(x) = \frac{(\varkappa - K)\,e^{(\varkappa - K)x}}{-Ke^{(\varkappa - K)x} + \varkappa}, \qquad P(x) = \frac{\varkappa - K}{-Ke^{(\varkappa - K)x} + \varkappa},$$

$$q(x) = \frac{\lambda\,(e^{(\varkappa - K)x} - 1)}{-Ke^{(\varkappa - K)x} + \varkappa}, \qquad Q(x) = \frac{\Lambda\,(e^{(\varkappa - K)x} - 1)}{-Ke^{(\varkappa - K)x} + \varkappa},$$

donc

$$\frac{\mu + Mq(t)}{p(t)} = \frac{\mu(\varkappa - Ke^{(\varkappa - K)t}) + \lambda M\,(e^{(\varkappa - K)t} - 1)}{(\varkappa - K)e^{(\varkappa - K)t}} = \frac{\lambda M - K\mu + (\varkappa\mu - \lambda M)\,e^{-(\varkappa - K)t}}{\varkappa - K}$$

et

$$(89)\qquad \int_0^x \frac{\mu + Mq(t)}{p(t)}\,dt = \frac{\lambda M - K\mu}{\varkappa - K}\,x + \frac{\varkappa\mu - \lambda M}{(\varkappa - K)^2}\,(1 - e^{(K - \varkappa)x}).$$

D'après (45) nous avons, pour $\alpha = \delta$,

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \frac{K - \varkappa}{K} \neq 0,$$

donc pour que la fonction $r(x)$ soit bornée il est nécessaire et suffisant que dans (89) le terme qui contient x avec l'exposant 1 s'annulle, c'est-à-dire que la première des égalités (73) soit satisfaite. En multipliant cette égalité par $\varkappa$ nous obtenons $\varkappa\lambda M - \varkappa K\mu = 0$; alors, comme $\lambda \neq 0$, il résulte de (86) que $\varkappa M - \Lambda\mu = 0$, c'est-à-dire que la seconde des égalités (73) est satisfaite.

De (73) il résulte que $\varkappa\mu - \lambda M = (\varkappa - K)\mu$, donc (89) implique la formule

$$\int_0^x \frac{\mu + Mq(t)}{p(t)}\,dt = \frac{\mu}{\varkappa - K}\,(1 - e^{(K - \varkappa)x})$$

et la première des formules (74).

La seconde des égalités (73) étant vraie, comme nous l'avons démontré, on a

$$\frac{M + \mu Q(t)}{P(t)} = \frac{M(\varkappa - Ke^{(\varkappa - K)t}) + \Lambda\mu\,(e^{(\varkappa - K)t} - 1)}{(\varkappa - K)\,e^{(\varkappa - K)t}} = M,$$

d'où résulte la seconde des formules (74).

---

[3]) La numération des cas est celle de la table.

Si $\alpha=-\delta$, les égalités (73) sont aussi satisfaites et nous obtenons d'une manière analogue les formules (75) (remarquons que la substitution de $-\delta$ à $\delta=(\varkappa-K)/2$ correspond à la substitution de K à $\varkappa$ et inversement).

I.1.2. Dans ce cas les formules (68), (70) sont satisfaites, d'où

$$\frac{\mu+Mq(t)}{p(t)}=\mu(1+|\lambda|t)+\lambda Mt=\mu+(|\lambda|\mu+\lambda M)t$$

et

$$r(x)=\frac{1}{1+|\lambda|x}\int_0^x[\mu+(|\lambda|\mu+\lambda M)t]\,dt=\frac{\mu x+(|\lambda|\mu+\lambda M)x^2/2}{1+|\lambda|x}.$$

La fonction $r(x)$ étant bornée, il vient $|\lambda|\mu+\lambda M=0$ (comme $|\lambda|=-K$, cela équivaut à l'égalité (73)) et $M=-\mu\operatorname{sign}\lambda$.

I.2. Dans ce cas $\Lambda=0$, ainsi il résulte de (86) que $\varkappa=0$ ou $K=0$ (dans le cas I.2 on ne peut avoir $\varkappa=K=0$). Si $\varkappa=0$, alors des solutions I.2 de la note I il résulte que

$$\text{(90)}\qquad \begin{aligned} &p(x)\equiv 1, && P(x)=e^{Kx},\\ &q(x)=\frac{\lambda}{K}(e^{Kx}-1), && Q(x)\equiv 0.\end{aligned}$$

Par contre, si $K=0$, alors

$$\text{(91)}\qquad \begin{aligned} &p(x)=e^{\varkappa x}, && P(x)\equiv 1,\\ &q(x)=\frac{\lambda}{\varkappa}(e^{\varkappa x}-1), && Q(x)\equiv 0.\end{aligned}$$

Dans le cas $\varkappa=0$ (formule (90)) nous avons

$$r(x)=\frac{1}{K}\int_0^x(K\mu-\lambda M+\lambda Me^{Kt})\,dt=\frac{K\mu-\lambda M}{K}x+\frac{\lambda M}{K^2}(e^{Kx}-1);$$

$r(x)$ étant bornée, il en résulte que $K\mu-\lambda M=0$. Ainsi la première des formules (73) est satisfaite et, comme $\varkappa=\lambda=0$, la seconde l'est aussi. De là on obtient la première des formules (77). Or, nous avons

$$R(x)=e^{Kx}\int_0^x Me^{-Kt}\,dt=\frac{M}{K}(e^{Kx}-1),$$

et ainsi la seconde des formules (77) est vraie.

Dans le cas $K=0$ il vient d'après (91)

$$\text{(92)}\qquad r(x)=e^{\varkappa x}\int_0^x\frac{\mu+M\dfrac{\lambda}{\varkappa}(e^{\varkappa t}-1)}{e^{\varkappa t}}\,dt=\frac{e^{\varkappa x}}{\varkappa}\Big(\lambda Mx+\frac{\varkappa\mu-\lambda M}{\varkappa}(1-e^{-\varkappa x})\Big).$$

De la formule (88) il résulte que $R(x)=Mx$, donc $M=0$, $R(x)\equiv 0$, et (92) prend la forme de la première des formules (78).

I.2. Ce cas est symétrique au précédent et la démonstration est analogue.

I.3. Dans ce cas il vient en vertu de l'égalité (86) que $\varkappa=0$ ou $K=0$ (l'égalité $\varkappa=K=0$ est possible). Les formules (I.3) de la note I impliquent que si $\varkappa=0$, $K\neq 0$, alors $r(x)=\mu x$, $\mu=0$ et

$$R(x)=e^{Kx}\int_0^x Me^{-Kt}\,dt=\frac{M}{K}(e^{Kx}-1),$$

d'où résultent les formules (79). De la même manière nous obtenons les formules (80). Finalement, pour $\varkappa=K=0$, nous avons $\mu=M=0$ et les formules (81).

Dans le cas I.3 les égalités (73) sont satisfaites.

2.4. Les équations fonctionnelles. Nous allons étudier ici les fonctions introduites dans le § 2.1. Remarquons d'abord que ces fonctions satisfont pour $i=1,2,\ldots,n$ aux égalités

$$\text{(93)}\qquad \sum_{j=1}^n\big(p_{ij}(x)+q_{ij}(x)+r_{ij}(x)\big)=1,$$

$$\text{(94)}\qquad \sum_{j=1}^n\big(P_{ij}(x)+Q_{ij}(x)+R_{ij}(x)\big)=1,$$

qui résultent de leur sens probabilistique.

Nous allons exprimer les valeurs des fonctions $p_{ij},q_{ij},r_{ij},P_{ij},Q_{ij},R_{ij}$ pour l'argument $x+y$ par les valeurs de ces fonctions pour les arguments x et y. Nous avons ici

$$x=\{\mu_1(I_1),\mu_2(I_2),\ldots,\mu_n(I_n)\},\qquad y=\{\mu_1(J_1),\mu_2(J_2),\ldots,\mu_n(J_n)\}$$

et $x+y=\{\mu_1(I_1\cup J_1),\mu_2(I_2\cup J_2),\ldots,\mu_n(I_n\cup J_n)\}$, $I_i\subset\Pi_i$, $J_i\subset\Pi_i$ et les segments I_i et J_i sont contigus — I_i à gauche de J_i. Les segments $I_1,I_2,\ldots,I_n$ sont des projections orthogonales l'un de l'autre, de même les segments $J_1,J_2,\ldots,J_n$.

En d'autres termes, le mouvement de la molécule relativement au système $I \cup J = \{I_1 \cup J_1, I_2 \cup J_2, \ldots, I_n \cup J_n\}$ sera étudié par rapport aux systèmes $I = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ et $J = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$.

$p_{ij}(x+y)$ est la probabilité de la sortie de la molécule du côté droit du segment $I_j \cup J_j$, sous l'hypothèse qu'elle est entrée dans le segment $I_i \cup J_i$ du côté gauche. Ce phénomène peut être réalisé d'une infinité de manières différentes, car la molécule peut sans sortir du système $I \cup J$ changer plusieurs fois de droite sur laquelle elle se meut et changer de direction de sa marche: celle de droite pour celle de gauche dans le système J (avec la probabilité $q_{kl}(y)$) et celle de gauche pour celle de droite dans le système I (avec la probabilité $Q_{kl}(x)$). Le nombre de changements de direction doit être pair, la première de droite à gauche, la dernière de gauche à droite. Comme la molécule doit passer par les systèmes I et J, l'expression pour $p_{ij}(x+y)$ doit contenir les probabilités $p_{ik}(x)$ et $p_{lj}(y)$ (où $1 \leqslant k, l \leqslant n$). De plus, le phénomène dont nous calculons la probabilité peut être réalisé par le passage de la molécule sans changement de direction (réflexion) de la droite Π_i à la droite Π_k dans le système I et de Π_k à Π_j dans le système J. Il résulte de ces remarques que

$$(95) \quad p_{ij}(x+y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ik}(x)\Big(\delta_{kl} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_m \\ j_1,\ldots,j_{m-1}}} q_{ki_1}(y)Q_{i_1j_1}(x)\ldots q_{j_{m-1}i_m}(y)Q_{i_ml}(x)\Big)p_{lj}(y),$$

où les indices $i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_{m-1}$ parcourent les valeurs $1, 2, \ldots, n$ — en particulier le terme δ_{kl} est expliqué par la dernière remarque.

En effectuant dans (95) la sommation en $i_1, i_2, \ldots, i_m$ de 1 à n nous obtenons

$$p_{ij}(x+y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ik}(x)\Big(\delta_{kl} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_{m-1}} s_{kj_1}s_{j_1j_2}\ldots s_{j_{m-1}l}\Big)p_{lj}(y),$$

où

$$(96) \quad s_{jl} = \sum_{k=1}^{n} q_{jk}(y)Q_{kl}(x) \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, n),$$

et encore

$$p_{ij}(x+y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ik}(x)(\delta_{kl} + f_{kl})p_{lj}(y),$$

où les fonctions f_{kl} sont définies par la formule (55) pour les quantités $s_{11}, \ldots, s_{1n}, \ldots, s_{n1}, \ldots, s_{nn}$ données par la formule (96). Du lemme 2 (§ 2.2) il résulte que

$$p_{ij}(x+y) = -\frac{1}{w}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ik}(x)w_{kl}p_{lj}(y).$$

Les expressions w et w_{kl} définies aussi dans le § 2.2 et dépendantes de $s_{11}, \ldots, s_{1n}, \ldots, s_{n1}, \ldots, s_{nn}$ sont, d'après (96), des fonctions de x et y, ce que nous allons faire ressortir dans les formules. Ainsi finalement

$$(97) \quad p_{ij}(x+y) = -\frac{1}{w(x,y)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ik}(x)w_{kl}(x,y)p_{lj}(y).$$

$q_{ij}(x+y)$ est la probabilité de la sortie de la molécule du segment $I_j \cup J_j$ du côté gauche, sous l'hypothèse qu'elle est entrée dans le segment $I_i \cup J_i$ du côté gauche. Pour que ce phénomène advienne, le nombre des changements de direction de la marche de la molécule dans le système $I \cup J$ doit être impair, en particulier le premier et le dernier changement de direction de droite à gauche dans le système J (fonctions $q_{kl}(y)$). Remarquons encore qu'après l'entrée dans le système $I \cup J$ elle peut changer de direction dans le système I, d'où l'on obtient le premier terme dans le membre droit de l'égalité

$$(98) \quad q_{ij}(x+y) = q_{ij}(x) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} p_{ik}(x)\Big(\delta_{kl} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_\nu \\ j_1,\ldots,j_{\nu-1}}} q_{ki_1}(y)Q_{i_1j_1}(x)\ldots q_{j_{\nu-1}i_\nu}(y)Q_{i_\nu l}(x)\Big) \times q_{lm}(y)P_{mj}(x).$$

Nous transformons la formule (98) de la même manière que (95), en obtenant

$$(99) \quad q_{ij}(x+y) = q_{ij}(x) - \frac{1}{w(x,y)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} p_{ik}(x)w_{kl}(x,y)q_{lm}(y)P_{mj}(x).$$

$r_{ij}(x+y)$ est la probabilité pour que la molécule soit arrêtée dans le segment $I_j \cup J_j$, sous l'hypothèse qu'elle est entrée dans le segment $I_i \cup J_i$ du côté gauche. Ce phénomène arrivera si la molécule est arrêtée dans le segment J_j, ou bien si elle l'est dans le segment I_j. Nous obtenons la probabilité de la première alternative de la formule (97) en remplaçant le dernier terme $p_{lj}(y)$, c'est-à-dire la probabilité de la sortie de la molécule du côté droit du segment I_j par $r_{lj}(y)$, c'est-à-dire par la probabilité qu'elle soit arrêtée dans ce segment. De la même manière nous obtenons la probabilité de la seconde alternative de la formule (99) en remplaçant le dernier terme $P_{mj}(x)$ par $R_{mj}(x)$ et le premier terme $q_{ij}(x)$ par $r_{ij}(x)$. De là

$$(100) \quad r_{ij}(x+y) = r_{ij}(x) - \frac{1}{w(x,y)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ik}(x)w_{kl}(x,y)\Big(r_{lj}(y) + \sum_{m=1}^{n} q_{lm}(y)R_{mj}(x)\Big).$$

Dans les démonstrations des formules (97), (99) et (100) qui contiennent la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_{m-1}} s_{kj_1} s_{j_1j_2} \ldots s_{j_{m-1}l}$$

la convergence de cette série résulte du sens probabilistique des fonctions, en particulier de ce qu'elles sont non négatives. De plus, afin que les formules (97), (99) et (100) aient un sens numérique, nous devons faire l'hypothèse que

$$w(x,y) \neq 0 \tag{101}$$

(c'est l'hypothèse analytique annoncée dans le § 2.1, que nous supposons remplie dans tout ce travail). D'après le § 2.2 nous savons que cela a lieu si les inégalités suivantes sont satisfaites:

$$\sum_{j=1}^{n} |s_{ij}| < 1 \quad \text{pour} \quad i = 1,2,\ldots,n;$$

d'après (96) celles-ci sont satisfaites, entre autres, lorsque l'on a, pour tous les x possibles,

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij}(x) < 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} Q_{ij}(x) < 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,n).$$

La comparaison de ces dernières inégalités avec les formules (93) et (94) montre que ces inégalités n'altèrent pas sensiblement la généralité des raisonnements.

Les formules pour $P_{ij}(x+y)$, $Q_{ij}(x+y)$, $R_{ij}(x+y)$ peuvent être déduites d'une manière analogue; on y arrive en remplaçant dans les formules (97), (99) et (100) les lettres p, q, r, w par P, Q, R, W et inversement, où

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} S_{11}-1 & S_{12} & \ldots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22}-1 & \ldots & S_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n1} & S_{n2} & \ldots & S_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

et

$$S_{jl} = \sum_{k=1}^{n} Q_{jk}(y) q_{kl}(x) \qquad (j,l = 1,2,\ldots,n).$$

Ainsi

$$P_{ij}(x+y) = -\frac{1}{W(x,y)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} P_{ik}(x) W_{kl}(x,y) P_{lj}(y), \tag{102}$$

$$Q_{ij}(x+y) = Q_{ij}(x) - \frac{1}{W(x,y)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} P_{ik}(x) W_{kl}(x,y) Q_{lm}(y) p_{mj}(x), \tag{103}$$

$$\begin{aligned} R_{ij}(x+y) &\\ &= R_{ij}(x) - \frac{1}{W(x,y)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} P_{ik}(x) W_{kl}(x,y) \Big(R_{lj}(y) + \sum_{m=1}^{n} Q_{lm}(y) r_{mj}(x)\Big). \end{aligned} \tag{104}$$

2.5. Les dérivées des fonctions. Dans ce paragraphe et le paragraphe suivant nous supposons l'identité des mesures $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, en ce sens que si les segments $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sont des projections orthogonales l'un de l'autre, alors $\mu_1(I_1) = \mu_2(I_2) = \ldots = \mu_n(I_n) = x$. L'argument des probabilités sera donc maintenant le nombre x au lieu du système de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dans le § 2.1 nous avons fait l'hypothèse que les mesures $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sont des fonctions continues de l'intervalle, qu'elles sont finies sur les intervalles et infinies sur les demi-droites. Dans le cas considéré ils existent donc pour chaque $x \geqslant 0$ et chaque $y \geqslant 0$ des segments I et J (qui peuvent se réduire à des points), possédant seulement une extrémité commune et tels que $\mu_1(I) = x$, $\mu_1(J) = y$. Les probabilités étudiées sont donc définies sur toute la demi-droite $\langle 0, +\infty)$.

Nous supposons encore l'existence des dérivées à droite des fonctions $p_{ij}, q_{ij}, r_{ij}, P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ au point 0 et l'existence d'un point commun de dérivabilité de ces fonctions dans chaque voisinage de droite de 0. Il résulte de la forme des équations (97), (99), (102)-(104) que sous ces hypothèses toutes les fonctions considérées sont dérivables sur la demi-droite $(0, +\infty)$, donc il en résulte aussi l'existence des dérivées partielles en x et en y des déterminants $w(x,y)$ et $w_{kl}(x,y)$.

En tenant compte du sens probabiliste des fonctions $p_{ij}, q_{ij}, \ldots, R_{ij}$ nous supposerons encore que les égalités suivantes sont satisfaites pour $i,j = 1,2,\ldots,n$:

$$p_{ij}(0) = P_{ij}(0) = \delta_{ij}, \qquad q_{ij}(0) = r_{ij}(0) = Q_{ij}(0) = R_{ij}(0) = 0. \tag{105}$$

Elles signifient que si la molécule ne rencontre pas de substance sur son chemin, elle ne change pas de direction de sa marche et ne quitte pas la droite sur laquelle elle se meut. Nous admettrons les notations suivantes pour les dérivées à droite:

$$\begin{aligned} \varkappa_{ij} &= p'_{ij}(0), & \lambda_{ij} &= q'_{ij}(0), & \mu_{ij} &= r'_{ij}(0), \\ K_{ij} &= P'_{ij}(0), & \Lambda_{ij} &= Q'_{ij}(0), & M_{ij} &= R'_{ij}(0). \end{aligned} \tag{106}$$

Il nous faut à présent quelques formules auxiliaires. Des formules (96) et (105) il résulte que pour $x,y \geqslant 0$

$$s_{ij}(x,0) = s_{ij}(0,y) = 0. \tag{107}$$

De là et de la formule (54) nous avons

$$w(x,0) = w(0,y) = (-1)^n, \qquad w_{kl}(x,0) = w_{kl}(0,y) = \delta_{kl}(-1)^{n-1} \tag{108}$$

(pour $k \neq l$ les déterminants $w_{kl}(x,0)$, $w_{kl}(0,y)$ ont une ligne ne contenant que des zéros). En changeant les indices et en ajoutant les arguments x et y, l'identité (58) s'écrit sous la forme

$$\sum_{l=1}^{n} w_{kl}(x,y)(s_{lj} - \delta_{lj}) = \delta_{kj} w(x,y). \tag{109}$$

Nous la dérivons par rapport à y et nous posons $y=0$, en profitant des formules (107) et (108):

$$\sum_{l=1}^{n} \delta_{kl}(-1)^{n-1}\left(\frac{\partial s_{lj}}{\partial y}\right)_{y=0} - \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial w_{kl}}{\partial y}\right)_{y=0}\delta_{lj} = \delta_{kj}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

D'où

$$(-1)^{n-1}\left(\frac{\partial s_{kj}}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial w_{kj}}{\partial y}\right)_{y=0} + \delta_{kj}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0},$$

et comme, d'après (96) et (106), il vient

$$\left(\frac{\partial s_{kj}}{\partial y}\right)_{y=0} = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{kl} Q_{lj}(x),$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial y}(w_{kj} + \delta_{kj} w)_{y=0} = (-1)^{n-1}\sum_{l=1}^{n} \lambda_{kl} Q_{lj}(x). \tag{110}$$

En dérivant l'identité (109) par rapport à x et en posant $x=0$, nous obtenons (après avoir changé les indices) une formule analogue à (110):

$$\frac{\partial}{\partial x}(w_{ik} + \delta_{ik} w)_{x=0} = (-1)^{n-1}\sum_{l=1}^{n} q_{il}(y) \Lambda_{lk}. \tag{111}$$

En utilisant les hypothèses de ce paragraphe nous allons calculer les dérivées des fonctions $p_{ij}, q_{ij}, r_{ij}, P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}$, remplaçant ainsi le système d'équations fonctionnelles (97), (99), (100), (102)-(104) par un système d'équations différentielles qui pourra servir à une étude plus détaillée de ces fonctions et à trouver leur forme explicite.

En tirant partie de la symétrie des fonctions $p_{ij}(x+y), q_{ij}(x+y), \ldots, R_{ij}(x+y)$ en x et y et en profitant de l'asymétrie dans la forme de ces fonctions nous obtiendrons deux formules pour la dérivée de chaque fonction[4]).

Nous dérivons la formule (97) par rapport à y et ensuite nous posons $y=0$. Il résulte de (105) et (108) que

$$\begin{aligned}
p'_{ij}(x) = {} & \frac{1}{w^2(x,0)}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ik}(x)\,\delta_{kl}(-1)^{n-1}\delta_{lj} - \\
& - \frac{1}{w(x,0)}\Big[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ik}(x)\left(\frac{\partial w_{kl}}{\partial y}\right)_{y=0}\delta_{lj} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ik}(x)\,\delta_{kl}(-1)^{n-1}\varkappa_{lj}\Big] \\
= {} & (-1)^{n-1} p_{ij}(x)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} + (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x)\left(\frac{\partial w_{kj}}{\partial y}\right)_{y=0} + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x)\varkappa_{kj} \\
= {} & (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial y}(w_{kj} + \delta_{kj} w)_{y=0} + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x)\varkappa_{kj}
\end{aligned}$$

et, vu (110),

$$p'_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ik}(x)\lambda_{kl} Q_{lj}(x) + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x)\varkappa_{kj}.$$

Finalement nous avons

$$p'_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x)\Big(\varkappa_{kj} + \sum_{l=1}^{n}\lambda_{kl} Q_{lj}(x)\Big). \tag{112}$$

Nous ferons encore usage de la formule (97) en prenant la dérivée par rapport à x et en posant $x=0$. Il résulte des formules (105), (108) et (111) que

$$\begin{aligned}
p'_{ij}(y) = {} & \frac{1}{w^2(0,y)}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\delta_{ik}\,\delta_{kl}(-1)^{n-1} p_{lj}(y) - \\
& - \frac{1}{w(0,y)}\Big[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\varkappa_{ik}\,\delta_{kl}(-1)^{n-1} p_{lj}(y) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\delta_{ik}\left(\frac{\partial w_{kl}}{\partial x}\right)_{x=0} p_{lj}(y)\Big] \\
= {} & (-1)^{n-1} p_{ij}(y)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} + \sum_{k=1}^{n}\varkappa_{ik} p_{kj}(y) + (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial w_{kl}}{\partial x}\right)_{x=0} p_{kj}(y) \\
= {} & (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x}(w_{ik} + \delta_{ik} w)_{x=0} p_{kj}(y) + \sum_{k=1}^{n}\varkappa_{ik} p_{kj}(y) \\
= {} & \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} q_{il}(y)\Lambda_{lk} p_{kj}(y) + \sum_{k=1}^{n}\varkappa_{ik} p_{kj}(y).
\end{aligned}$$

[4]) Dans la note I nous utilisons ce fait directement en obtenant (24).

En remplaçant y par x nous obtenons une seconde formule pour la dérivée de la fonction p_{ij}:

$$(113)\qquad p'_{ij}(x)=\sum_{k=1}^{n}\Big(\varkappa_{ik}+\sum_{l=1}^{n}q_{il}(x)\Lambda_{lk}\Big)p_{kj}(x).$$

En calculant la dérivée de la fonction q_{ij} nous voyons que, d'après (99), on a, pour $y>0$,

$$\frac{q_{ij}(x+y)-q_{ij}(x)}{y}=-\frac{1}{w(x,y)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ik}(x)w_{kl}(x,y)\frac{q_{lm}(y)}{y}P_{mj}(x).$$

Or, comme $q_{lm}(0)=0$ (formule (105)), il résulte de (108) que pour $y\to 0$ nous obtenons la formule

$$q'_{ij}(x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ik}(x)\delta_{kl}\lambda_{lm}P_{mj}(x)$$

et, en changeant les indices de sommation,

$$(114)\qquad q'_{ij}(x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}p_{ik}(x)\lambda_{kl}P_{lj}(x).$$

Pour obtenir la seconde formule pour q'_{ij} nous dérivons la formule (99) par rapport à x et nous posons $x=0$, en tenant compte des formules (104), (107) et (110):

$$q'_{ij}(y)=\lambda_{ij}+\frac{1}{w^2(0,y)}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)_{x=0}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\delta_{ik}\delta_{kl}(-1)^{n-1}q_{lm}(y)\delta_{mj}-$$

$$-\frac{1}{w(0,y)}\Big[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\varkappa_{ik}\delta_{kl}(-1)^{n-1}q_{lm}(y)\delta_{mj}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\delta_{ik}\Big(\frac{\partial w_{kl}}{\partial x}\Big)_{x=0}q_{lm}(y)\delta_{mj}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\delta_{ik}\delta_{kl}(-1)^{n-1}q_{lm}(y)K_{mj}\Big]$$

$$=\lambda_{ij}+\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)_{x=0}(-1)^{n-1}q_{ij}(y)+\sum_{k=1}^{n}\varkappa_{ik}q_{kj}(y)+$$

$$+(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial w_{ik}}{\partial x}\Big)_{x=0}q_{kj}(y)+\sum_{k=1}^{n}q_{ik}(y)K_{kj}$$

$$=\lambda_{ij}+\sum_{k=1}^{n}q_{ik}(y)K_{kj}+\sum_{k=1}^{n}\varkappa_{ik}q_{kj}(y)+$$

$$+(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x}(w_{ik}+\delta_{ik}w)_{x=0}q_{kj}(y)$$

$$=\lambda_{ij}+\sum_{k=1}^{n}q_{ik}(y)K_{kj}+\sum_{k=1}^{n}\varkappa_{ik}q_{kj}(y)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}q_{il}(y)\Lambda_{lk}q_{kj}(y),$$

d'où

$$(115)\qquad q'_{ij}(x)=\lambda_{ij}+\sum_{k=1}^{n}q_{ik}(x)K_{kj}+\sum_{k=1}^{n}\Big(\varkappa_{ik}+\sum_{l=1}^{n}q_{il}(x)\Lambda_{lk}\Big)q_{kj}(x).$$

De la formule (100) il résulte pour $y>0$

$$\frac{r_{ij}(x+y)-r_{ij}(x)}{y}$$

$$=-\frac{1}{w(x,y)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}p_{ik}(x)w_{kl}(x,y)\Big(\frac{r_{lj}(y)}{y}+\sum_{m=1}^{n}\frac{q_{lm}(y)}{y}R_{mj}(x)\Big).$$

Comme $r_{lj}(0)=q_{lm}(0)=0$, on obtient pour $y>0$

$$r'_{ij}(x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}p_{ik}(x)\delta_{kl}\Big(\mu_{lj}+\sum_{m=1}^{n}\lambda_{lm}R_{mj}(x)\Big),$$

donc finalement

$$(116)\qquad r'_{ij}(x)=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}(x)\Big(\mu_{kj}+\sum_{l=1}^{n}\lambda_{kl}R_{lj}(x)\Big).$$

Représentons le terme $r_{ij}(x+y)$ dans la formule (100) comme la somme de trois termes:

$$r_{ij}(x+y)=r_{ij}(x)-\frac{1}{w(x,y)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}p_{ik}(x)w_{kl}(x,y)r_{lj}(y)-$$

$$-\frac{1}{w(x,y)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ik}(x)w_{kl}(x,y)q_{lm}(y)R_{mj}(x).$$

Nous dérivons cette formule par rapport à x et nous posons $x=0$. Le second membre diffère de $p_{ij}(x+y)$ (formule (97)) par la fonction $r_{lj}(y)$, qui y figure au lieu de $p_{lj}(y)$. Comme y n'est pas la variable de dérivation, nous obtenons en dérivant le second membre par rapport à x l'expression

$$(117)\qquad \sum_{k=1}^{n}\Big(\varkappa_{ik}+\sum_{l=1}^{n} q_{il}(y)\,\Lambda_{lk}\Big) r_{kj}(y)$$

qui diffère de $p'_{ij}(y)$ (formule (113)) d'une manière analogue par la fonction $r_{kj}(y)$ y figurant au lieu de $p_{kj}(y)$. Comme $R_{mj}(0)=0$, il ne reste en dérivant le troisième terme que l'expression contenant $R'_{mj}(0)$, égale à

$$(118)\qquad -\frac{1}{w(0,y)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\delta_{ik}\,\delta_{kl}(-1)^{n-1}q_{lm}(y)M_{mj}=\sum_{k=1}^{n}q_{ik}(y)M_{kj}.$$

En ajoutant les expressions (117) et (118) et la dérivée du premier terme égale à μ_{ij}, nous obtenons en posant y pour x

$$(119)\qquad r'_{ij}(x)=\mu_{ij}+\sum_{k=1}^{n}q_{ik}(x)M_{kj}+\sum_{k=1}^{n}\Big(\varkappa_{ik}+\sum_{l=1}^{n}q_{il}(x)\,\Lambda_{lk}\Big)r_{kj}(x).$$

Nous omettons les formules pour les dérivées des fonctions P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}; on les obtient des formules (112)-(116), (119) en remplaçant les lettres $p,q,r,\varkappa,\lambda,\mu$ par P,Q,R,K,Λ,M et inversement.

De plus, les équations (93) et (94) donnent pour $i=1,2,\ldots,n$

$$\sum_{j=1}^{n}\big(p'_{ij}(x)+q'_{ij}(x)+r'_{ij}(x)\big)=\sum_{j=1}^{n}\big(P'_{ij}(x)+Q'_{ij}(x)+R'_{ij}(x)\big)=0,$$

d'où, en vertu des notations (106), on a, en particulier,

$$(120)\qquad \sum_{j=1}^{n}(\varkappa_{ij}+\lambda_{ij}+\mu_{ij})=\sum_{j=1}^{n}(K_{ij}+\Lambda_{ij}+M_{ij})=0.$$

La formule (120) n'est pas la seule condition à laquelle doivent satisfaire les paramètres (106). D'après les formules (105) et d'après les hypothèses que les fonctions analysées sont des probabilités, il résulte que pour $i,j=1,2,\ldots,n$

$$(121)\qquad \begin{gathered}\varkappa_{ii}, K_{ii}\leqslant 0,\qquad \varkappa_{ij}, K_{ij}\geqslant 0\quad\text{pour}\quad i\neq j,\\ \lambda_{ij}, \Lambda_{ij}, \mu_{ij}, M_{ij}\geqslant 0.\end{gathered}$$

On ne sait pas si les conditions (120) et (121) sont suffisantes pour que les solutions du système composé des équations (112)-(116), (119) et des équations qu'on en tire en remplaçant les lettres $p,q,r,\varkappa,\lambda,\mu$ par P,Q,R,K,Λ,M et inversement, avec les conditions initiales (105), soient des probabilités. Plus précisement, il est facile de démontrer que les solutions de ce système satisfont aux égalités (93) et (94). C'est pourquoi le problème se ramene à vérifier que les fonctions $p_{ij}, q_{ij}, \ldots, R_{ij}$ sont non négatives.

2.6. Le cas d'équivalence des droites. Il est difficile de trouver effectivement les solutions du système d'équations fonctionnelles obtenu au § 2.4 ou bien du système d'équations différentielles obtenu au § 2.5. C'est pourquoi nous nous bornerons à un cas spécial — d'ailleurs assez naturel.

Nous supposerons donc que les probabilités étudiées ne dépendent pas des numéros des droites i et j, mais seulement de ce que $i=j$ ou $i\neq j$, c'est-à-dire de ce que la molécule reste ou non sur la droite sur laquelle elle se mouvait antérieurement. Conformément à ces hypothèses nous remplaçons les notations $p_{ij}, q_{ij}, r_{ij}, P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}$ par $p_0, q_0, r_0, P_0, Q_0, R_0$ si $i=j$, et par p,q,r,P,Q,R si $i\neq j$.

Evidemment, dans ce cas, le système d'équations fonctionnelles (97), (99), (100), (102)-(104) pourra être considérablement simplifié. Pour cela nous introduirons certaines fonctions auxiliaires et nous étudierons leurs propriétés.

Soient $a_0, b_0, c_0, d_0, a, b, c, d$ des nombres arbitraires. Nous définirons des fonctions $\varepsilon_0, \zeta_0, \eta_0, \varepsilon, \zeta, \eta$ par les formules

$$(122)\qquad \varepsilon_0(c,d)=c_0d_0+(n-1)cd,\qquad \varepsilon(c,d)=c_0d+cd_0+(n-2)cd,$$

$$(123)\qquad \zeta_0(b,c,d)=\varepsilon_0\big(b,\varepsilon(c,d)\big),\qquad \zeta(b,c,d)=\varepsilon\big(b,\varepsilon(c,d)\big),$$

$$(124)\qquad \eta_0(a,b,c,d)=\varepsilon_0\big(a,\zeta(b,c,d)\big),\qquad \eta(a,b,c,d)=\varepsilon\big(a,\zeta(b,c,d)\big),$$

où les arguments d'indice 0 sont omis dans les fonctions.

Soit, de plus,

$$(125)\qquad \hat{h}=h_0-h,\qquad \tilde{h}=h_0+(n-1)h.$$

Pour la lettre h nous allons substituer les variables a,b,c,d et les fonctions ε,ζ,η.

Les fonctions introduites satisfont aux relations suivantes: d'abord

$$(126)\qquad \hat{\varepsilon}(c,d)=\varepsilon_0(c,d)-\varepsilon(c,d)=c_0d_0+cd-c_0d-cd_0=(c_0-c)(d_0-d)=\hat{c}\hat{d},$$

d'où

$$(127)\qquad \hat{\zeta}(b,c,d)=\hat{\varepsilon}\big(b,\varepsilon(c,d)\big)=\hat{b}\hat{c}\hat{d},$$

$$(128)\qquad \hat{\eta}(a,b,c,d)=\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d},$$

puis

$$(129)\qquad \begin{aligned}\tilde{\varepsilon}(c,d)&=\varepsilon_0(c,d)+(n-1)\varepsilon(c,d)\\ &=c_0d_0+(n-1)cd+(n-1)c_0d+(n-1)cd_0+(n-1)(n-2)cd\\ &=[c_0+(n-1)c]\,[d_0+(n-1)d]=\tilde{c}\tilde{d},\end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{\zeta}(b,c,d)=\tilde{\varepsilon}\big(b,\varepsilon(c,d)\big)=\tilde{b}\,\tilde{c}\,\tilde{d}, \tag{130}$$

$$\tilde{\eta}(a,b,c,d)=\tilde{a}\,\tilde{b}\,\tilde{c}\,\tilde{d}. \tag{131}$$

Soient $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$ des nombres tels que

$$a_{ij}=\begin{cases} a_0 & \text{pour} \quad i=j,\\ a & \text{pour} \quad i\neq j,\end{cases} \quad \ldots, \quad d_{ij}=\begin{cases} d_0 & \text{pour} \quad i=j,\\ d & \text{pour} \quad i\neq j.\end{cases} \tag{132}$$

Etudions l'expression

$$\sum_{m=1}^{n} c_{lm}\,d_{mj}.$$

Sa valeur dépend seulement de ce que $l=j$ ou $l\neq j$. Les formules (132) donnent pour $l=j$

$$\sum_{m=1}^{n} c_{lm}\,d_{mj}=c_{ll}\,d_{ll}+\sum_{m\neq l} c_{lm}\,d_{ml}=c_0\,d_0+(n-1)\,cd$$

et pour $l\neq j$

$$\sum_{m=1}^{n} c_{lm}\,d_{mj}=c_{ll}\,d_{lj}+c_{lj}\,d_{jj}+\sum_{\substack{m\neq l\\ m\neq j}} c_{lm}\,d_{mj}=c_0\,d+cd_0+(n-2)\,cd.$$

D'après la définition (122) il résulte donc que

$$\sum_{m=1}^{n} c_{lm}\,d_{mj}=\begin{cases} \varepsilon_0(c,d) & \text{pour} \quad l=j,\\ \varepsilon(c,d) & \text{pour} \quad l\neq j.\end{cases} \tag{133}$$

De la même manière il résulte des définitions (123) et (124) que

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} b_{kl}\,c_{lm}\,d_{mj}=\begin{cases} b_0\varepsilon_0(c,d)+(n-1)\,b\varepsilon(c,d)=\zeta_0(b,c,d) \\ \hfill \text{pour} \quad k=j,\\ b_0\,\varepsilon(c,d)+b\varepsilon_0(c,d)+(n-2)\,b\,\varepsilon(c,d)=\zeta(b,c,d) \\ \hfill \text{pour} \quad k\neq j\end{cases} \tag{134}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=}^{n} a_{ik}\,b_{kl}\,c_{lm}\,d_{mj}=\begin{cases} \eta_0(a,b,c,d) & \text{pour} \quad i=j,\\ \eta(a,b,c,d) & \text{pour} \quad i\neq j.\end{cases} \tag{135}$$

Nous appliquerons les formules (133)-(135) pour transformer les équations fonctionnelles (97), (99) et (100). Occupons-nous d'abord du

déterminant $w(x,y)$ et des compléments algébriques $w_{kl}(x,y)$ qui figurent dans ces équations. D'après (96) et (133) il vient que

$$s_{jl}=\begin{cases} \varepsilon_0\big(q(y),Q(x)\big) & \text{pour} \quad j=l,\\ \varepsilon\big(q(y),Q(x)\big) & \text{pour} \quad j\neq l.\end{cases} \tag{136}$$

Ainsi, dans le déterminant $w(x,y)$ défini par la formule (54), les éléments de la diagonale principale sont égaux, les éléments hors de cette diagonale sont aussi égaux et $w(x,y)=V$, où V est le déterminant de la formule (59) dans lequel on a, en vertu de (136),

$$t=\varepsilon_0\big(q(y),Q(x)\big)-1, \qquad u=\varepsilon\big(q(y),Q(x)\big). \tag{137}$$

Nous avons donc aussi

$$w_{kl}(x,y)=\begin{cases} V_t & \text{pour} \quad k=l,\\ V_u & \text{pour} \quad k\neq l.\end{cases}$$

Posons

$$\omega_0=-\frac{V_t}{V}=-\frac{w_{kk}(x,y)}{w(x,y)}, \qquad \omega=-\frac{V_u}{V}=-\frac{w_{kl}(x,y)}{w(x,y)} \quad \text{pour} \quad k\neq l.$$

En appliquant les définitions (125) nous avons, d'après les formules (63), (137) et (126),

$$\hat{\omega}=-\left(\frac{V_t}{V}-\frac{V_u}{V}\right)=\frac{1}{1-\big[\varepsilon_0\big(q(y),Q(x)\big)-\varepsilon\big(q(y),Q(x)\big)\big]} \tag{138}$$

$$=\frac{1}{1-\hat{\varepsilon}\big(q(y),Q(x)\big)}=\frac{1}{1-\hat{q}(y)\hat{Q}(x)}$$

et, d'après les formules (64), (137) et (129),

$$\tilde{\omega}=-\left(\frac{V_t}{V}+(n-1)\frac{V_u}{V}\right)=\frac{1}{1-\tilde{\varepsilon}\big(q(y),Q(x)\big)}=\frac{1}{1-\tilde{q}(y)\tilde{Q}(x)}. \tag{139}$$

A l'aide des formules (134), (135) nous obtenons: de la formule (97)

$$\begin{aligned} p_0(x+y)&=\zeta_0\big(p(x),\omega,p(y)\big),\\ p(x+y)&=\zeta\big(p(x),\omega,p(y)\big); \end{aligned} \tag{140}$$

de la formule (99)

$$\begin{aligned} q_0(x+y)&=q_0(x)+\eta_0\big(p(x),\omega,q(y),P(x)\big),\\ q(x+y)&=q(x)+\eta\big(p(x),\omega,q(y),P(x)\big); \end{aligned} \tag{141}$$

de la formule (100)

$$(142)\quad \begin{aligned} r_0(x+y) &= r_0(x)+\zeta_0\big(p(x),\omega,r(y)\big)+\eta_0\big(p(x),\omega,q(y),R(x)\big),\\ r(x+y) &= r(x)+\zeta\big(p(x),\omega,r(y)\big)+\eta\big(p(x),\omega,q(y),R(x)\big).\end{aligned}$$

De la formule (93) nous obtenons de plus

$$(143)\quad p_0(x)+(n-1)p(x)+q_0(x)+(n-1)q(x)+r_0(x)+(n-1)r(x)=1.$$

En employant la définition (125) et les formules (130), (131), (139) nous obtenons de (140)-(143) pour chaque $x,y\geqslant 0$

$$(144)\quad \begin{aligned} \tilde p(x+y) &= \frac{\tilde p(x)\tilde p(y)}{1-\tilde q(y)\tilde Q(x)},\\ \tilde q(x+y) &= \tilde q(x)+\tilde p(x)\tilde P(x)\frac{\tilde q(y)}{1-\tilde q(y)\tilde Q(x)},\\ \tilde r(x+y) &= \tilde r(x)+\tilde p(x)\frac{\tilde r(y)+\tilde q(y)\tilde R(x)}{1-\tilde q(y)\tilde Q(x)},\end{aligned}$$

$$(145)\quad \tilde p(x)+\tilde q(x)+\tilde r(x)=1.$$

En remplaçant dans les équations (144), (145) les lettres p,q,r par P,Q,R et inversement, nous gagnons les équations suivantes:

$$(146)\quad \begin{aligned} \tilde P(x+y) &= \frac{\tilde P(x)\tilde P(y)}{1-\tilde q(x)\tilde Q(y)},\\ \tilde Q(x+y) &= \tilde Q(x)+\tilde p(x)\tilde P(x)\frac{\tilde Q(y)}{1-\tilde q(x)\tilde Q(y)},\\ \tilde R(x+y) &= \tilde R(x)+\tilde P(x)\frac{\tilde R(y)+\tilde Q(y)\tilde r(x)}{1-\tilde q(x)\tilde Q(y)},\end{aligned}$$

$$(147)\quad \tilde P(x)+\tilde Q(x)+\tilde R(x)=1.$$

En accord avec les notations (125) nous avons dans ces équations

$$(148)\quad \tilde p(x)=p_0(x)+(n-1)p(x),\quad \ldots,\quad \tilde R(x)=R_0(x)+(n-1)R(x).$$

D'une manière analogue, au moyen des équations (140)-(142) (mais sans l'équation (143)), de la définition (125) et des formules (127), (128),

(138) nous obtenons pour les fonctions $\hat p,\hat q,\hat r,\hat P,\hat Q,\hat R$ un système d'équations qui diffère du système (144), (146) par le signe ^ introduit au lieu de ~. Dans ce système nous avons

$$(149)\quad \hat p(x)=p_0(x)-p(x),\quad \ldots,\quad \hat R(x)=R_0(x)-R(x).$$

(~) Le système d'équations (144)-(147), auquel satisfont les fonctions $\tilde p,\tilde q,\ldots,\tilde R$ est identique — excepté les notations — au système (2)-(9). Les hypothèses faites sur les fonctions $\tilde p,\tilde q,\ldots,\tilde R$ dans ce § sont identiques aux hypothèses faites sur les fonctions $p,q,\ldots,R$ dans la note I, ainsi la solution du système (144)-(147) est déjà accomplie et les fonctions cherchées sont données par les formules du § 1.2.

(^) Les fonctions $\hat p,q,\ldots,\hat R$ définies par les formules (149) ne sont pas nécessairement des probabilités; nous savons seulement que pour chaque x non négatif

$$(150)\quad -1\leqslant \hat p(x),\hat q(x),\hat r(x),\hat P(x),\hat Q(x),\hat R(x)\leqslant 1.$$

Nous avons donc à étudier le système (3)-(5), (7)-(9) avec l'hypothèse (150) au lieu de l'hypothèse que les fonctions cherchées sont des probabilités. Cette étude a été faite au § 2.3 avec l'hypothèse auxiliaire (66). Dans le § 2.4 nous avons supposé que des égalités analogues (formules (105)) sont satisfaites. Ces égalités ont un sens probabilistique clair: la molécule peut changer de direction de sa marche et changer de droite seulement lorsqu'elle rencontre de la substance parsemée sur les droites $\Pi_1,\Pi_2,\ldots,\Pi_n$. Dans notre cas les égalités (105) donnent

$$p_0(0)=P_0(0)=1,\qquad q_0(0)=Q_0(0)=r_0(0)=R_0(0)=0,$$

$$p(0)=P(0)=q(0)=Q(0)=r(0)=R(0)=0,$$

d'où

$$\hat p(0)=\hat P(0)=1,\qquad \hat q(0)=\hat Q(0)=\hat r(0)=\hat R(0)=0,$$

c'est-à-dire bien les égalités (66). Ainsi la solution du système (144)-(146), dans lequel l'indice ~ est remplacé par ^, est celle du § 2.3.

Le fait que le système (~) est concordant au système (2)-(9) n'est pas accidental. On peut arriver aux fonctions définies dans la note I en considérant le mouvement de „l'ombre" de la molécule sur une droite parallèle aux droites $\Pi_1,\Pi_2,\ldots,\Pi_n$, c'est-à-dire le mouvement de sa projection orthogonale sur une telle droite. Nous illustrons cette projection en définissant les fonctions $\tilde p,\tilde q,\ldots,\tilde R$ par les formules (148). Il semble que les fonctions $\hat p,\hat q,\ldots,\hat R$ n'ont pas d'interprétation aussi naturelle.

Le but final de ce § n'est pas de trouver les fonctions (148) et (149), mais de trouver les probabilités $p_0, q_0, \ldots, R_0, p, q, \ldots, R$, définies au début de ce paragraphe. Il résulte des formules (148) et (149) que

$$(151)\quad \begin{aligned} p_0(x) &= \frac{1}{n}\tilde{p}(x) + \frac{n-1}{n}\hat{p}(x), \quad \ldots, \quad R_0(x) = \frac{1}{n}\tilde{R}(x) + \frac{n-1}{n}\hat{R}(x), \\ p(x) &= \frac{1}{n}\tilde{p}(x) - \frac{1}{n}\hat{p}(x), \quad \ldots, \quad R(x) = \frac{1}{n}\tilde{R}(x) - \frac{1}{n}\hat{R}(x). \end{aligned}$$

Des relations linéaires analogues sont donc satisfaites aussi par les dérivées à droite de ces fonctions au point zéro:

$$\varkappa_0, \lambda_0, \ldots, M_0, \varkappa, \lambda, \ldots, M, \hat{\varkappa}, \hat{\lambda}, \ldots, \hat{M}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}, \ldots, \tilde{M}.$$

Nous savons déjà que les fonctions $\tilde{p}, \tilde{q}, \ldots, \tilde{R}$ s'obtiennent des formules du § 1.2 en mettant au-dessus des symboles des fonctions et des paramètres $\varkappa, K, \lambda, \Lambda, \delta, \sigma, \alpha$ l'indice ~. Les fonctions $\hat{p}, \hat{q}, \hat{P}, \hat{Q}$ s'obtiennent des formules du même paragraphe et les fonctions $\hat{r}$, $\hat{R}$ des formules (74)-(81), § 2.3, en ajoutant l'indice ^. Dans ces paragraphes on a discuté les conditions qui doivent être satisfaites par les paramètres $\tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}, \tilde{K}, \tilde{\Lambda}$, $\hat{\varkappa}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{K}, \hat{\Lambda}, \hat{M}$. Ce ne sont pas des conditions suffisantes. Ces dernières se déduisent du fait que les fonctions définies par les formules (151) sont des probabilités satisfaisant aux équations (145) et (147).

2.7. Résumé. Les résultats de ce travail sont contenus dans les §§ 2.4-2.6. Dans le § 2.1 nous avons défini les probabilités de certains phénomènes liés au mouvement d'une molécule sur un système de droites parallèles. Nous traitons ces probabilités comme des fonctions de la mesure (masse) des segments que la molécule parcourt. Dans le § 2.4 nous avons trouvé des équations fonctionnelles pour ces probabilités: ce sont les formules (93), (94), (97), (99), (100), (102)-(104). Des équations fonctionnelles nous avons obtenu dans le § 2.5 les équations différentielles (112)-(116), (119). Pour trouver les probabilités étudiées nous nous sommes bornés, dans le § 2.6, au cas spécial de l'équivalence des droites et, en introduisant les fonctions auxiliaires (148), (149), nous sommes arrivés au système d'équations (144)-(147) qui a été résolu dans la note I et dans le § 2.3. En même temps nous avons obtenu des relations intéressantes avec le mouvement de la molécule sur une droite, qui a été étudié dans la note I.

Travaux cités

[1] Д. К. Фаддеев и И. С. Соминский, *Сборник задач по высшей алгебре*, Москва 1954.

[2] A. Mostowski i M. Stark, *Algebra wyższa I*, Warszawa 1953.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 18. 6. 1955