Sur la force frontale exercée sur un obstacle par un liquide visqueux compressible

par

A. KRZYWICKI (Wrocław)

Je considère dans l'espace le mouvement d'un liquide homogène, visqueux, compressible, remplissant tout l'espace à l'extérieur d'une surface Σ fermée et bornée, qui, sans se déformer, se déplace parallèlement à une droite avec une vitesse constante égale à W_0. Soit XYZ un système de coordonnées lié invariablement à la surface Σ, dont l'axe Z est parallèle à la vitesse de Σ. Soient u,v,w les composantes de la vitesse du liquide par rapport au système immobile parallèle au système XYZ; soient p,ϱ,μ,ν respectivement la pression, la densité et les coefficients de viscosité du liquide. *J'admets que les forces extérieures sont nulles* et, pour simplifier, que la surface Σ possède partout une normale continue.

Le mouvement du liquide est défini par les équations du mouvement:

$$(1)\qquad \begin{aligned}
&\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+(w-W_0)\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial \Theta}{\partial x}+\mu\Delta u,\\
&\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+(w-W_0)\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\frac{\partial \Theta}{\partial y}+\mu\Delta v,\\
&\varrho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+(w-W_0)\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\frac{\partial \Theta}{\partial z}+\mu\Delta w,
\end{aligned}$$

où

$$\Theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},\qquad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

par l'équation de la continuité:

$$(2)\qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t}+u\frac{\partial \varrho}{\partial x}+v\frac{\partial \varrho}{\partial y}+(w-W_0)\frac{\partial \varrho}{\partial z}+\varrho\Theta=0\qquad \left(\text{ou } \frac{d\varrho}{dt}+\varrho\Theta=0\right);$$

et par l'équation caractéristique du liquide:

$$(3)\qquad p=p(\varrho,t).$$

1. Je considère le mouvement au moment t et j'admets qu'à ce moment les hypothèses suivantes sont satisfaites:

(I) *le liquide adhère à la surface Σ; on aura donc sur cette surface*

$$u=v=0,\qquad w=W_0\qquad (W_0>0);$$

(II) *l'énergie cinétique du mouvement du liquide est finie:*

$$\iiint_{X_\Sigma}\varrho(u^2+v^2+w^2)\,d\omega<\infty,$$

X_Σ désignant tout l'espace à l'extérieur de Σ;

(III) *il existe une constante $\varrho^*\neq 0$ telle que*

$$\iiint_{X_\Sigma}|\varrho-\varrho^*|\,d\omega<\infty:$$

(IV) *la densité ϱ est bornée*: $\varrho\leqslant\text{const}$;

(V) *il existe une constante M telle que*

$$\iiint_{\Pi_\Sigma}\frac{1}{\varrho}\,d\omega\leqslant M\iiint_{\Pi}d\omega,\qquad \Pi_\Sigma=\Pi-\operatorname{int}\Sigma,$$

pour chaque domaine Π contenant Σ, int Σ *désignant le domaine intérieur à Σ. Dans la suite je me borne au cas où Π est un cylindre à l'axe Z, symétrique au plan XY, la moitié de sa hauteur étant égale au carré de son rayon*[1]);

(VI) *la fonction $\partial p/\partial\varrho$ est bornée pour ϱ satisfaisant à la condition* (IV): $|\partial p/\partial\varrho|\leqslant\text{const}$;

(VII) *les fonctions u,v,w,p,ϱ sont continues, ainsi que toutes leurs dérivées partielles qui apparaîssent dans les équations du mouvement et dans l'équation de la continuité*[2]).

Remarque 1. L'hypothèse (III) sera satisfaite, si l'on assujettit le mouvement aux deux conditions suivantes:

$$(*)\qquad \iiint_{X_\Sigma}|\varrho_0-\varrho^*|\,d\omega<\infty,$$

$\varrho_0=\varrho(x,y,z,0)$ désignant la densité du liquide au moment $t=0$, et

$$(**)\qquad \iiint_{X_\Sigma}|\varrho-\varrho_0|\,d\omega<\infty,$$

---

[1]) Il suffit d'admettre que la condition (V) est satisfaite pour une suite X_n de domaines (voir le renvoi [2]) dans le mémoire [2]).

[2]) Les hypothèses concernant la surface Σ et les fonctions u,v,w,p,ϱ peuvent être affaiblies (voir le renvoi [3]) dans le mémoire [1]).

ce qui veut dire que pendant le mouvement une masse finie du liquide a été transportée.

Remarque 2. Le caractère de la condition (III) peut être expliqué par la remarque suivante: on voit facilement que les hypothèses (III)-(VI) sont satisfaites, si les conditions suivantes sont remplies:

(III*) l'expression

$$\iiint_{X_\Sigma} \int_{p^*}^{p} \frac{dp}{\varrho}\, d\omega,$$

où $p^*=p(\varrho^*,t)$, est finie, ce qui exprime le fait que l'énergie intérieure du liquide au moment t est finie;

(IV*-V*) la densité ϱ est limitée, $0<c\leqslant\varrho\leqslant C$, c et C étant des constantes;

(VI*) la fonction $\partial p/\partial\varrho$ est continue et positive pour $\varrho\geqslant c$, d'où il suit

$$\min_{c\leqslant\varrho\leqslant C} \frac{\partial p}{\partial\varrho}>0, \qquad \max_{c\leqslant\varrho\leqslant C}\frac{\partial p}{\partial\varrho}\leqslant \text{const};$$

la deuxième inégalité dit que la vélocité du son dans ce liquide est bornée.

Remarque 3. En intégrant les membres des inégalités $\varrho^*-|\varrho-\varrho^*|\leqslant\varrho\leqslant\varrho^*+|\varrho-\varrho^*|$ et en tenant compte de l'hypothèse (III), on a

$$\varrho^*=\lim_n \frac{\iiint_{\Xi_n}\varrho\, d\omega}{\iiint_{\Xi_n} d\omega},$$

Ξ_n désignant une suite monotone de domaines, telles que $\sum_n \Xi_n$ soit égal à tout l'espace.

Il est clair que les conditions (III), (IV) et (VI) entraînent l'inégalité $|p-p^*|<\text{const}|\varrho-\varrho^*|$, d'où il suit

$$\iiint_{X_\Sigma} |p-p^*|\, d\omega<\infty. \tag{4}$$

Théorème I. *Si les hypothèses* (I)-(VII) *sont remplies au moment t, il existe une suite de surfaces cylindriques Φ_n croissantes indéfiniment de manière que $1/4\leqslant R_n^2/h_n\leqslant 16$, où R_n et h_n désignent respectivement le rayon et la moitié de la hauteur de Φ_n, et telles que*

$$P_z=-\lim_{n\to\infty}\iiint_{\Omega_n}\frac{\partial(\varrho w)}{\partial t}\, d\omega; \tag{5}$$

P_z désigne ici la composante frontale de la force exercée par le liquide sur Σ, Ω_n — le domaine contenu entre les surfaces Σ et Φ_n.

Démonstration. La composante P_z s'exprime par la formule

$$P_z=\iint_{\Sigma} pn_z d\sigma - \nu\iint_{\Sigma}\Theta n_z d\sigma-\mu\iint_{\Sigma}\frac{\partial w}{\partial n}\, d\sigma; \tag{6}$$

n_x,n_y,n_z désignent les cosinus directeurs de la normale intérieure de la surface de l'intégration, $\partial w/\partial n$ est la dérivée prise le long de la normale intérieure.

Désignons par Φ une surface cylindrique à l'axe Z, symétrique au plan XY. En ajoutant l'équation (2) multipliée par w au premier membre de la troisième des équations (1), en intégrant l'équation obtenue sur le domaine Ω contenu entre les surfaces Σ et Φ, et en tenant compte de (I) et (6), on obtient

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}\frac{\partial(\varrho w)}{\partial t}\, d\omega+P_z=&\iint_{\Phi}\varrho w\{un_x+vn_y+(w-W_0)n_z\}\, d\sigma\\ &+\iint_{\Phi} pn_z d\sigma-\nu\iint_{\Phi}\Theta n_z d\sigma-\mu\iint_{\Phi}\frac{\partial w}{\partial n}\, d\sigma.\end{aligned} \tag{7}$$

On a $\Phi=\Gamma+\Delta^++\Delta^-$, Γ désignant la surface latérale de Φ, Δ^+ et Δ^- sa base supérieure et inférieure respectivement. Sur la surface Φ on a, en utilisant les coordonnées cylindriques r,φ,z,

$$n_x=-\cos\varphi,\qquad n_y=-\sin\varphi,\qquad n_z=0,$$

sur la base Δ^+

$$n_x=n_y=0,\qquad n_z=-1,$$

et sur la base Δ^-

$$n_x=n_y=0,\qquad n_z=+1.$$

Soit R le rayon de la base de Φ et h la moitié de sa hauteur. Je pose

$$\begin{aligned}
F(R,h)&=\iiint_{\Omega}\frac{\partial(\varrho w)}{\partial t}\, d\omega+P_z,\\
G_1(R,h)&=-\Big(\iint_{\Delta^+}-\iint_{\Delta^-}\Big)\varrho w^2 d\sigma-\Big(\iint_{\Delta^+}-\iint_{\Delta^-}\Big)p\, d\sigma,\\
G_2(R,h)&=-\iint_{\Gamma}\varrho w(u\cos\varphi+v\sin\varphi)\, d\sigma,\\
G_3(R,h)&=W_0\Big(\iint_{\Delta^+}-\iint_{\Delta^-}\Big)\varrho w\, d\sigma,\\
G_4(R,h)&=\nu\Big(\iint_{\Delta^+}-\iint_{\Delta^-}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\Big)d\sigma,\\
G_5(R,h)&=\mu\iint_{\Gamma}\frac{\partial w}{\partial r}\, d\sigma,\\
G_6(R,h)&=(\mu+\nu)\Big(\iint_{\Delta^+}-\iint_{\Delta^-}\Big)\frac{\partial w}{\partial z}\, d\sigma; \qquad \Big(\iint_{\Delta^+}-\iint_{\Delta^-}\Big)d\sigma\equiv\iint_{\Delta^+}d\sigma-\iint_{\Delta^-}d\sigma.
\end{aligned} \tag{8}$$

On peut alors écrire l'équation (7) de la façon suivante:

$$F(R,h) = \sum_{i=1}^{6} G_i(R,h). \tag{9}$$

Je ferai voir maintenant que

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta^2\eta^2} \int_\beta^{2\beta} \int_\alpha^{2\alpha} dR\, d\alpha \int_\eta^{2\eta} \int_\zeta^{2\zeta} F(R,h)\, dh\, d\zeta = 0, \tag{10}$$

cette égalité devant exprimer que l'expression dont il est question tend uniformément vers zéro par rapport à η, si η est assujetti à la condition

$$\beta^2 \leqslant \eta \leqslant 2\beta^2. \tag{11}$$

De l'hypothèse (II), de la formule (4) et de l'identité évidente

$$\Big(\iint_{\Delta^+} - \iint_{\Delta^-}\Big)\, p\, d\sigma = \Big(\iint_{\Delta^+} - \iint_{\Delta^-}\Big)(p - p^*)\, d\sigma$$

on déduit l'égalité

$$\lim_{R,\zeta\to\infty} \int_\zeta^{2\zeta} G_1(R,h)\, dh = 0,$$

et, à plus forte raison,

$$\lim_{R,\zeta\to\infty} \frac{1}{\zeta} \int_\zeta^{2\zeta} G_1(R,h)\, dh = 0. \tag{12}$$

Je définis la manière de la croissance à l'infini des deux variables R et ζ dans les dernières formules par les relations

$$\begin{aligned} &\beta \leqslant \alpha \leqslant 2\beta, \qquad \beta^2 \leqslant \zeta \leqslant 4\beta^2, \\ &\beta \leqslant R \leqslant 4\beta, \qquad \beta^2 \leqslant h \leqslant 8\beta^2, \end{aligned} \tag{13}$$

qui résultent des formules (10) et (11). Dans la suite j'écrirai $\lim\limits_{\beta\to\infty}$ en tenant compte de (13).

De l'hypothèse (II) et de l'inégalité de Schwarz il résulte

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\alpha} \int_\alpha^{2\alpha} G_2(R,h)\, dR = 0. \tag{14}$$

L'inégalité de Schwarz

$$\int_\zeta^{2\zeta} dh \iint_{\Delta^+} \varrho |w| d\sigma \leqslant \Big(\int_\zeta^{2\zeta} dh \iint_{\Delta^+} \varrho\, d\sigma\Big)^{1/2} \Big(\int_\zeta^{2\zeta} dh \iint_{\Delta^+} \varrho w^2 d\sigma\Big)^{1/2}$$

et les conditions (II) et (IV) entraînent

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{R\sqrt{\zeta}} \int_\zeta^{2\zeta} G_3(R,h)\, dh = 0,$$

d'où, en tenant compte de (13),

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\zeta} \int_\zeta^{2\zeta} G_3(R,h)\, dh = 0. \tag{15}$$

La base Δ^+ du cylindre Φ est une région dans le plan $z=h$; en utilisant les coordonnées cylindriques r,φ,z dans le système XYZ on tire de la formule de Green

$$\iint_{\Delta^+} \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\Big) d\sigma = \int_0^{2\pi} (u \cos\varphi + v \sin\varphi) R\, d\varphi.$$

En vertu de (II), de (V) et de l'inégalité de Schwarz, la dernière égalité donne

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\alpha\zeta} \int_\alpha^{2\alpha} dR \int_\zeta^{2\zeta} G_4(R,h)\, dh = 0. \tag{16}$$

On obtient pareillement

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta^2} \int_\beta^{2\beta} \int_\alpha^{2\alpha} G_5(R,h)\, dR\, d\alpha = 0, \qquad \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\eta^2} \int_\eta^{2\eta} \int_\zeta^{2\zeta} G_6(R,h)\, dh\, d\zeta = 0. \tag{17}$$

Des formules (9), (12) et (14)-(17) résulte la relation annoncée (10). En posant dans la formule (10) $\eta = \beta^2$ nous en déduisons qu'il existe deux suites $\{R_n\}$ et $\{h_n\}$ indéfiniment croissantes telles que

$$\lim_{n\to\infty} F(R_n, h_n) = 0$$

et, d'après (13), $1/4 \leqslant R_n^2/h_n \leqslant 16$. Le théorème I est donc démontré.

En particulier, *si le mouvement considéré du liquide est permanent par rapport au système XYZ, il résulte de* (5) *que le liquide n'exerce aucune force frontale sur la surface Σ.*

2. Soit

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(p) = \int_{p^*}^{p} \frac{dp}{\varrho};$$

on aura donc

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial x} \varrho = \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial y} \varrho = \frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial z} \varrho = \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{18}$$

Dans la suite X_{R_0} désigne le domaine: $R_0 \leqslant r < \infty$, $-\infty < z < +\infty$, et X_{Z_0} — le domaine: $-\infty < z \leqslant -Z_0$, $Z_0 \leqslant z < +\infty$, R_0 et Z_0 étant des constantes positives.

THÉORÈME II. *Au moment t les hypothèses suivantes soient satisfaites:*

(a) (I), (II), (III), (VI), (VII);

(a_0) $0 < c \leqslant \varrho \leqslant C$;

(b) *les fonctions u, v, w sont bornées* [3]);

(c) *les fonctions*

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varrho}{\partial x}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\varrho}{\partial y}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\varrho}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r}\Theta$$

sont bornées dans le domaine X_{R_0}, et les fonctions

$$\frac{1}{z}\frac{\partial\varrho}{\partial x}, \quad \frac{1}{z}\frac{\partial\varrho}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varrho}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{1}{z}\Theta$$

sont bornées dans le domaine X_{Z_0};

(d) $$\iiint_{X_{R_0}} \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial z}\right)^2 d\omega < \infty \;{}^{4});$$

il existe alors une suite de surfaces cylindriques Φ_n^0 croissantes indéfiniment, de manière que $\frac{1}{4} \leqslant R_n^{0^2}/h_n^0 \leqslant 16$ et telles qu'il soit

$$W_0 P_z = -\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\partial E_{\Omega_n^0}}{\partial t} + D_{\Omega_n^0} + \iiint_{\Omega_n^0} \boldsymbol{P}(p)\frac{\partial\varrho}{\partial t}\, d\omega - \frac{\nu}{\varrho^{*2}}\iint_{\Phi_n^0} \frac{\partial\varrho}{\partial t}\, \varrho u_n\, d\sigma\right\}, \tag{19}$$

où

$$D_\Omega = \iiint_\Omega \left\{\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \nu\Theta^2\right\} d\omega, \tag{20}$$

$$E_\Omega = \tfrac{1}{2}\iiint_\Omega \varrho(u^2+v^2+w^2)\, d\omega, \tag{21}$$

$$u_n = u n_x + v n_y + w n_z. \tag{22}$$

[3]) Il est évident qu'il suffit d'admettre que cette hypothèse soit satisfaite à l'extérieur d'un cylindre Φ_{n_0}.

[4]) On voit d'après la manière de la démonstration que la convergence de l'intégrale (d) dans le théorème II et (d') dans le théorème II' n'est pas essentielle; il suffit d'admettre que l'intégrale de la fonction $(1/r^2)(\partial\varrho/\partial z)^2$ est bornée pour la suite de domaines: $\lambda_n \leqslant r \leqslant 2\lambda_n$, $-\lambda_n^2 \leqslant z \leqslant \lambda_n^2$, $\{\lambda_n\}$ étant une suite de nombres infiniment croissants.

Démonstration. Nous remarquons tout d'abord que d'après l'hypothèse (a_0) on a

$$\left|\int_{p^*}^{p}\frac{dp}{\varrho}\right| \leqslant \frac{1}{c}\left|p-p^*\right|.$$

En vertu de (4) il résulte donc

$$\iiint_{X_\Sigma} |\boldsymbol{P}(p)|\, d\omega < \infty. \tag{23}$$

En multipliant la première des équations (1) par u, la seconde par v, la troisième par w, l'équation (2) par $\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)$, en les ajoutant ensuite et en intégrant sur Ω, on obtient en vertu de (I), (6), (20)-(22),

$$\frac{\partial E_\Omega}{\partial t} + D_\Omega + W_0 P_z = \tfrac{1}{2}\iint_\Phi \varrho(u^2+v^2+w^2)(u_n - W_0 n_z)\, d\sigma \tag{24}$$

$$-\frac{\mu}{2}\iint_\Phi \frac{\partial}{\partial n}(u^2+v^2+w^2)\, d\sigma + \iint_\Phi (-\nu\Theta + p) u_n\, d\sigma + \iiint_\Omega p\Theta\, d\omega.$$

En intégrant par parties le dernier terme de la formule (24) et en tenant compte de (18), (2) et de l'hypothèse (I) on a

$$\iint_\Phi p u_n\, d\sigma + \iiint_\Omega p\Theta\, d\omega \tag{25}$$

$$= -\iiint_\Omega \boldsymbol{P}(p)\frac{\partial\varrho}{\partial t}\, d\omega + \iint_\Phi \boldsymbol{P}(p)\varrho(u_n - W_0 n_z)\, d\sigma + W_0\iint_\Phi p n_z\, d\sigma.$$

Quant au terme $-\nu\iint_\Phi \Theta u_n\, d\sigma$ dans (24), j'utilise l'identité évidente

$$\Theta = \frac{1}{\varrho^{*2}}\left[\Theta\varrho^2 - \Theta(\varrho^2 - \varrho^{*2})\right];$$

en vertu de l'équation de la continuité on a alors

$$\iint_\Phi \Theta u_n\, d\sigma = -\frac{1}{\varrho^{*2}}\iint_\Phi \varrho\frac{\partial\varrho}{\partial t}\, u_n\, d\sigma - \tag{26}$$

$$-\frac{1}{\varrho^{*2}}\iint_\Phi \varrho\left\{u\frac{\partial\varrho}{\partial x} + v\frac{\partial\varrho}{\partial y} + (w - W_0)\frac{\partial\varrho}{\partial z}\right\} u_n\, d\sigma - \frac{1}{\varrho^{*2}}\iint_\Phi \Theta(\varrho^2 - \varrho^{*2})\, u_n\, d\sigma.$$

En vertu de (25) et (26) l'équation (24) prend la forme

$$F'(R,h) = \sum_{i=1}^{4} G_i'(R,h), \tag{27}$$

où

$$F'(R,h)=\frac{\partial E_\Omega}{\partial t}+D_\Omega+\iiint_\Omega \boldsymbol{P}(p)\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,d\omega-\frac{\nu}{\varrho^{*2}}\iint_\Phi \frac{\partial\varrho}{\partial t}\,\varrho u_n\,d\sigma+W_0P_z,$$

$$\begin{aligned}G_1'(R,h)=&-\tfrac{1}{2}\iint_\Gamma \varrho(u^2+v^2+w^2)(u\cos\varphi+v\sin\varphi)\,d\sigma\\&-\iint_\Gamma \boldsymbol{P}\varrho(u\cos\varphi+v\sin\varphi)\,d\sigma\\&-\frac{\nu}{\varrho^{*2}}\iint_\Gamma \varrho\left(u\frac{\partial\varrho}{\partial x}+v\frac{\partial\varrho}{\partial y}+w\frac{\partial\varrho}{\partial z}\right)(u\cos\varphi+v\sin\varphi)\,d\sigma\\&-\frac{\nu}{\varrho^{*2}}\iint_\Gamma \Theta(\varrho-\varrho^*)(\varrho+\varrho^*)(u\cos\varphi+v\sin\varphi)\,d\sigma\\&+\frac{\nu W_0}{\varrho^{*2}}\iint_\Gamma \varrho\frac{\partial\varrho}{\partial z}(u\cos\varphi+v\sin\varphi)\,d\sigma,\end{aligned}$$

$$G_2'(R,h)=\frac{\mu}{2}\iint_\Gamma \frac{\partial}{\partial r}(u^2+v^2+w^2)\,d\sigma,$$

$$\begin{aligned}G_3'(R,h)=&-\tfrac{1}{2}\left(\iint_{\Delta+}-\iint_{\Delta-}\right)\varrho(u^2+v^2+w^2)(w-W_0)\,d\sigma\\&-\left(\iint_{\Delta+}-\iint_{\Delta-}\right)\boldsymbol{P}\varrho(w-W_0)\,d\sigma-W_0\left(\iint_{\Delta+}-\iint_{\Delta-}\right)(p-p^*)\,d\sigma\\&-\frac{\nu}{\varrho^{*2}}\left(\iint_{\Delta+}-\iint_{\Delta-}\right)\varrho\left(u\frac{\partial\varrho}{\partial x}+v\frac{\partial\varrho}{\partial y}+w\frac{\partial\varrho}{\partial z}\right)w\,d\sigma\\&+\frac{\nu W_0}{\varrho^{*2}}\left(\iint_{\Delta+}-\iint_{\Delta-}\right)\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial z}w\,d\sigma-\frac{\nu}{\varrho^{*2}}\left(\iint_{\Delta+}-\iint_{\Delta-}\right)\Theta(\varrho-\varrho^*)(\varrho+\varrho^*)w\,d\sigma,\end{aligned}$$

$$G_4'(R,h)=\frac{\mu}{2}\left(\iint_{\Delta+}-\iint_{\Delta-}\right)\frac{\partial}{\partial z}(u^2+v^2+w^2)\,d\sigma.$$

Je vais montrer maintenant, de la même manière que dans la démonstration du théorème I, que

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta^2\eta^2}\int_\beta^{2\beta}\int_\alpha^{2\alpha}dR\,d\alpha\int_\eta^{2\eta}\int_\zeta^{2\zeta}F'(R,h)\,dh\,d\zeta=0,\tag{28}$$

d'où l'on déduira la thèse du théorème II.

En vertu de l'inégalité de Schwarz on obtient, pour $\alpha>R_0$,

$$\int_\alpha^{2\alpha}dR\iint_\Gamma \varrho\left|\frac{\partial\varrho}{\partial z}u\right|d\sigma\leqslant\text{const}\cdot\alpha\left(\iiint_{X_{R_0}}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial z}\right)^2d\omega\right)^{1/2}\left(\int_\alpha^{2\alpha}dR\iint_\Gamma \varrho u^2\,d\sigma\right)^{1/2}.\tag{29}$$

En tenant compte de l'inégalité (29) et de l'inégalité analogue avec v au lieu de u, en vertu des hypothèses (II) et (d), ainsi que de la relation (23) et des hypothèses (III), (a_0), (b) et (c), on obtient

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\alpha}\int_\alpha^{2\alpha}G_1'(R,h)\,dR=0,$$

où les variables h et α satisfont les inégalités (13). Ensuite, en tenant compte de l'inégalité de Schwarz, de (13) et des hypothèses (II) et (c), on a

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\zeta}\int_\zeta^{2\zeta}dh\iint_{\Delta+}\varrho\left|\frac{\partial\varrho}{\partial z}w\right|d\sigma=0.$$

Il est facile de voir, vu la dernière relation, la forme du terme $G_3'(R,h)$ et les conditions (II), (4), (23) et (b), que l'on a

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\zeta}\int_\zeta^{2\zeta}G_3'(R,h)\,dh=0.$$

On peut montrer de la même façon que nous l'avons fait précédemment qu'il est

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta^2}\int_\beta^{2\beta}\int_\alpha^{2\alpha}G_2'(R,h)\,dR\,d\alpha=0,\qquad \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\eta^2}\int_\eta^{2\eta}\int_\zeta^{2\zeta}G_4'(R,h)\,dh\,d\zeta=0,\tag{30}$$

d'où l'on déduit (28), ce qui démontre le théorème.

Si l'on se borne au cas, où la relation entre la pression et la densité est adiabatique, c'est-à-dire, si l'on a

$$\varrho=\text{const}\cdot p^\lambda,\qquad 0<\lambda<1\tag{31}$$

(j'exclue le cas du liquide incompressible: $\lambda=0$), on peut modifier[5]) les hypothèses (a_0), (c) et (d) du théorème II et on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME II'. *Si les hypothèses suivantes sont satisfaites:*

(a') (I), (II), (III), (IV), (V), (VII);

(b') *les fonctions* u,v,w *sont bornées;*

(c') *les fonctions*

$$\frac{1}{r}\varrho^m\frac{\partial\varrho}{\partial x},\qquad \frac{1}{r}\varrho^m\frac{\partial\varrho}{\partial y},\qquad \frac{1}{r}\varrho^m\frac{\partial\varrho}{\partial z}\qquad \textit{et}\qquad \frac{1}{r}\Theta$$

[5]) Cette modification est un affaiblissement de l'hypothèse (c); en retenant l'hypothèse (V) je n'exclue pas le cas où la densité ϱ tend vers zéro en quelques points; l'expression $|\operatorname{grad}\varrho|$ peut donc prendre de grandes valeurs en ces points.

sont bornées dans le domaine X_{R_0}, *et les fonctions*

$$\frac{1}{z}\,\varrho^m\frac{\partial\varrho}{\partial x},\qquad \frac{1}{z}\,\varrho^m\frac{\partial\varrho}{\partial y},\qquad \varrho^m\frac{\partial\varrho}{\partial z}\qquad et\qquad \frac{1}{z}\,\Theta$$

sont bornées dans le domaine X_{Z_0}, *où* m *désigne un nombre naturel;*

(d′)
$$\iiint\limits_{X_{R_0}}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial z}\right)^2\varrho^{2m-1}d\omega<\infty;$$

(e′) *l'équation caractéristique du liquide a la forme* (31),
alors il existe une suite de surfaces cylindriques Φ_n' *croissantes indéfiniment et telles que*

$$(32)\qquad W_0P_z=-\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\partial E_{\Omega_n'}}{\partial t}+D_{\Omega_n'}+\frac{1}{1-\lambda}\iiint\limits_{\Omega_n'}\left(\frac{p}{\varrho}-\frac{p^*}{\varrho^*}\right)\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,d\omega\right.$$
$$\left.-\frac{\nu}{\varrho^{*m+2}}\iint\limits_{\Phi_n'}\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,\varrho^{m+1}u_n\,d\sigma\right\},$$
$$1/4\leqslant R_n'^2/h_n'\leqslant 16.$$

Démonstration. On obtient la démonstration en utilisant celle du théorème II, en y modifiant convenablement les raisonnements sur les deuxièmes membres des formules (25) et (26) et, par conséquent, sur les termes G_1' et G_3' de la formule (27); la même remarque concerne les termes G_2' et G_4'; bien que ces termes aient dans le cas considéré ici la même forme qu'auparavant, on doit maintenant remplacer l'hypothèse (a_0) par l'hypothèse (V).

D'après l'hypothèse (e′) on a

$$\boldsymbol{P}(p)=\frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{p}{\varrho}-\frac{p^*}{\varrho^*}\right).$$

En tenant compte de (2) et des identités évidentes

$$p-\frac{p^*}{\varrho^*}\,\varrho=p-p^*-\frac{p^*}{\varrho^*}(\varrho-\varrho^*),\qquad \Theta=\frac{1}{\varrho^{*m+2}}\left[\Theta\varrho^{m+2}-\Theta(\varrho^{m+2}-\varrho^{*m+2})\right],$$

on aura

$$\iint\limits_{\Phi}\boldsymbol{P}\varrho(u_n-W_0n_z)\,d\sigma=\frac{1}{1-\lambda}\iint\limits_{\Phi}(p-p^*)u_n\,d\sigma-\frac{1}{1-\lambda}\,\frac{p^*}{\varrho^*}\iint\limits_{\Phi}(\varrho-\varrho^*)u_n\,d\sigma$$
$$+\frac{W_0}{1-\lambda}\,\frac{p^*}{\varrho^*}\iint\limits_{\Phi}(\varrho-\varrho^*)n_z\,d\sigma-\frac{W_0}{1-\lambda}\iint\limits_{\Phi}(p-p^*)n_z\,d\sigma,$$

$$\varrho^{*m+2}\iint\limits_{\Phi}\Theta u_n\,d\sigma=-\iint\limits_{\Phi}\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,\varrho^{m+1}u_n\,d\sigma$$
$$+\iint\limits_{\Phi}\varrho^m\left\{\frac{\partial\varrho}{\partial x}\,u+\frac{\partial\varrho}{\partial y}\,v+\frac{\partial\varrho}{\partial z}\,(w-W_0)\right\}u_n\,d\sigma+\iint\limits_{\Phi}\Theta(\varrho^{m+2}-\varrho^{*m+2})u_n\,d\sigma.$$

Enfin, en utilisant les dernières formules et en tenant compte de l'inégalité $|\varrho^{m+2}-\varrho^{*m+2}|\leqslant(m+2)C^{m+1}|\varrho-\varrho^*|$, on obtient

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\alpha\zeta}\int\limits_{\alpha}^{2\alpha}dR\int\limits_{\zeta}^{2\zeta}\left[\iint\limits_{\Phi}\boldsymbol{P}\varrho(u_n-W_0n_z)\,d\sigma-\nu\iint\limits_{\Phi}\Theta u_n\,d\sigma\right]dh=0.$$

On a alors

$$(33)\qquad \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta^2\eta^2}\int\limits_{\beta}^{2\beta}\int\limits_{\alpha}^{2\alpha}dR\,d\alpha\int\limits_{\eta}^{2\eta}\int\limits_{\zeta}^{2\zeta}[G_1'(R,h)+G_3'(R,h)]\,dh\,d\zeta=0.$$

En vertu de l'inégalité de Schwarz on obtient

$$\left|\int\limits_{\beta}^{2\beta}\int\limits_{\alpha}^{2\alpha}G_2'(R,h)\,dR\,d\alpha\right|\leqslant\text{const}\left(\int\limits_{\beta}^{4\beta}dR\iint\limits_{\Gamma}\varrho(u^2+v^2+w^2)\,d\sigma\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\beta}^{2\beta}dR\iint\limits_{\Gamma}\frac{1}{\varrho}\,d\sigma\right)^{1/2}$$

d'où, en tenant compte de (II), (V) et (13), il résulte

$$(34)\qquad \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta^2}\int\limits_{\beta}^{2\beta}\int\limits_{\alpha}^{2\alpha}G_2'(R,h)\,dR\,d\alpha=0.$$

Les considérations semblables à celle-ci donnent enfin la deuxième formule de (30); en vertu de cette formule, de (33) et (34) on obtient la thèse du théorème II′.

On peut aussi modifier le théorème II de la manière suivante:

THÉORÈME II″. *Soient satisfaites les hypothèses du théorème* II *à l'exception des hypothèses* (c) *et* (d) *que je remplace par les conditions suivantes:*
(c″) *la fonction* Θ *est bornée,*

(d″)
$$\iiint\limits_{X_{R_0}}\frac{1}{r^2}(\Theta\varrho)^2d\omega\equiv\iiint\limits_{X_{R_0}}\frac{1}{r^2}\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2d\omega<\infty\ [6];$$

il existe alors une suite de surfaces cylindriques Φ_n'' *telles que*

$$(35)\qquad W_0P_z=-\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\partial E_{\Omega_n''}}{\partial t}+D_{\Omega_n''}+\iiint\limits_{\Omega_n''}\boldsymbol{P}(p)\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,d\omega\right\},\quad 1/4\leqslant R_n''^2/h_n''\leqslant 16.$$

[6]) Cette hypothèse peut être affaiblie, pareillement que l'hypothèse (d); il suffit d'admettre que l'intégrale $\iiint(1/r^2)(\Theta\varrho)^2d\omega$ est bornée pour la suite χ_n de domaines, définie dans le renvoi [2]) du mémoire [2].

Démonstration. On a

$$-\nu\iint_{\Phi}\Theta u_n d\sigma=\nu\iint_{\Gamma}\Theta(u\cos\varphi+v\sin\varphi)\,d\sigma-\nu\Big(\iint_{\Delta+}-\iint_{\Delta-}\Theta w\,d\sigma.$$

En vertu de l'inégalité de Schwarz on obtient

$$\int_{a}^{2a}\Big|\iint_{\Gamma}\Theta u\cos\varphi\,d\sigma\Big|\,dR\leqslant\ \mathrm{const}\cdot a\Big(\int_{a}^{2a}dR\iint_{\Gamma}\frac{1}{r^2}(\Theta\varrho)^2d\sigma\Big)^{1/2}\Big(\int_{a}^{2a}dR\iint_{\Gamma}\varrho u^2d\sigma\Big)^{1/2},$$

$$\int_{\zeta}^{2\zeta}\Big|\iint_{\Delta+}\Theta w\,d\sigma\Big|dh\leqslant\mathrm{const}\Big(\int_{\zeta}^{2\zeta}dh\iint_{\Delta+}d\sigma\Big)^{1/2}\Big(\int_{\zeta}^{2\zeta}dh\iint_{\Delta+}\varrho w^2d\sigma\Big)^{1/2}$$

et les inégalités analogues pour $\iint_{\Gamma}\Theta u\sin\varphi\,d\sigma$ et pour $\iint_{\Delta-}\Theta w d\sigma$; en tenant compte de ces inégalités, ainsi que de (II), (d'') et (13) on aura donc

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{a\zeta}\int_{a}^{2a}dR\int_{\zeta}^{2\zeta}\Big|\iint_{\Phi}\Theta u_n d\sigma\Big|\,dh=0.$$

En vertu de cette relation et de la formule (24) on voit qu'il suffit de reproduire la démonstration du théorème II pour prouver la thèse (35).

Si $\mu\neq0$, il résulte du théorème I et du théorème II (respectivement II', II'') que *le mouvement satisfaisant aux conditions du théorème* II (*resp.* II', II'') *et permanent par rapport au système* XYZ *lié à la surface* Σ *n'existe pas*[7]).

En effet, en vertu du théorème I on a $P_z=0$; en tenant compte de (19) (resp. (32), (35)) et (20) toutes les dérivées partielles de u,v,w disparaissent, ce qui donne, d'après la condition (I), $u=v=0$, $w=$ $=W_0$. Il résulte des équations du mouvement qu'il devrait être simultanément $p=\mathrm{const}$, $\varrho=\mathrm{const}$, ce qui est contraire à l'hypothèse (II).

3. Les hypothèses (c) et (d) du théorème II (resp. l'hypothèse (d'') du théorème II'') ne paraissent pas tout-à-fait naturelles. Il est donc à remarquer qu'on peut les abandonner, en remplaçant l'hypothèse (II) par une hypothèse plus restreinte.

THÉORÈME A. *Si les hypothèses suivantes sont satisfaites*:

(α) *le liquide adhère à la surface* Σ;

(β) $\iiint_{X_\Sigma}\varrho(|u|^{3/2}+|v|^{3/2}+|w|^{3/2})\,d\omega<\infty$;

(γ) *les fonctions* u,v,w *sont bornées*;

(δ) *il existe une constante* M *telle que*

$$\iiint_{\bar\pi_\Sigma}\varrho\,d\omega\leqslant M\iiint_{\bar\pi}d\omega,\qquad \iiint_{\bar\pi_\Sigma}\frac{1}{\varrho^2}\,d\omega\leqslant M\iiint_{\bar\pi}d\omega,\qquad \bar\Pi_\Sigma=\bar\Pi-\mathrm{int}\,\Sigma,$$

[7]) Evidemment on admet $W_0\neq0$; si $W_0=0$, le liquide est au repos.

pour chaque cylindre $\bar\Pi$ *à l'axe* X, *symétrique au plan* YZ, *dont la hauter est égale à son rayon*;
il existe alors deux suites de surfaces cylindriques ψ_n,ψ_n' *croissantes indéfiniment de manière que* $1/8\leqslant\bar R_n/\bar h_n$, $\bar R_n'/\bar h_n'\leqslant2$ *et telles que*

$$P_y=-\lim_n\Big\{\iiint_{\bar\Omega_n}\frac{\partial(\varrho v)}{\partial t}\,d\omega-\bar R_n\iint_{\bar\Gamma_n}\frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t}\cos\varphi\,d\sigma\Big\},$$

(36)

$$P_z=-\lim_n\Big\{\iiint_{\bar\Omega_n}\frac{\partial(\varrho w)}{\partial t}\,d\omega+\bar R_n'\iint_{\bar\Gamma_n'}\frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t}\sin\varphi\,d\sigma\Big\}.$$

u_r,u_φ,u_x désignent les composantes cylindriques de la vitesse du liquide dans les coordonnées cylindriques x,r,φ; $\bar\Omega_n$ — le domaine contenu entre les surfaces Σ et ψ_n, $\bar\Gamma_n$ — la surface latérale de ψ_n, $\bar R_n$ — le rayon de sa base et $\bar h_n$ — sa hauteur.

La démonstration est complètement analogue à celle du premier théorème du mémoire [1]. Il faut seulement se baser sur l'inégalité de Hölder au lieu de l'inégalité de Schwarz. Si l'on prend les cylindres à l'axe Y symétriques au plan XZ on obtient la formule analogue pour P_x.

On peut aussi démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME B. *Si les hypothèses suivantes sont satisfaites*:

(α)-(δ) *du théorème* A;

les fonctions p, Θ *sont bornées*;

l'équation caractéristique a la forme

$$\varrho=\mathrm{const}\cdot p^\lambda,\qquad 0\leqslant\lambda<1$$

(le liquide peut donc être incompressible);
il existe alors une suite de surfaces cylindriques ψ_n'' *croissantes indéfiniment telles que*

$$W_0P_z=-\lim_n\Big\{\frac{\partial E_{\bar\Omega_n''}}{\partial t}+D_{\bar\Omega_n''}+\frac{1}{1-\lambda}\iiint_{\bar\Omega_n''}\frac{p}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,d\omega-\frac{\lambda}{1-\lambda}W_0\bar R_n''\iint_{\bar\Gamma_n''}\frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t}\sin\varphi\,d\sigma\Big\},\tag{37}$$

$$1/8\leqslant\bar R_n''/\bar h_n''\leqslant2.$$

Des formules (36) et (37) résulte de même qu'un mouvement du liquide permanent par rapport au système XYZ et satisfaisant aux hypothèses du théorème B n'existe pas.

En comparant la formule (5), qui exprime la composante frontale de la force exercée sur un obstacle par un liquide, et les formules (7), (8) du mémoire [2], qui expriment les composantes latérales de cette force, on voit que la formule (5) a un sens mécanique clair pendant que les formules (7), (8) ne l'ont pas, à cause de leurs derniers termes. Or, si l'on se borne au cas du liquide homogène, visqueux, compressible et si l'on admet que les hypothèses (I)-(VII) sont satisfaites, ainsi que l'hypothèse

$$\iiint\limits_{X_{R_0}} \frac{r}{\varrho}\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 d\omega < \infty,$$

on peut exprimer les composantes de la force latérale de la manière suivante:

$$P_x = -\lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{\Omega_n} \frac{\partial(\varrho u)}{\partial t}\, d\omega, \qquad P_y = -\lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{\Omega_{n'}} \frac{\partial(\varrho v)}{\partial t}\, d\omega.$$

On peut aussi modifier les formules pour les composantes de la force exercée sur une courbe dans le mouvement plan du liquide. Si l'on considère un liquide homogène, visqueux, compressible et si l'on admet que les hypothèses (I)-(IV) du mémoire [1] sont satisfaites, ainsi que l'hypothèse (VI) de ce mémoire et

$$\iint\limits_{X_C} |\varrho - \varrho^*|\, d\sigma < \infty, \qquad \iint\limits_{X_C} \frac{1}{\varrho}\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 d\sigma < \infty,$$

X_C désignant tout le plan à l'extérieur de la courbe C, on obtient pour les composantes de la force exercée sur la courbe C les formules suivantes:

$$P_x = -\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{H_{r_n}} \frac{\partial(\varrho u)}{\partial t}\, d\sigma, \qquad P_y = -\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{H_{r_{n'}}} \frac{\partial(\varrho v)}{\partial t}\, d\sigma.$$

Travaux cités

[1] A. Krzywicki, *Sur le mouvement plan d'un liquide visqueux compressible*, ce volume, p. 113-122.

[2] — *Sur la force latérale exercée sur un obstacle par un liquide visqueux compressible*, ce volume, p. 174-181.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 25. 6. 1955

STUDIA MATHEMATICA publient des travaux de recherches (en langues des congrès internationaux) concernant l'Analyse fonctionnelle, les méthodes abstraites d'Analyse et le Calcul de probabilité. Chaque volume contient au moins 300 pages.

Les manuscrits dactylographiés sont à adresser à

M. Hugo Steinhaus
Wrocław 12 (Pologne), ul. Orłowskiego 15,

ou

M. Marceli Stark
Warszawa 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8, II p.

Les auteurs sont priés d'indiquer dans tout renvois bibliographique le nom de l'auteur et le titre du travail cité, l'édition, le volume et l'année de sa publication, ainsi que les pages initiale et finale.

STUDIA MATHEMATICA sont à obtenir par l'intermédiaire de

KSIĄŻKA I PRASA
Warszawa (Pologne), ul. Koszykowa 31.

Le prix de ce fascicule est 2$.

Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Warszawa 1956

Nakład 1100+165 egz. Podpisano do druku 4. V. 1956
Ark. wyd. 8,75 druk. 9 Druk ukończono w maju 1956
Pap. druk. sat. kl. III, 100 g 70x100 Zamówienie nr 1280/55
Cena zł 17,50

Wrocławska Drukarnia Naukowa, Wrocław, ul. Świerczewskiego 19.