The general form of a linear functional over $K_s(G)$ is

$$\xi(x)=\sum_{\nu}\int_{a_\nu+}^{b_\nu-}x(t)\,dy_\nu(t),$$

where the functions $y_\nu(t)$ satisfy conditions (a)-(c) of theorem 1 and

$$\sum_{\nu}\operatorname*{var}_{(a_\nu,b_\nu)}y_\nu(t)<\infty.$$

One may also establish the convergence conditions for sequences of functionals over $K_s(G)$. We shall formulate the following theorem, constituting a generalization of theorem 1 in [4], p. 210:

Let $y_n(t)$ be a sequence of functions of bounded variation in $\langle a,b\rangle$, continuous on the left in (a,b) and continuous at a fixed point $t_0\in(a,b)$, $y_n(t_0)=0$. Then the sequence

$$\int_a^b x(t)\,dy_n(t)$$

is convergent for each function $x(t)$ continuous and bounded in $\langle a,t_0)\cup\cup(t_0,b\rangle$ if and only if

(α) $\sup_n \operatorname*{var}_{\langle a,b\rangle} y_n(t)<\infty$,

(β) *for every $\varepsilon>0$ there exists a number $\delta>0$ such that for each n*

$$\operatorname*{var}_{\langle t_0-\delta,t_0+\delta\rangle} y_n(t)<\varepsilon,$$

(γ) *there exists a function $y(t)$ of bounded variation in $\langle a,b\rangle$ such that, for an arbitrary subsequence $y_{n_i}(t)$, there exists an enumerable set A and a subsequence $y_{n_{i_k}}(t)$ convergent to $y(t)$ for $t\in\langle a,b\rangle-A$.*

References

[1] В. Гливенко, *Интеграл Стильтьеса*, Москва-Ленинград 1936.

[2] J. Karamata, *Sur certaines limites rattachées aux intégrales de Stieltjes*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 182 (1926), p. 833.

[3] W. Orlicz, *Linear operations in Saks spaces (I)*, Studia Mathematica 11 (1950), p. 237-272.

[4] — *On the convergence of functionals representable as integrals over some classes of bounded functions*, Studia Mathematica 13 (1953), p. 208-217.

Reçu par la Rédaction le 2. 6. 1955

Le calcul opérationnel d'intervalle fini

par

J. MIKUSIŃSKI (Warszawa)

1. Dans un travail antérieur [2], j'ai introduit des opérateurs de Heaviside comme des fractions f/g, où f et g sont des fonctions continues dans l'intervalle $0\leqslant t\leqslant\infty$ et la „division'' est entendue comme l'opération inverse au produit de composition. J'ai montré que l'ensemble de ces opérateurs est plus riche que celui fourni par la transformation de Laplace, ce qui permet à de nouvelles applications, en particulier dans le domaine des équations à dérivées partielles (cf. [4]).

Une théorie analogue pour l'intervalle fini $0\leqslant t\leqslant T$ est le sujet de cet article. Ce calcul embrassera donc par exemple la fonction $\{\operatorname{tg}(2t/\pi T)\}$ $(0\leqslant t<T)$, qui n'est susceptible d'aucune interprétation dans le calcul opérationnel d'intervalle infini. Le nouveau calcul permettra d'obtenir, dans la théorie des équations à dérivées partielles, des théorèmes plus forts, comme nous le verrons dans la suite.

Le calcul opérationnel d'intervalle infini peut parfois être remplacé par la transformation de Laplace,

$$\mathfrak{L}f=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt,$$

lorsqu'on se borne à des fonctions *transformables*. Ceci est possible grâce au théorème fondamental de Borel disant que le produit de composition fg de deux fonctions f et g se transforme en produit ordinaire:

$$\mathfrak{L}(fg)=\mathfrak{L}f\cdot\mathfrak{L}g. \tag{1}$$

Il est cependant important de remarquer qu'une dualité pareille d'interprétation est impossible pour le calcul opérationnel d'intervalle fini, car la transformation finie

$$\mathfrak{L}f=\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

ne jouit plus de la propriété (1). La transformation de Laplace ne peut donc servir de base pour le calcul opérationnel d'intervalle fini, même lorsqu'on se borne à des fonctions transformables.

On peut même voir facilement qu'aucune transformation linéaire, non nécessairement intégrale, ne peut servir de base pour le calcul opérationnel d'intervalle fini. En effet, soit $a=\{a(t)\}$ une fonction qui est nulle pour $0\leqslant t\leqslant T/2$ et non nulle pour $T/2<t<T$. Alors on a $a^2=\{\int\limits_0^t a(t-\tau)\,a(\tau)\,d\tau\}=0$. S'il existait une transformation linéaire $\mathcal{L}a$ satisfaisant à la condition (1), on aurait $\mathcal{L}(a^2)=(\mathcal{L}a)^2=0$, d'où $\mathcal{L}a=0$ et $a=0$ par contre à la supposition.

2. Désignons par C_T l'ensemble des fonctions complexes continues $a=\{a(t)\}$ de variable réelle t, définies dans l'intervalle $0\leqslant t<T$. Définissons dans C_T l'addition et la multiplication, en posant

$$a+b=\{a(t)\}+\{b(t)\}=\{a(t)+b(t)\},$$

$$ab=\{a(t)\}\,\{b(t)\}=\{\int\limits_0^t a(t-\tau)\,b(\tau)\,d\tau\}.$$

Cela étant, l'ensemble C_T constitue un anneau commutatif.

Nous écrirons $a=0$ lorsque a est identiquement nulle dans $0\leqslant t<T$; dans le cas contraire nous écrirons $a\neq 0$. Si a est identiquement nulle pour $0\leqslant t<t_1\leqslant T$, b est identiquement nulle pour $0\leqslant t<t_2\leqslant T$, et si $t_1+t_2\geqslant T$, on a $ab=0$. Le théorème inverse est dû à E. C. Titchmarsh [8]; si $ab=0$, la fonction a est identiquement nulle pour $0\leqslant t<t_1\leqslant T$ et b est identiquement nulle pour $0\leqslant t<t_2\leqslant T$, où $t_1+t_2\geqslant T$. Donc, les fonctions nulles identiquement au voisinage (droit) de $t=0$ sont les seuls diviseurs de zéro dans C_T.

Il s'ensuit que la somme, la différence et le produit des diviseurs de zéro est encore un diviseur de zéro; les diviseurs de zéro constituent donc un sous-anneau de C_T.

La décomposition du polynôme, à coefficients $a_i\in C_T$,

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \tag{2}$$

en facteurs primitifs n'est pas en général unique. Soit par exemple a une fonction qui est nulle pour $0\leqslant t\leqslant T/2$ et non nulle pour $T/2<t<T$. Alors on a $a^2=0$ et $x^2+2ax=x(x+2a)=(x+a)(x+a)$.

On a cependant le théorème suivant:

Si le polynôme (2) *se décompose en facteurs linéaires,*

$$\prod_{i=1}^{n}(x-b_i),$$

de manière qu'aucune des différences b_i-b_j $(i\neq j)$ *n'est pas un diviseur de zéro, cette décomposition est unique* (*à l'ordre des facteurs près*).

Démonstration. Supposons que

$$\prod_{i=1}^{n}(x-b_i)=\prod_{i=1}^{n}(x-c_i). \tag{3}$$

Pour $x=c_n$, il vient

$$\prod_{i=1}^{n}(c_n-b_i)=0. \tag{4}$$

Si le dernier produit ne contenait pas de facteurs nuls, il contiendrait au moins deux diviseurs de zéro: c_n-b_i et c_n-b_j; leur différence b_i-b_j serait encore un diviseur de zéro, contre l'hypothèse. Le produit (4) contient donc au moins un facteur nul; on peut supposer que ce soit le facteur c_n-b_n. Cela étant, on peut remplacer, dans (3), c_n par b_n, ce qui donne, après la division par $x-b_n$, l'égalité

$$\prod_{i=1}^{n-1}(x-b_i)=\prod_{i=1}^{n-1}(x-c_i).$$

Le théorème est donc vrai pour un certain n, lorsqu'il l'est pour $n-1$. Par induction il est vrai généralement, car il est trivialement vrai pour $n=1$.

Remarque. Il résulte de la démonstration que ce théorème est vrai non seulement pour l'anneau C_T, mais aussi pour tout anneau commutatif dans lequel la somme (donc aussi la différence) des diviseurs de zéro est un diviseur de zéro.

3. Désignons par C_T^* l'ensemble des éléments de C_T qui ne sont pas diviseurs de zéro. Les éléments de C_T^* sont donc des fonctions qui ne s'annulent pas identiquement au voisinage de $t=0$. Si $a\in C_T^*$ et $b\in C_T^*$, on a $ab\in C_T^*$.

Soit A_T l'anneau-quotient formé de C_T. Les éléments de A_T sont donc des fractions a/b, où $a\in C_T$ et $b\in C_T^*$, avec les propriétés

$$a/b=c/d \quad \text{lorsque} \quad ad=bc,$$

$$a=ak/k \quad \text{pour tout} \quad k\in C_T^*.$$

L'addition et la multiplication dans A_T sont définies comme d'habitude:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Les éléments de A_T seront dits *opérateurs*. Les seuls opérateurs a/b qui sont diviseurs de zéro sont ceux dont le numérateur est un diviseur de zéro dans C_T.

Les calculs algébriques avec les opérateurs s'effectuent comme dans l'algèbre ordinaire, avec la seule restriction que les diviseurs de zéro ne paraîssent pas dans les dénominateurs.

Le théorème sur la décomposition des polynômes en facteurs, démontré dans le paragraphe précédent, est encore vrai pour l'anneau C_T^*, car la somme des diviseurs de zéro est un diviseur de zéro.

4. Beaucoup de propriétés des opérateurs dans l'intervalle fini sont analogues à celles des opérateurs dans l'intervalle infini; de plus, leurs démonstrations sont analogues. Ces propriétés seront énoncées ici sans démonstrations.

La fonction $l=\{1\}$, identiquement égale à 1 dans l'intervalle $0\leqslant t<T$, est dite l'*opérateur intégral*, car

$$a=\Big\{\int_0^t a(\tau)\,d\tau\Big\}.$$

Si $\{a(t)\}$ est une fonction sommable dans tout intervalle $0\leqslant t\leqslant t_0<T$, on peut lui faire correspondre l'opérateur

$$\frac{\Big\{\int_0^t a(\tau)\,d\tau\Big\}}{l}.$$

Ainsi les *fonctions localement sommables* sont incluses au calcul opérationnel.

L'ensemble des opérateurs de la forme $\{\alpha\}/l$ est isomorphe avec l'ensemble des *nombres complexes* α. On écrira donc $\alpha=\{\alpha\}/l$. Ainsi les nombres sont inclus au calcul opérationnel. On a généralement

$$\alpha\{f(t)\}=\{\alpha f(t)\}$$

pour tout nombre complexe α et toute fonction f (continue ou localement sommable).

L'*opérateur différentiel* s est défini comme l'inverse de l:

$$s=\frac{1}{l}$$

Si a est une fonction absolument continue pour $0\leqslant t<T$, on a

$$sa=a(0)+a',$$

où $a(0)$ est la valeur (nombre) de a au point $t=0$ et a' est la dérivée de a. Plus généralement, si la fonction a possède la $(n-1)^{\text{ème}}$ dérivée absolument continue, on a

$$s^n a=s^{n-1}a(0)+\ldots+sa^{(n-2)}(0)+a^{(n-1)}(0)+a^{(n)}.$$

On a

$$\frac{1}{(s-\alpha)^n}=\Big\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}\Big\}$$

pour tout nombre complexe α et tout nombre naturel n. Cette formule permet d'établir pour tout opérateur rationnel en s la forme explicite

$$\frac{\alpha_m s^m+\ldots+\alpha_0}{\beta_n s^n+\ldots+\beta_0},$$

où α_i et β_i sont des nombres.

L'emploi de ces opérateurs à la résolution des équations différentielles ordinaires à coefficients constants est le même que dans le calcul opérationnel d'intervalle infini. La seule différence est que l'on peut admettre maintenant, sans aucunes difficultés, des fonctions qui ne sont définies que dans l'intervalle fini $0\leqslant t<T$.

5. Toute fonction $f\epsilon C_T$ peut être représentée dans la forme $f=h^\alpha f_0$ $(\alpha\geqslant 0)$, où $f_0\epsilon C_T$ est une fonction non identiquement nulle au voisinage de $t=0$. Pareillement, tout opérateur a peut être représenté dans la forme $a=h^\alpha a_0$ $(\alpha\geqslant 0)$, où a_0 n'est pas un diviseur de zéro. Il s'ensuit que les opérateurs $h^\alpha a_0$, où $\alpha>0$ (et a_0 n'est pas un diviseur de zéro) sont les seuls diviseurs de zéro.

Si b n'est pas un diviseur de zéro, l'égalité $h^\alpha a=h^\beta b$ $(0\leqslant\alpha,\beta\leqslant T)$ entraîne $\alpha\leqslant\beta$.

En effet, soit $a=m/n$, $b=p/q$, où $m\epsilon C_T$ et $n,p,q\epsilon C_T^*$. Alors $h^\alpha mq=h^\beta np$; le premier membre de cette égalité représente une fonction qui est nulle pour $0\leqslant t<\alpha$; le second membre représente une fonction qui est nulle pour $0\leqslant t<\beta$ et non identiquement nulle au voisinage droit de β. Donc $\alpha\leqslant\beta$.

Voici un corollaire immédiat de la proposition précédente:

Si a et b ne sont pas des diviseurs de zéro, l'égalité $h^\alpha a=h^\beta b$ $(0\leqslant\alpha,\beta\leqslant T)$ entraîne $\alpha=\beta$.

Autrement dit, *étant donné un opérateur a, le nombre α $(0\leqslant\alpha\leqslant T)$ dans l'égalité $a=h^\alpha a_0$, où a_0 n'est pas un diviseur de zéro, est déterminé univoquement.*

Pour tout opérateur a qui est un diviseur de zéro, il existe un opérateur $b\neq 0$ tel que $ab=0$ et $b^2=0$.

Désignons par $\{H_\alpha(t)\}$ la fonction dont la valeur est 0 pour $0\leqslant t<\alpha$ et 1 pour $\alpha\leqslant t<T$. Les opérateurs

$$h^\alpha=\{H_\alpha(t)\}/l\qquad(\alpha\geqslant 0)$$

seront dits *opérateurs de translation*. Cette dénomination est justifiée par la propriété suivante: Si $f=\{f(t)\}$ est une fonction (continue ou localement sommable), le produit $h^{\alpha}f$ est une fonction dont la valeur est 0 pour $0\leqslant t<\alpha$ et $f(t-\alpha)$ pour $\alpha\leqslant t<T$.

On a en particulier $h^0=1$ et $h^{\alpha}=0$ pour $\alpha\geqslant T$.

$$h^{\alpha}h^{\beta}=h^{\alpha+\beta}. \tag{5}$$

Lorsque $\alpha+\beta\geqslant T$, on a $h^{\alpha}h^{\beta}=0$. Les opérateurs h^{α}, où $0<\alpha<T$, sont donc des diviseurs de zéro.

Il s'ensuit que l'inverse de h^{α} $(\alpha>0)$ n'existe pas et, par conséquent, que la définition de h^{α} ne peut pas être prolongée pour les valeurs non négatives de α (de manière que l'équation (5) soit satisfaite pour tous α et β réels), contrairement au calcul opérationnel d'intervalle infini.

En effet, si $a=h^{\alpha}a_0$, il suffit de poser $b=h^{\beta}b_0$, où β est le plus grand des nombres $T-\alpha$ et $T/2$.

Cette remarque permet de compléter le théorème sur la décomposition du polynôme de la manière suivante:

Si l'une des différences b_i-b_j $(i\neq j)$ est un diviseur de zéro, la décomposition du polynôme en facteurs $\prod_{i=1}^{n}(x-b_i)$ n'est pas unique.

En effet, on a alors, pour $b\neq 0$ convenablement choisi, $(b_i-b_j)b=0$ et $b^2=0$, d'où $(x-b_i)(x-b_j)=(x-b_i+b)(x-b_j-b)$. Donc:

Si le polynôme $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, dont les coefficients sont des opérateurs, se développe en facteurs linéaires,

$$\prod_{i=1}^{n}(x-b_i),$$

une condition nécessaire et suffisante pour que cette décomposition soit unique est qu'aucune des différences b_i-b_j $(i\neq j)$ ne soit pas un diviseur de zéro.

6. Considérons des fonctions $a(\lambda)$ dont l'argument λ est numérique et dont les valeurs sont des opérateurs de A_T; ce sont des *fonctions opérationnelles*. Si, en particulier, $a(\lambda)\epsilon C_T$ pour les valeurs considérées de λ, la fonction est *paramétrique*; elle peut être considérée comme une fonction de deux variables $a(\lambda)=\{a(\lambda,t)\}$.

On dira que la fonction paramétrique $a(\lambda)$ a, pour $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$, une *dérivée continue* $a'(\lambda)$, si $a'(\lambda)=\{\partial a(\lambda,t)/\partial\lambda\}$, où la dérivée partielle entre les crochets est continue dans le rectangle $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$, $0\leqslant t<T$.

Généralement, on dira qu'une fonction opérationnelle $f(\lambda)$ *a la dérivée* $f'(\lambda)$ dans l'intervalle $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$, lorsqu'il existe une fonction paramétrique $a(\lambda)$ ayant, dans $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$, une dérivée continue $a'(\lambda)$ telle que

$f(\lambda)=a(\lambda)/b$ et $f'(\lambda)=a'(\lambda)/b$, où b est un élément de C_T^*. Dans le cas où les valeurs de $f(\lambda)$ sont des nombres, la dérivée $f'(\lambda)$ coïncide avec la dérivée au sens usuel.

La notion de dérivée pourrait être introduite d'une manière plus générale (comme dans le calcul opérationnel d'intervalle infini), mais nous n'aurons pas besoin, dans la suite, de cette généralisation.

La dérivation des fonctions opérationnelles jouit des propriétés ordinaires:

$$[f(\lambda)+g(\lambda)]'=f'(\lambda)+g'(\lambda),$$
$$[f(\lambda)-g(\lambda)]'=f'(\lambda)-g'(\lambda),$$
$$[f(\lambda)g(\lambda)]'=f'(\lambda)g(\lambda)+f(\lambda)g'(\lambda),$$
$$[af(\lambda)]'=af'(\lambda),$$
$$[f(\varphi(\lambda))]'=f'(\varphi(\lambda))\varphi'(\lambda);$$

ici $\varphi(\lambda)$ est une fonction à valeurs numériques. De plus, si $f'(\lambda)=0$ dans un intervalle $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$, la valeur $f(\lambda)$ est la même dans cet intervalle (la fonction est constante).

La définition de la dérivée s'étend facilement à l'intervalle infini de λ: on dit que *$f'(\lambda)$ est la dérivée de $f(\lambda)$ dans un intervalle infini* lorsqu'elle l'est dans tout intervalle fini y contenu.

7. Supposons qu'une fonction opérationnelle $x(\lambda)$ satisfasse dans l'intervalle $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$ à l'équation

$$ax'(\lambda)=bx(\lambda), \tag{6}$$

où a et b sont des opérateurs dont l'un, au moins, n'est pas un diviseur de zéro. On peut admettre, sans restreindre la généralité, que

$$a=p/r,\quad b=q/r\quad\text{et}\quad x(\lambda)=y(\lambda)/r,$$

où $p,q\epsilon C_T$ $(p\epsilon C_T^*$ ou $q\epsilon C_T^*)$, $y(\lambda)=\{y(\lambda,t)\}\epsilon C_T$ $(0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0)$ et $r\epsilon C_T^*$. En multipliant (6) par r et revenant à la notation habituelle, on peut écrire

$$\int_0^t p(t-\tau)y_\lambda(\lambda,\tau)\,d\tau=\int_0^t q(t-\tau)y(\lambda,\tau)\,d\tau \tag{7}$$

dans le rectangle

$$0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0,\quad 0\leqslant t<T. \tag{8}$$

Ainsi l'étude de l'équation opérationnelle (6) se réduit à l'équation à dérivées partielles (7). Il est important d'avoir quelques théorèmes d'unicité, concernant ces équations.

Supposons que $x(0)=0$ ou, ce qui revient au même,

$$y(0,t)=0 \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t<T. \tag{9}$$

Si les coefficients a,b ou p,q satisfont à certaines conditions, il s'ensuit que $x(\lambda)=0$ dans l'intervalle $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$ tout entier et $y(\lambda,t)=0$ dans le rectangle (8) (cf. [7]). Mais généralement on peut affirmer seulement que $y(\lambda,t)=0$ dans le triangle (cf. [1])

$$0\leqslant\frac{\lambda}{\lambda_0}\leqslant\frac{\lambda}{\lambda_0}+\frac{t}{T}\leqslant 1; \tag{10}$$

ceci n'implique évidemment pas $x(\lambda)=0$ pour $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$.

Il s'ensuit qu'il n'existe pas, pour l'équation (6), de théorème d'unicité analogue à celui dans la théorie des opérateurs d'intervalle infini. On a cependant le théorème d'unicité suivant:

Etant donnée une condition initiale $x(0)=k$, il existe au plus une fonction opérationnelle $x(\lambda)$ satisfaisant à cette condition et à l'équation (6) *dans l'intervalle $0\leqslant\lambda<\infty$ tout entier.*

En effet, supposons qu'il existe deux telles fonctions $x_1(\lambda)$ et $x_2(\lambda)$. Alors leur différence $x_0(\lambda)=x_1(\lambda)-x_2(\lambda)$ satisfait à la même équation (6) avec la condition initiale $x_0(0)=0$. Il existe, pour tout intervalle $[0,\lambda_0]$, un opérateur $r_{\lambda_0}\neq 0$ tel que la fonction $r_{\lambda_0}x_0(\lambda)=y(\lambda,\lambda_0)=y(\lambda,\lambda_0,t)$ est paramétrique dans le rectangle (8) et y satisfait à l'équation (7) avec la condition initiale (9). Elle est donc nulle dans le triangle (10). Fixons arbitrairement un nombre $\mu>0$. Si $\lambda_0>\mu$, on a $y(\mu,\lambda_0,t)=0$ pour $0\leqslant t\leqslant\alpha=\lambda_0 T/(\lambda_0-\mu)$ et, par conséquent, $x_0(\mu)=h^\alpha a$, où l'opérateur a peut être un diviseur de zéro. Posons $x_0(\lambda)=h^\beta b$, où b n'est pas un diviseur de zéro. De l'égalité $h^\alpha a=h^\beta b$ on tire $\alpha\leqslant\beta$. Si $\lambda_0\to\infty$, α s'approche de T. On a donc $\beta=T$ et, par conséquent $x_0(\mu)=0$. Or, le nombre μ peut être fixé arbitrairement, ce qui entraîne $x_1(\lambda)-x_2(\lambda)=0$ pour tout $\lambda>0$, d'où le théorème.

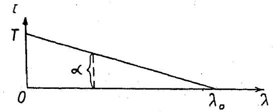

Fig. 1

8. Étant donné un opérateur w, désignons par $e^{\lambda w}$ la fonction opérationnelle qui satisfait, pour $0\leqslant\lambda<\infty$, à l'équation différentielle

$$x'(\lambda)=wx(\lambda) \tag{11}$$

avec la condition initiale $x(0)=1$.

Ainsi les fonctions exponentielles se trouvent définies, tout d'abord, pour les valeurs non-négatives de l'argument λ. Le prolongement de ces

fonctions pour les valeurs négatives

$$e^{-\lambda w}=e^{1/\lambda w} \qquad (\lambda>0) \tag{12}$$

est possible lorsque $e^{\lambda w}$ n'est pas un diviseur de zéro.

En particulier, la fonction h^λ satisfait à l'équation $x'(\lambda)=-sx(\lambda)$ avec la condition initiale $x(0)=h^0=1$. On a donc $h^\lambda=e^{-s\lambda}$ $(\lambda\geqslant 0)$; comme les opérateurs h^λ sont des diviseurs de zéro, la fonction $e^{-s\lambda}$ ne se laisse pas prolonger pour les valeurs négatives de λ.

La fonction

$$x(\lambda)=\begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \lambda=0, \\ \left\{\dfrac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\dfrac{\lambda^2}{4t}\right\} & \text{pour} \quad \lambda>0, \end{cases}$$

satisfait pour $\lambda\geqslant 0$ à l'équation $x'(\lambda)=-\sqrt{s}\,x(\lambda)$, où $1/\sqrt{s}=\{1/\sqrt{\pi t}\}$. On a donc $x(\lambda)=e^{-\sqrt{s}\lambda}$. Les valeurs de cette fonction ne sont pas des diviseurs de zéro, elle se laisse donc prolonger aux valeurs négatives de λ au moyen de l'équation (12).

9. Les deux fonctions exponentielles précédentes sont des cas particuliers des fonctions du type $e^{-s^\alpha\lambda}$, où $1/s^\alpha=\{t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)\}$ $(\alpha>0)$. La théorie des fonctions $e^{-s^\alpha\lambda}$ est analogue à celle pour les opérateurs d'intervalle fini, exception faite pour la fonction $e^{-s\lambda}$, qui n'existe pas pour λ négatif.

Si $\alpha<1$, la fonction $e^{-s^\alpha\lambda}$ existe pour tout λ complexe; si $\alpha=1$, elle n'existe que pour $\lambda\geqslant 0$; si $\alpha>1$, elle n'existe pas du tout.

(On dit généralement que $e^{w\lambda}$ existe pour les valeurs complexes de λ lorsque la fonction $e^{w\omega\lambda}$ existe pour $\lambda\geqslant 0$, quel que soit le nombre complexe $\omega\neq 0$).

De plus, si $\alpha<1$, elle se laisse représenter dans la forme d'une série de puissances

$$e^{-s^\alpha\lambda}=1-\frac{s^\alpha}{1!}\lambda+\frac{s^{2\alpha}}{2!}\lambda^2+\ldots$$

convergente pour tout λ complexe. (Une série d'opérateurs $a_1+a_2+\ldots$ est convergente lorsqu'il existe un opérateur q non diviseur de 0 tel que $b_n=q(a_1+\ldots+a_n)\in C_T$ et b_n converge uniformément dans tout intervalle $0\leqslant t\leqslant t_0<T$). Si $0<\alpha<1$ et $\lambda>0$, on a la forme intégrale

$$e^{-s^\alpha\lambda}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\exp(zt-z^\alpha\lambda)\,dz,$$

où l'intégrale est prise le long de l'axe imaginaire de z.

Toutes les démonstrations sont analogues à celles dans le cas du calcul opérationnel d'intervalle infini (cf. [3]) et il n'y a pas besoin de les reproduire ici. Remarquons seulement que la démonstration de la non-existence de $e^{-s^{\alpha}\lambda}$ pour $\alpha \geqslant 1$ et λ imaginaire nécessite la notion d'intégrale d'une fonction opérationnelle, qui se laisse introduire d'une manière tout à fait analogue au cas des opérateurs d'intervalle infini.

10. Soit $w = q/p$, où $p \in C_T^*$ et $q \in C_T$, et soit λ_0 un nombre fixé arbitrairement. On a le critère général suivant pour l'existence de $e^{w\lambda}$:

Afin que la fonction exponentielle $e^{w\lambda}$ existe pour $\lambda \geqslant 0$, il faut et il suffit que l'équation (7) *ait une solution $y(\lambda, t)$ (pourvue de dérivée partielle $y_\lambda(\lambda, t)$ continue) telle que $y(0, t)$ ne s'annule pas identiquement au voisinage de $t = 0$.*

Nécessité. Si $e^{w\lambda}$ existe, elle peut être représentée, pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$, dans la forme $y(\lambda)/r$, où $r \in C_T^*$ et $y(\lambda) = \{y(\lambda, t)\} \in C_T$. La fonction paramétrique $y(\lambda)$ satisfait à l'équation (7). De plus, on a $y(0)/r = 1$, ce qui entraîne que $y(0, t) = r(t)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de $t = 0$.

Suffisance. Si $y(\lambda, t)$ est une solution de (7) telle que $y(0, t)$ ne s'annule pas identiquement au voisinage de $t = 0$, la fonction opérationnelle $x(\lambda) = y(\lambda)/y(0)$ satisfait, dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$, à l'équation (11) avec la condition initiale $x(0) = 1$. Si nous posons par récurrence

$$x(\lambda) = x(n\lambda_0) \cdot x(\lambda - n\lambda_0) \quad \text{pour} \quad n\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant (n+1)\lambda_0 \text{ et } n = 1, 2, \ldots,$$

la fonction $x(\lambda)$ sera définie dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda < \infty$ tout entier; elle sera donc la fonction exponentielle $e^{w\lambda}$.

Le critère précédent permet de démontrer le théorème suivant:

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ n nombres réels distincts et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ n nombres complexes non nuls. Pour que la fonction exponentielle

$$\exp[(\beta_1 s^{\alpha_1} + \ldots + \beta_n s^{\alpha_n})\lambda]$$

existe pour λ positif, il faut et il suffit qu'il existe pour λ positif chacune des fonctions exponentielles

$$\exp(\beta_1 s^{\alpha_1}), \ \ldots, \ \exp(\beta_n s^{\alpha_n}).$$

Pour les opérateurs d'intervalle infini, le théorème analogue a été démontré dans un travail antérieur ([3], p. 222). Cette démonstration n'exige à présent qu'une petite précaution. A savoir, il faut choisir les nombres $\delta_1, \ldots, \delta_n$ qui interviennent dans la démonstration de manière qu'ils soient tous inférieurs à 1. De plus, il faut remplacer le domaine (25) du travail cité par $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$, $0 \leqslant t < T$. Alors chacune des fonctions $x(\lambda, t/\delta_i)$ existera dans ce domaine, ce qui permettra d'achever la démonstration sans changer sa suite.

11. Considérons encore l'équation (11) dans un intervalle fini $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ quelconque. Si la fonction $e^{w\lambda}$ $(\lambda \geqslant 0)$ existe, toute fonction de la forme $ce^{w(\lambda - \lambda_1)}$ est évidemment une solution de (11) dans l'intervalle $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$. On a le théorème inverse:

Si la fonction $e^{w\lambda}$ existe pour $\lambda \geqslant 0$, toute solution de (11) *dans l'intervalle $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ est de la forme $x(\lambda) = ce^{w(\lambda - \lambda_0)}$, où c est un opérateur.*

En effet, si $x(\lambda)$ est une solution de (11) dans $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, la fonction $x_0(\lambda) = x(\lambda_1 + \lambda)$ est une solution de (11) dans $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$, où $\lambda_0 = \lambda_2 - \lambda_1$. Posons $x_0(\lambda) = x_0(\lambda_0) e^{w(\lambda - \lambda_0)}$ pour $\lambda_0 < \lambda < \infty$. Alors la fonction $x_0(\lambda)$ satisfait à l'équation (11) dans l'intervalle infini $0 \leqslant \lambda < \infty$, ce qui entraîne $x_0(\lambda) = x_0(0) e^{w\lambda}$, d'après le théorème d'unicité du paragraphe 7. Donc $x(\lambda) = x(\lambda_1) e^{w(\lambda - \lambda_1)}$.

Ce théorème a une conséquence intéressante pour l'équation (7). Il s'ensuit que s'il existe une solution $x(\lambda, t)$ de cette équation satisfaisant à la condition initiale

$$x(0, t) = f(t), \tag{13}$$

où $f(t)$ est une fonction donnée, cette solution est unique. L'existence de $e^{w\lambda}$ assure donc l'unicité de la solution de (7) lorsque la condition (13) est donnée. D'après le critère du paragraphe 10, on a le théorème suivant:

L'existence d'une solution $y(\lambda, t)$ de (7) *telle que $y(0, t)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de $t = 0$, assure l'unicité de la solution de* (7), *quelle que soit la condition initiale* (13).

Remarquons encore que le théorème du début de ce paragraphe est équivalent au théorème suivant:

Si la fonction $e^{-w\lambda}$ existe pour $\lambda \geqslant 0$, toute solution de (11) *dans l'intervalle $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ est de la forme $x(\lambda) = ce^{-w(\lambda_2 - \lambda)}$, où c est un opérateur.*

12. L'opérateur w sera dit *logarithme droit* lorsque la fonction exponentielle $e^{w\lambda}$ existe pour λ positif et n'existe pas pour λ négatif. Il sera dit *logarithme gauche* lorsque la fonction $e^{w\lambda}$ existe pour λ négatif et n'existe pas pour λ positif, ou, ce qui revient au même, lorsque l'opérateur $-w$ est un logarithme droit. Si enfin la fonction $e^{w\lambda}$ existe pour tout λ réel, l'opérateur w sera dit *logarithme bilatéral*.

Par exemple, $\sqrt{s}$ est un logarithme bilatéral; s est un logarithme gauche, $-s$ est un logarithme droit.

Supposons, dans la suite de ce paragraphe, que w soit un logarithme droit.

Alors $e^{w\lambda}$ est pour tout $\lambda>0$ un diviseur de zéro. En effet, si pour un $\lambda_0>0$, l'opérateur $e^{w\lambda_0}$ n'était pas un diviseur de zéro, on pourrait poser

$$e^{-w\lambda}=\frac{1}{e^{wn\lambda_0}}\,e^{w(\lambda-n\lambda_0)}\quad \text{pour}\quad (n-1)\lambda_0\leqslant\lambda<n\lambda_0,\quad n=1,2,\ldots$$

La fonction $e^{w\lambda}$ serait donc définie pour les valeurs négatives de λ.

Posons $e^{w\lambda}=h^{\varrho(\lambda)}\cdot r(\lambda)$, où $\varrho(\lambda)$ est une fonction numérique telle que $0<\varrho(\lambda)\leqslant T$ pour $\lambda>0$ et $r(\lambda)$ une fonction opérationnelle dont les valeurs ne sont pas des diviseurs de zéro. On a $\varrho(0)=0$. Etant donné un nombre positif λ_1, on peut multiplier $e^{w\lambda}$ par un opérateur choisi de manière à obtenir une fonction paramétrique continue dans le rectangle $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1$, $0\leqslant t<T$. Cette fonction est nulle dans le domaine $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1$, $0\leqslant t<\varrho(\lambda)$ et, pour λ fixé, non identiquement nulle au voisinage droit de $t=\varrho(\lambda)$. Il s'ensuit que $\varrho(\lambda)$ est une fonction continue pour $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1$. L'intervalle $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1$ pouvant être choisi arbitrairement, la fonction $\varrho(\lambda)$ est continue dans l'intervalle $0\leqslant\lambda<\infty$.

D'autre part, toute fonction exponentielle $e^{w\lambda}$ satisfait à l'équation fonctionnelle $e^{w\lambda}\cdot e^{w\mu}=e^{w(\lambda+\mu)}\,(0\leqslant\lambda\leqslant\mu)$, ce qui se démontre comme dans le cas des opérateurs d'intervalle infini. Donc $h^{\varrho(\lambda)}r(\lambda)\cdot h^{\varrho(\mu)}r(\mu)=$ $=h^{\varrho(\lambda+\mu)}r(\lambda+\mu)$ pour $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$, d'où $\varrho(\lambda)+\varrho(\mu)=\varrho(\lambda+\mu)$ pour $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$ et $\varrho(\lambda+\mu)\leqslant T$. Il s'ensuit qu'il existe un nombre positif a tel que $\varrho(\lambda)=a\lambda$ pour $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0=T/a$. On a donc $e^{w\lambda}=h^{a\lambda}r(\lambda)$ pour $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$, où les valeurs de $r(\lambda)$ ne sont pas des diviseurs de zéro et le nombre $a>0$ ne dépend que de w.

Le nombre a ainsi déterminé sera dit *nombre caractéristique* du logarithme droit w.

En vertu du théorème du paragraphe 11, si w est un logarithme droit et $a>0$ son nombre caractéristique, toute solution de l'équation (11) est de la forme $ch^{a(\lambda-\lambda_1)}r(\lambda-\lambda_1)$. Par des raisons de symétrie, toute solution de l'équation

$$x'(\lambda)=-wx(\lambda)\qquad(\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2)\tag{14}$$

est de la forme $ch^{a(\lambda_2-\lambda)}r(\lambda_2-\lambda)$. Il s'ensuit que pour un logarithme droit avec le nombre caractéristique $a>0$, la solution $x(\lambda)$ de (14) n'est pas déterminée univoquement par sa valeur au point $\lambda=\lambda_1$.

En interprétant cette proposition pour l'équation (7), on dira que *si q/p est un logarithme gauche, la condition* (13) *n'assure pas l'unicité de la solution $x(\lambda,t)$.*

Pour l'équation (11), les résultats de ce paragraphe peuvent être résumés de la manière suivante, pas très précise mais suggestive:

Le logarithme droit assure l'unicité droite mais n'assure pas l'unicité gauche. Le logarithme gauche assure l'unicité gauche, mais n'assure pas l'unicité droite. Le logarithme bilatéral assure l'unicité bilatérale.

13. Soit $0<\overline{T}<T$. On peut établir un homomorphisme entre les opérateurs de l'intervalle $0\leqslant t<T$ et une classe d'opérateurs de l'intervalle $0\leqslant t<\overline{T}$. A savoir, faisons correspondre à tout opérateur $a=p/q\in A_T$ $(p,q\in C_T)$ l'opérateur $\bar a=\bar p/\bar q\in A_{\overline{T}}$ $(\bar p,\bar q\in C_{\overline{T}})$ tel que les valeurs des fonctions p,q et $\bar p,\bar q$ coïncident respectivement dans l'intervalle $0\leqslant t<\overline{T}$. L'opérateur $\bar a$ sera dit *l'opérateur partiel* de a.

Il est évident que l'opérateur partiel $\bar a$ est déterminé univoquement par a et ne dépend pas de la représentation $a=p/q$. D'autre part, différents opérateurs se rattachent au même opérateur partiel. Il est aussi évident que si $\bar a$ et $\bar b$ sont des opérateurs partiels de a et b, $\bar a+\bar b$ et $\bar a\bar b$ sont des opérateurs partiels de $a+b$ et ab. La correspondance établie est donc un homomorphisme par rapport à l'addition et la multiplication.

De plus, si une fonction opérationnelle $x(\lambda)$ a la dérivée continue $x'(\lambda)$, la fonction partielle $\bar x(\lambda)$ a la dérivée continue $\bar x'(\lambda)$ dont les valeurs sont des opérateurs partiels correspondant aux valeurs de $x'(\lambda)$.

La correspondance entre les opérateurs partiels de a et les opérateurs $h^\alpha a$, où $\alpha=T-\overline{T}$, est biunivoque. En effet, étant donné un opérateur $h^\alpha a$, on peut le représenter, de différentes manières, dans la forme $h^\alpha p/q$; mais si $h^\alpha p_1/q_1=h^\alpha p_2/q_2$, on a $h^\alpha p_1q_2=h^\alpha p_2q_1$. Par conséquent $\bar p_1\bar q_2=\bar p_2\bar q_1$, ce qui entraîne $\bar p_1/\bar q_1=\bar p_2/\bar q_2$ et l'unicité de l'opérateur partiel $\bar a$. Réciproquement, étant donné un opérateur partiel $\bar a$, on peut tirer une conclusion inverse, ce qui montre l'unicité de l'opérateur correspondant $h^\alpha a$.

Si l'opérateur partiel a est nul, l'opérateur correspondant $h^\alpha a$ est nul. Il en résulte la proposition suivante, qui nous sera utile dans la suite:

Si, pour un opérateur a, l'opérateur partiel $\bar a$ est nul, quel que soit l'intervalle partiel $0\leqslant t<\overline{T}$, on a $a=0$.

14. Appelons l'opérateur w *logarithme* lorsqu'il est un logarithme droit, gauche ou bilatéral.

Si w est un logarithme droit, on peut écrire, pour $\lambda\geqslant 0$

$$e^{w\lambda}=h^{a\lambda}r(\lambda),\tag{15}$$

où les valeurs de $r(\lambda)$ ne sont pas des diviseurs de zéro. Le nombre caractéristique a est défini par l'équation (15) univoquement.

Si w est un logarithme gauche, $-w$ est un logarithme droit et l'on a pour $\lambda\geqslant 0$

$$e^{-w\lambda}=h^{a_1\lambda}r_1(\lambda),$$

où les valeurs de $r_1(\lambda)$ ne sont pas des diviseurs de zéro. Par conséquent, on a (15) pour $\lambda\leqslant 0$, $a=-a_1$ et $r(\lambda)=r_1(-\lambda)$. Définissons donc, pour tout logarithme gauche, son *nombre caractéristique* a comme le nombre (unique), satisfaisant pour $\lambda\leqslant 0$ à (15), où les valeurs de $r(\lambda)$ ne sont pas des diviseurs de zéro.

Attribuons enfin, à tout logarithme bilatéral w, le nombre 0 comme son nombre caractéristique.

Ainsi, à tout logarithme w est attribué un nombre caractéristique a. Il est positif lorsque le logarithme est droit, négatif lorsque le logarithme est gauche et nul lorsque le logarithme est bilatéral.

Si a est le nombre caractéristique de w, $-a$ est le nombre caractéristique de $-w$.

Le nombre caractéristique de l'opérateur $-as$ est a, quel que soit le nombre réel a.

Si w est un logarithme bilatéral, l'opérateur $w-as$ est un logarithme avec le nombre caractéristique a.

En effet, c'est trivial pour $a=0$. Si $a>0$, on a, pour $\lambda>0$, $e^{(w-as)\lambda}=h^{a\lambda}e^{w\lambda}$, où $e^{w\lambda}$ n'est pas un diviseur de zéro. La démonstration pour $a<0$ est analogue.

Il est évident que si w est un logarithme avec le nombre caractéristique a, l'opérateur partiel $\overline{w}$ est encore un logarithme avec le même nombre caractéristique a.

On a le théorème suivant:

Si w est un logarithme et a son nombre caractéristique, l'opérateur partiel de w est de la forme $\overline{w}=\overline{w}_0-a\overline{s}$, où $\overline{w}_0$ est un logarithme bilatéral et $\overline{s}$ l'opérateur différentiel (de l'intervalle $0\leqslant t<\overline{T}$).

C'est trivial pour $a=0$. Supposons que $a>0$. Soit $\{y(\lambda,t)\}=y(\lambda)$ une fonction paramétrique ayant la dérivée partielle $\{y_\lambda(\lambda,t)\}$ continue dans le rectangle (8), où $\lambda_0=T/a$, satisfaisant à l'équation (7), et telle que $y(0,t)$ n'est pas identiquement nul au voisinage droit de $t=0$. L'existence d'une telle fonction est assurée par le critère du paragraphe 10. On peut supposer, de plus, que $\{y(\lambda,t)\}$ est continûment dérivable par rapport à chacune des variables λ et t, car on peut, s'il y a besoin, multiplier $y(\lambda)$ par l.

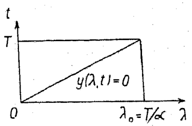

Fig. 2

On a $y(\lambda)=y(0)e^{w\lambda}=y(0)h^{a\lambda}r(\lambda)$, où les valeurs de $r(\lambda)$ ne sont pas des diviseurs de zéro. Il s'ensuit que la fonction $y(\lambda,t)$ est nulle dans le triangle $0\leqslant t\leqslant a\lambda<T$ et que, λ étant fixé dans l'intervalle $(0,\lambda_0)$, la fonction $y(\lambda,t)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage droit de $t=a\lambda$.

La fonction $z(\lambda,t)=y(\lambda,a\lambda+t)$ satisfait, dans le triangle

(16) $$0\leqslant t\leqslant T-a\lambda<T,$$

à l'équation intégro-différentielle

(17) $$\int_0^t p(t-\tau)z_\lambda(\lambda,\tau)\,d\tau=\int_0^t q(t-\tau)z(\lambda,\tau)\,d\tau+a\int_0^t p(t-\tau)z_t(\lambda,\tau)\,d\tau.$$

De plus, λ étant fixé dans l'intervalle $(0,\lambda_0)$, la fonction $z(\lambda,t)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage droit de $t=0$.

Soit $0<\overline{T}<T$ et $\lambda_1=(T-\overline{T})/a$. Le rectangle $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1$, $0\leqslant t<\overline{T}$, est contenu dans le triangle (16), l'équation (17) est donc satisfaite, en particulier, dans le rectangle.

En introduisant les opérateurs partiels, nous pouvons écrire cette équation dans chacune des trois formes suivantes:

$$\overline{p}\overline{z}'(\lambda)=(\overline{q}+a\overline{p}\overline{s})\overline{z}(\lambda),$$
$$\overline{l}\overline{p}\overline{z}'(\lambda)=(\overline{l}\overline{q}+a\overline{p})\overline{z}(\lambda),$$
$$\overline{z}'(\lambda)=(\overline{w}+a\overline{s})\overline{z}(\lambda).$$

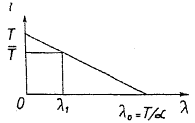

Fig. 3

Les coefficients de la seconde de ces équations sont des fonctions continues. En vertu du critère du paragraphe 10, il existe, pour $\lambda\geqslant 0$ la fonction exponentielle $e^{(\overline{w}+a\overline{s})\lambda}$, car la fonction $z(0,t)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de $t=0$. Or, il en est de même de la fonction $x(\lambda_1,t)$, donc, par symétrie, la fonction exponentielle existe pour $\lambda\leqslant 0$. On voit ainsi que l'opérateur $\overline{w}_0=\overline{w}+a\overline{s}$ est un logarithme bilatéral, ce qui achève la démonstration.

Du théorème précédent, nous allons tirer quelques corollaires.

Si w_1,w_2 et w_1+w_2 sont des logarithmes et a_1,a_2 sont des nombres caractéristiques de w_1,w_2 respectivement, la somme a_1+a_2 est le nombre caractéristique de w_1+w_2.

Ceci est presque trivial lorsque $a_1=a_2=0$, car la somme de deux logarithmes bilatéraux est un logarithme bilatéral. En effet, si les fonctions exponentielles $e^{w_1\lambda}$ et $e^{w_2\lambda}$ existent pour tout λ réel, on vérifie sans peine que la fonction $x(\lambda)=e^{w_1\lambda}\cdot e^{w_2\lambda}$ satisfait, pour tout λ réel, à l'équation $x'(\lambda)=(w_1+w_2)x(\lambda)$ avec la condition initiale $x(0)=1$, on a donc $x(\lambda)=e^{(w_1+w_2)\lambda}$ et w_1+w_2 est un logarithme bilatéral.

Si a_1 et a_2 sont arbitraires, les opérateurs $\overline{w}_1-a_1\overline{s}$ et $\overline{w}_2-a_2\overline{s}$ sont des logarithmes bilatéraux. Leur somme $\overline{w}_1+\overline{w}_2-(a_1+a_2)\overline{s}$ est encore un logarithme bilatéral. Donc a_1+a_2 est le nombre caractéristique de $\overline{w}_1+\overline{w}_2$ et, par conséquent, de w_1+w_2.

Si w_1 et w_2 sont des logarithmes, l'opérateur partiel $\overline{w}_1+\overline{w}_2$ est un logarithme.

En effet, si a_1 et a_2 sont des nombres caractéristiques de w_1 et w_2, l'opérateur $\overline{w}_1+\overline{w}_2-(a_1+a_2)\overline{s}$ est un logarithme bilatéral et $\overline{w}_1+\overline{w}_2$ est un logarithme.

Si w est un logarithme, l'unicité bilatérale pour l'équation

$$x'(\lambda)=(w+as)x(\lambda)$$

a lieu lorsque a est le nombre caractéristique de w et seulement dans ce cas.

En effet, $\overline{w}+a\overline{s}$ est un logarithme bilatéral, l'unicité bilatérale a donc lieu pour l'équation $\overline{x}'(\lambda)=(\overline{w}+a\overline{s})\overline{x}(\lambda)$, donc, si $x(0)=0$, on a $x(0)=0$ et $x(\lambda)=0$, quel que soit l'intervalle considéré, $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant 0$ ou $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$. Comme l'intervalle $0\leqslant t<\overline{T}$ $(\overline{T}<T)$, relatif aux opérateurs partiels, peut être choisi arbitrairement, l'égalité $\overline{x}(\lambda)=0$ entraîne $x(\lambda)=0$, ce qui prouve la proposition.

Nous énoncerons encore deux théorèmes qui nous seront utiles dans la suite.

Si l'équation (11) *a, dans un intervalle $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$, une solution $x(\lambda)$ non identiquement nulle, l'opérateur partiel $\overline{w}$, relatif à un intervalle $0\leqslant t<\overline{T}$ convenablement choisi, est un logarithme.*

En effet, soit β le plus grand nombre tel que $x(\lambda)=h^\beta y(\lambda)$. On a $0\leqslant\beta<T$. Posons $\overline{T}=T-\beta$ et considérons la fonction $\overline{y}(\lambda)$ dont les valeurs sont des opérateurs partiels de $y(\lambda)$. Il existe au moins un point de l'intervalle $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$ où $\overline{y}(\lambda)$ n'est pas un diviseur de zéro. De plus, cette fonction satisfait à l'équation $\overline{y}'(\lambda)=\overline{w}\overline{y}(\lambda)$. Il existe donc la fonction exponentielle $e^{\overline{w}}$ (pour $\lambda\geqslant 0$ ou pour $\lambda\leqslant 0$), ce qui achève la démonstration.

Si $w=w_1+w_2$, w_1 est un logarithme et l'équation

$$x'(\lambda)=w_2x(\lambda) \tag{18}$$

n'a, dans l'intervalle $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$, que la solution identiquement nulle, alors il en est de même de l'équation (11).

Supposons, par contre, qu'il existe une solution de (11) qui n'est pas identiquement nulle. Alors l'opérateur partiel $\overline{w}$, relatif à un intervalle $0\leqslant t<\overline{T}$ convenablement choisi, est un logarithme. Soit a son nombre caractéristique. Si l'on raccourcit encore l'intervalle $0\leqslant t<\overline{T}$, l'opérateur $\overline{w}-a\overline{s}$ sera un logarithme bilatéral.

Soit a_1 le nombre caractéristique du logarithme w_1. L'opérateur partiel $\overline{w}_1-a_1\overline{s}$ est un logarithme bilatéral. On peut supposer, sans restreindre la généralité, que les deux opérateurs partiels $\overline{w}-a\overline{s}$ et $\overline{w}_1-a_1\overline{s}$ se rattachent au même intervalle partiel $0\leqslant t<\overline{T}$. La différence

$$(\overline{w}-a\overline{s})(\overline{w}_1-a_1\overline{s})=\overline{w}_2-(a-a_1)\overline{s}$$

est un logarithme bilatéral. Par conséquent, l'opérateur $\overline{w}_2$ est un logarithme et il existe des solutions non identiquement nulles de l'équation $\overline{x}'(\lambda)=\overline{w}_2\overline{x}(\lambda)$ et il en est de même de l'équation (18). Cette contradiction achève la démonstration.

15. L'équation à dérivées partielles

$$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}a_{\mu\nu}x_{\lambda^\mu t^\nu}(\lambda,t)=\varphi(\lambda,t), \tag{19}$$

où $a_{\mu\nu}$ sont des nombres, considérée dans le rectangle $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$, $0\leqslant t<T$, se laisse écrire, en symbole du calcul opérationnel,

$$a_mx^{(m)}+\ldots+a_0x=f(\lambda), \tag{20}$$

où

$$a_\mu=a_{\mu n}s^n+\ldots+a_{\mu 0}\qquad(\mu=0,\ldots,m),$$

$$f(\lambda)=\{\varphi(\lambda,t)\}+\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1}a_{\mu\nu}s^{\nu-\varkappa-1}x_{\lambda^\mu t^\varkappa}(\lambda,0). \tag{21}$$

Comme dans le cas des opérateurs d'intervalle infini, le polynôme caractéristique de (21), $a_mw^m+\ldots+a_0$, se décompose en facteurs linéaires

$$a_m\prod_{\mu=1}^{m}(w-w_\mu),$$

où les opérateurs w_μ font parti d'un corps K_0 immergé dans l'anneau A_T et sont de la forme

$$\gamma+g+\sum_{\varkappa=1}^{p}\gamma_\varkappa s^{a_\varkappa}, \tag{22}$$

γ et $\gamma_\varkappa$ étant des nombres complexes, $g=\{g(t)\}$ une fonction continue pour $0\leqslant t<T$ et telle que $|g(t)|<t\varepsilon$ $(\varepsilon<1)$ au voisinage de $t=0$, a_ν des nombres positifs.

Les opérateurs γ, g et $\gamma_\varkappa s^{a_\varkappa}$, où $a_\varkappa<1$, sont des logarithmes bilatéraux. L'opérateur $\gamma_\varkappa s$, où $\gamma_\varkappa>0$, est un logarithme gauche; lorsque $\gamma_\varkappa<0$, il est un logarithme droit. Dans d'autres cas, les opérateurs $\gamma_\varkappa s^{a_\varkappa}$ $(\gamma_\varkappa\neq 0)$ ne sont pas des logarithmes et l'équation $x'(\lambda)=\gamma_\varkappa s^{a_\varkappa}x(\lambda)$ n'a d'autres solutions, sauf $x(\lambda)=0$, ce qui se démontre de la même manière que dans le cas des opérateurs d'intervalle infini ([3], p. 215-221).

L'opérateur (22) est un logarithme bilatéral, lorsque tous les exposants $\alpha_\varkappa$ sont <1. Il est un logarithme droit ou gauche lorsque le plus grand des nombres $\alpha_\varkappa$ dans (22) est 1 et son coefficient est négatif ou positif respectivement. Dans les autres cas l'opérateur w de la forme (22) n'est pas un logarithme et la fonction identiquement nulle est l'unique solution de l'équation $x'(\lambda)=wx(\lambda)$. Cette dernière proposition résulte du théorème à la fin du paragraphe 14.

16. Les fonctions opérationnelles $x_1(\lambda),\ldots,x_m(\lambda)$ sont dites *linéairement indépendantes* dans un intervalle J, si l'égalité $c_1x_1(\lambda)+\ldots+c_mx_m(\lambda)=0$ dans J entraîne $c_1=\ldots=c_m=0$.

Nous allons étudier le nombre de solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle homogène

$$a_m x^{(m)}(\lambda)+\ldots+a_0x(\lambda)=0 \tag{23}$$

dont les coefficients a_μ appartiennent à un corps K faisant partie de l'anneau A_T.

On a la proposition suivante:

Si l'équation caractéristique

$$a_m w^m+\ldots+a_0=0 \tag{24}$$

a m racines dont k sont des logarithmes, l'équation (23) *a, dans tout intervalle fini $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$, au moins k solutions linéairement indépendantes.*

Cette proposition peut être complétée de la manière suivante. Désignons par

$b_1,\ldots,b_p$ les racines différentes qui sont des logarithmes bilatéraux,

$d_1,\ldots,d_q$ les racines différentes qui sont des logarithmes droits,

$g_1,\ldots,g_r$ les racines différentes qui sont des logarithmes gauches,

et respectivement par

$$\beta_1,\ldots,\beta_p,$$
$$\delta_1,\ldots,\delta_q,$$
$$\gamma_1,\ldots,\gamma_r$$

leurs ordres de multiplicité. On a évidemment

$$(\beta_1+\ldots+\beta_p)+(\delta_1+\ldots+\delta_q)+(\gamma_1+\ldots+\gamma_r)=k.$$

Les nombres p, q ou r peuvent être nuls, en particulier. La somme correspondante est alors à remplacer par 0.

Les fonctions

$$\lambda^\nu e^{b_\mu\lambda} \qquad (\mu=1,\ldots,p;\ \nu=0,\ldots,\beta_{\mu-1}), \tag{25}$$

$$\lambda^\nu e^{d_\mu(\lambda-\lambda_1)} \qquad (\mu=1,\ldots,q;\ \nu=0,\ldots,\delta_{\mu-1}), \tag{26}$$

$$\lambda^\nu e^{-g_\mu(\lambda_2-\lambda)} \qquad (\mu=1,\ldots,r;\ \nu=0,\ldots,\gamma_{\mu-1}) \tag{27}$$

sont des solutions de (23) *linéairement indépendantes dans l'intervalle $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$.*

La démonstration que (25), (26) et (27) sont des solutions de (23) est la même que dans le cas des opérateurs d'intervalle infini.

Pour démontrer leur indépendance linéaire, supposons, tout d'abord, que toutes les racines-logarithmes sont différentes, ou, ce qui revient au même, que leurs ordres de multiplicité sont égaux à 1; on a alors $p+q+r=k$.

Admettons qu'une fonction de la forme

$$x(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{p}c_\nu e^{b_\nu\lambda}+\sum_{\nu=1}^{q}\hat{c}_\nu e^{d_\nu(\lambda-\lambda_1)}+\sum_{\nu=1}^{r}\acute{c}_\nu e^{-g_\nu(\lambda_2-\lambda)}, \tag{28}$$

où c_ν, $\hat{c}_\nu$ et $\acute{c}_\nu$ sont des opérateurs, est nulle pour $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$. On a, en particulier,

$$\begin{aligned} x^{(\mu)}(\lambda_1)&=0 \quad \text{pour} \quad \mu=1,\ldots,p+q,\\ x^{(\mu)}(\lambda_2)&=0 \quad \text{pour} \quad \mu=1,\ldots,r. \end{aligned} \tag{29}$$

Le déterminant de ces k équations est

(30)

$$\begin{vmatrix} e^{b_1\lambda_1}\ldots e^{b_p\lambda_1} & 1\ldots 1 & e^{-g_1(\lambda_2-\lambda_1)}\ldots e^{-g_r(\lambda_2-\lambda_1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_1^{p+q-1}e^{b_1\lambda_1}\ldots b_p^{p+q-1}e^{b_p\lambda_1} & d_1^{p+q-1}\ldots d_q^{p+q-1} & g_1^{p+q-1}e^{-g_1(\lambda_2-\lambda_1)}\ldots g_r^{p+q-1}e^{-g_r(\lambda_2-\lambda_1)} \\ e^{b_1\lambda_2}\ldots e^{b_p\lambda_2} & e^{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\ldots e^{d_q(\lambda_2-\lambda_1)} & 1\ldots 1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_1^{r-1}e^{b_1\lambda_2}\ldots b_p^{r-1}e^{b_p-\lambda_2} & d_1^{r-1}e^{d_1(\lambda_2-\lambda_1)}\ldots d_q^{r-1}e^{d_q(\lambda_2-\lambda_1)} & g_1^{r-1}\ldots g_r^{r-1} \end{vmatrix}.$$

Tirons de p premières colonnes de (30) le produit $e^{b_1\lambda_1}\ldots e^{b_p\lambda_p}$ et développons le déterminant restant suivant les $p+q$ premières lignes. On aura

$$e^{b_1\lambda_1}\ldots e^{b_p\lambda_1}\cdot\sum VWe^{u(\lambda_2-\lambda_1)}, \tag{31}$$

où V et W sont des déterminants de Vandermonde, formés respectivement de $p+q$ ou de r éléments choisis parmi b_ν, d_ν, g_ν, et u est un opérateur de la forme $\sum b_\nu+\sum d_\nu-\sum g_\nu$. En particulier on a $u=0$, lorsque le déterminant de Vandermonde V est formé d'éléments appartenant aux $p+q$ premières lignes et $p+q$ premières colonnes du déterminant développé et le déterminant de Vandermonde W est formé d'éléments appartenant aux lignes et colonnes restantes.

Si $r=0$, la somme (31) se réduit à un seul déterminant de Vandermonde V, qui n'est pas un diviseur de zéro, d'après la supposition que les racines de (24) sont différentes et appartiennent au corps K. Dans ce cas, le déterminant (30) n'est pas, lui même, un diviseur de zéro.

Si $r>0$, chacun des opérateurs u, sauf le premier égal à 0, est un logarithme droit, car les opérateurs d_ν et $-g_\nu$ sont des logarithmes droits et b_ν sont des logarithmes bilatéraux. L'expression (31) peut donc s'écrire

$$e^{b_1\lambda_1}\dots e^{b_p\lambda_1}(U_0+h^a U_1), \tag{32}$$

où U_0, U_1 sont des opérateurs non diviseurs de zéro et $a>0$. Il est facile de voir que (32) n'est pas un diviseur de zéro et que, par conséquent, il en est de même du déterminant (30). Nous avons ainsi démontré que ce déterminant est, dans tous les cas, un non-diviseur de zéro.

Il s'ensuit que les coefficients c_ν, $\hat{c}_\nu$ et $\acute{c}_\nu$ dans (28) sont nuls, ce qui prouve l'indépendance linéaire des solutions $e^{b_\nu\lambda}$, $e^{d_\nu(\lambda_2-\lambda_1)}$, $e^{-g_\nu(\lambda_2-\lambda)}$.

Laissons maintenant de côté l'hypothèse que les racines-logarithmes sont différentes et considérons la fonction

$$x(\lambda)=\sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu}\lambda^\nu e^{b_\mu\lambda}+\sum_{\mu,\nu}\hat{c}_{\mu\nu}\lambda^\nu e^{d_\mu(\lambda-\lambda_1)}+\sum_{\mu,\nu}\acute{c}_{\mu\nu}\lambda^\nu e^{-g_\mu(\lambda_2-\lambda)}.$$

Pour cette fonction, formons les équations (29) et le déterminant analogue au déterminant (30). En tirant de $\beta_1+\dots+\beta_p$ premières colonnes de ce déterminant le produit $e^{\beta_1 b_1\lambda_1}\dots e^{\beta_p b_p\lambda_1}$ et développant le déterminant restant suivant les $(\beta_1+\dots+\beta_p)+(\delta_1+\dots+\delta_q)$ lignes, on aura

$$e^{\beta_1 b_1\lambda_1}\dots e^{\beta_p b_p\lambda_1}\sum VWe^{u(\lambda_2-\lambda_1)},$$

où les V et W ne seront plus des déterminants de Vandermonde, mais des déterminants plus généraux, considérés dans l'un des articles antérieurs ([5] et [4], p. 230-231). La suite de la démonstration est analogue à celle du cas précédent.

17. Levons maintenant l'hypothèse que les coefficients de l'équation (23) soient des éléments du corps K.

Si l'un, au moins, des coefficients de l'équation (23) *n'est pas un diviseur de zéro, toute fonction* $x(\lambda)$ *satisfaisant à* (23) *dans l'intervalle infini* $0\leqslant\lambda<\infty$ *et aux conditions initiales* $x(0)=\dots=x^{(m-1)}(0)=0$ *est identiquement nulle dans cet intervalle.*

La proposition est triviale pour $m=0$, car si a_0 n'est pas un diviseur de zéro, l'égalité $a_0x(\lambda)=0$ entraîne $x(\lambda)=0$.

Posons

$$y(\lambda)=\sum_{i=0}^{m-1}a_i\sum_{j=i}^{m-1}x^{(j)}(\lambda)\cdot x^{(m-1+i-j)}(\mu-\lambda),$$

où μ est un nombre positif. Le calcul montre que l'on a, en vertu de (23), $y'(\lambda)=0$. La fonction $y(\lambda)$ se réduit donc à une constante; comme $y(0)=0$, on a $y(\lambda)=0$ pour tout $\lambda\geqslant 0$. On peut donc écrire, en remplaçant $\mu-\lambda$ par $\varkappa$ et changeant l'ordre de sommation,

$$\sum_{j=0}^{m-1}A_j(\varkappa)\cdot x^{(j)}(\lambda)=0 \quad \text{pour} \quad \lambda,\varkappa\geqslant 0, \tag{33}$$

où

$$A_j(\varkappa)=\sum_{i=0}^{j}a_i x^{(m-1+i-j)}(\varkappa) \qquad (j=0,\dots,m-1)$$

et, en particulier,

$$A_{m-1}(\varkappa)=\sum_{i=0}^{m-1}a_i x^{(i)}(\varkappa).$$

Soit a le plus grand nombre positif tel que $a_i=h^a b_i$ $(i=0,\dots,m-1)$ et que l'un au moins des opérateurs b_i ne soit pas un diviseur de zéro. Si $a=T$, on a $a_i=0$ pour $i=1,\dots,m-1$, et a_m n'est pas un diviseur de zéro. L'équation (23) se réduit, dans ce cas, à $x^{(m)}(\lambda)=0$ et la proposition est triviale. Supposons donc que $a<T$. On a

$$A_{m-1}(\varkappa)=h^a\sum_{i=0}^{m-1}b_i x^{(i)}(\varkappa).$$

Si $A_{m-1}(\varkappa)=0$ pour tout $\varkappa\geqslant 0$, on a, en désignant par $\bar{b}_i$ et $\bar{x}^{(i)}(\varkappa)$ les opérateurs partiels de b^i et $x^{(i)}(\varkappa)$ correspondant à l'intervalle $0\leqslant t<\bar{T}=T-a$,

$$\sum_{i=0}^{m-1}\bar{b}_i\bar{x}^{(i)}(\varkappa)=0 \quad \text{pour tout} \quad \varkappa\geqslant 0, \tag{34}$$

où l'un au moins des coefficients $\bar{b}_i$ n'est pas un diviseur de zéro.

Nous procédons maintenant par induction et supposons que la proposition soit vraie pour l'équation d'ordre $m-1$, quel que soit l'intervalle fondamental $0\leqslant t<T$. Alors il résulte de (34) que $\bar{x}(\varkappa)=0$ pour $\varkappa\geqslant 0$ et, par conséquent, $h^a x(\lambda)=0$ pour tout $\lambda\geqslant 0$.

Si $A_{m-1}(\varkappa)$ n'est pas identiquement nul pour $\varkappa\geqslant 0$, fixons $\varkappa$ de manière que $A_{m-1}(\varkappa)\neq 0$. Soit A le plus grand nombre tel que $A_j(\varkappa)=h^A B_j$ $(j=0,\dots,m-1)$ et que l'un au moins des opérateurs B_j ne soit pas un diviseur de zéro. On a $A<T$, car $A_{m-1}(\varkappa)\neq 0$. Cela étant, l'équation (33) peut s'écrire

$$h^A\sum_{j=0}^{m-1}B_j x^{(j)}(\lambda)=0.$$

En désignant par $\tilde{B}_j$ et $\tilde{x}^{(j)}(\lambda)$ les opérateurs partiels de B_j et $x^{(j)}(\lambda)$, correspondant à l'intervalle $0 \leqslant t < \tilde{T} = T - \Delta$, on a

$$\sum_{j=0}^{m-1} \tilde{B}_j a^{(j)}(\lambda) = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda \geqslant 0,$$

où l'un au moins des coefficients $\tilde{B}_j$ n'est pas un diviseur de zéro. Il s'ensuit que $\tilde{x}(\lambda) = 0$ pour $\lambda \geqslant 0$ et, par conséquent, que $h^{\Delta} x(\lambda) = 0$.

Désignons par δ le plus petit nombre $\geqslant 0$ tel que

$$h^{\delta} x(\lambda) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \lambda \geqslant 0. \tag{35}$$

D'après nos considérations précédentes, on a $\delta \leqslant a$ et $\delta \leqslant \Delta$, donc $\delta < T$. On peut écrire $x(\lambda) = h^{T-\delta} y(\lambda)$ et, en posant cette expression dans (23),

$$h^{T-\delta}[a_m y^{(m)}(\lambda) + \ldots + a_0 y(\lambda)] = 0 \qquad (\lambda \geqslant 0).$$

Si $\delta > 0$, on a, en désignant par $\hat{a}_i$ et $\hat{y}^{(i)}(\lambda)$ les opérateurs partiels de a_j et $y^{(i)}(\lambda)$, correspondant à l'intervalle $0 \leqslant t < \delta$,

$$\hat{a}_m \hat{y}^{(m)}(\lambda) + \ldots + \hat{a}_0 \hat{y}(\lambda) = 0.$$

D'après le raisonnement précédent, il existe un nombre γ $(0 \leqslant \gamma < \delta)$ tel que $h^\gamma \hat{y}(\lambda) = 0$ pour $\lambda \geqslant 0$. Par conséquent, on a $y(\lambda) = h^{\delta-\gamma} z(\lambda)$, $x(\lambda) = h^{T-\gamma} z(\lambda)$, et enfin $h^\gamma x(\lambda) = 0$ pour $\lambda \geqslant 0$, par contre à la définition de δ.

On a donc $\delta = 0$ et, en vertu de (35), $x(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \geqslant 0$.

18. Revenons à notre hypothèse que les coefficients de l'équation (23) appartiennent à un corps K faisant parti de l'anneau A_T et considérons cette équation dans l'intervalle fini $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$.

Si l'équation caractéristique (24) *a m racines et toutes ces racines sont des logarithmes bilatéraux ou droits, l'unique solution de l'équation différentielle* (23), *satisfaisant aux conditions*

$$x(\lambda_1) = \ldots = x^{(m-1)}(\lambda_1) = 0, \tag{36}$$

est la fonction identiquement nulle.

On peut admettre, sans restreindre la généralité, que $\lambda_1 = 0$.

Soit $x_1(\lambda)$ une fonction satisfaisant, dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, à l'équation (23). Posons $\lambda_3 = 2\lambda_2$. Il existe une fonction $x_2(\lambda)$ qui satisfait, dans l'intervalle $\lambda_2 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_3$, à l'équation (23) et aux conditions initiales

$$x_2^{(\mu)}(\lambda_2) = x_1^{(\mu)}(\lambda_2) \qquad (\mu = 0, \ldots, m-1). \tag{37}$$

En effet, il suffit de poser

$$x_2(\lambda) = \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu} \lambda^\nu e^{b_\mu(\lambda-\lambda_2)} + \sum_{\mu,\nu} \hat{c}_{\mu\nu} \lambda^\nu e^{d_\mu(\lambda-\lambda_2)}$$

et de résoudre ensuite, par rapport aux coefficients $c_{\mu\nu}$ et $\hat{c}_{\mu\nu}$, le système d'équations (37). Ce système est résoluble, car le déterminant correspondant se réduit, le facteur $\Pi e^{b_\mu(\lambda-\lambda_2)} \Pi e^{d_\mu(\lambda-\lambda_2)}$ étant exclu, à un déterminant analogue au déterminant de Vandermonde, qui est non nul (voir [5]).

Soit $\lambda_4 = 3\lambda_2$. Il existe une fonction $x_3(\lambda)$ qui satisfait, dans l'intervalle $\lambda_3 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_4$, à l'équation (23) et aux conditions initiales

$$x_3^{(\mu)}(\lambda_3) = x_2^{(\mu)}(\lambda_3) \qquad (\mu = 0, \ldots, m-1).$$

La continuation de ce procédé laisse construire successivement une suite infinie de fonctions $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots$ satisfaisant à l'équation (23) dans les intervalles contigus $[\lambda_1, \lambda_2]$, $[\lambda_2, \lambda_3], \ldots$ respectivement, la longueur de chacun de ces intervalles étant λ_2. Ces solutions sont compatibles aux points communs. On peut donc les joindre en une seule fonction $x(\lambda)$ qui satisfait à l'équation (23) dans l'intervalle infini et qui coïncide avec $x_1(\lambda)$ dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$. Ainsi toute fonction $x_1(\lambda)$ satisfaisant à (23) se laisse prolonger sur l'intervalle infini $0 \leqslant \lambda < \infty$.

D'après le théorème du paragraphe précédent, on a donc $x(\lambda) = 0$ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ et la démonstration est achevée.

Il faut remarquer que le théorème devient faux lorsqu'on admet ces racines qui sont des logarithmes gauches, ce que l'on voit déjà pour $m = 1$.

19. Gardons l'hypothèse que les coefficients de (23) appartiennent au corps $K \subset A_T$. Dans les applications, la forme suivante du théorème est utile:

Si l'équation (24) *a m racines et toutes ces racines sont des logarithmes bilatéraux ou droits, il existe, pour tout intervalle $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ au plus m solutions de* (23) *linéairement indépendantes.*

En effet, soit $x_0(\lambda)$ une solution donnée de l'équation (23). Posons, en utilisant la notation du paragraphe 16,

$$x(\lambda) = \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu} \lambda^\nu e^{b_\mu(\lambda-\lambda_1)} + \sum_{\mu,\nu} \hat{c}_{\mu\nu} \lambda^\nu e^{d_\mu(\lambda-\lambda_1)}.$$

Le système d'équations

$$x^{(\mu)}(\lambda_1) = x_0^{(\mu)}(\lambda_1) \qquad (\mu = 0, \ldots, m-1)$$

est résoluble par rapport à $c_{\mu\nu}$, car son déterminant est non nul. Pour les valeurs ainsi obtenues, la différence $x(\lambda) - x_0(\lambda)$ est identiquement nulle, car elle satisfait aux conditions du théorème précédent. La démonstration est donc achevée.

Une autre méthode de démonstration laisse établir un théorème plus fort.

Supposons que l'équation caractéristique (24) *a m racines dont k sont des logarithmes (bilatéraux, droits ou gauches) et que, pour les racines restantes w, l'équation $x'(\lambda)=wx(\lambda)$ n'a que la solution identiquement nulle. Cela étant, le nombre de solutions linéairement indépendantes est, pour tout intervalle $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$, égal à k.*

D'après le théorème du paragraphe 16, il suffit de démontrer qu'il existe au plus k solutions linéairement indépendantes. La démonstration s'appuyera sur le lemme suivant:

Si l'équation

$$L_1x=a_mx^{(m)}+\ldots+a_0x=0 \tag{38}$$

a au plus k_1 solutions linéairement indépendantes et l'équation

$$L_2x=b_nx^{(n)}+\ldots+b_0x=0 \tag{39}$$

en a au plus k_2, l'équation

$$L_1L_2x=0 \tag{40}$$

a au plus k_1+k_2 solutions linéairement indépendantes.

Supposons par contre, qu'il existe k_1+k_2+1 solutions linéairement indépendantes de (40). Soient $x_1(\lambda),\ldots,x_p(\lambda)$ des solutions linéairement indépendantes de (39) et supposons que leur nombre ne peut pas être augmenté; alors $p<k_2$. Chacune de ces solutions est, en même temps, une solution de (40). Soient $x_{p+1}(\lambda),\ldots,x_{k_1+k_2+1}(\lambda)$ des solutions de (40) telles que le système de k_1+k_2+1 fonctions $x_1(\lambda),\ldots,x_{k_1+k_2+1}(\lambda)$ est linéairement indépendant. Alors les fonctions

$$L_2x_i(\lambda)\qquad (i=p+1,\ldots,k_1+k_2+1) \tag{41}$$

sont linéairement indépendantes. En effet, si $\sum c_iL_2x_i(\lambda)=0$, la somme $\sum c_ix_i(\lambda)$ satisfait à (39), d'où $c_i=0$. D'autre part, les fonctions (41) satisfont à (23) et leur nombre surpasse k_1, d'où la contradiction.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. On peut représenter l'équation (23) (après l'avoir divisé par a_m) dans la forme

$$L_1\ldots L_mx=0,$$

où $L_ix=x'-w_ix$, les opérateurs w_i étant des racines de l'équation caractéristique (24). Il résulte par l'induction, en vertu du lemme précédent, que le nombre de solutions indépendantes de (23) est $\leqslant k$. Ceci achève la démonstration.

20. Il peut arriver que l'équation caractéristique (24) a une infinité de racines qui sont des logarithmes bilatéraux. En effet, si b est un logarithme bilatéral, l'équation

$$w^2-2bw+b^2=0$$

a une infinité de racines de la forme $a+b$, où a est un opérateur quelconque tel que $a^2=0$. Il s'ensuit que l'équation différentielle

$$x''(\lambda)-2bx'(\lambda)+b^2x(\lambda)=0$$

a une infinité de solutions qui sont des fonctions exponentielles

$$e^{(a+b)\lambda}, \tag{42}$$

car il est facile de démontrer que les opérateurs $a+b$ sont encore des logarithmes bilatéraux.

D'après les théorèmes précédents, il n'y a que deux solutions linéairement indépendantes, de plus, toute solution, en particulier les solutions (42), se laisse représenter dans la forme

$$(c_1+c_2\lambda)e^{b\lambda}. \tag{43}$$

Pour le voir directement, développons $e^{a\lambda}$ en série

$$e^{a\lambda}=1+\frac{a}{1!}\lambda+\frac{a^2}{2!}\lambda^2+\ldots;$$

cette série se réduit à deux termes

$$e^{a\lambda}=1+a\lambda,$$

car $a^2=0$. Donc

$$e^{(a+b)}=e^{a\lambda}\cdot e^{b\lambda}=(1+a\lambda)e^{b\lambda},$$

conformément à (43).

Cet exemple explique, pourquoi le nombre de solutions indépendantes d'une équation différentielle est fini, malgré que le nombre de racines de son équation caractéristique soit infini.

21. Les considérations des paragraphes précédents permettent de trouver la solution générale de toute équation homogène (23), relative à l'équation à dérivées partielles (19). Les méthodes de résolution de l'équation non homogène (20) sont analogues à celles dans le cas des opérateurs d'intervalle infini et ne seront pas discutées ici. Remarquons seulement que tous les théorèmes d'unicité sont les mêmes pour l'équation non homogène et pour l'équation homogène, car la différence de deux solutions de l'équation non homogène est une solution de l'équation homogène.

En connaissant la solution générale de l'équation, on peut l'adapter à des conditions initiales ou à des conditions aux limites. Si le déterminant correspondant au problème considéré est non nul, la solution cherchée existe (dans le domaine des opérateurs) et est unique. On a ainsi une méthode générale qui conduit à de différents théorèmes d'existence et d'unicité. Les théorèmes d'unicité sont évidemment plus forts que ceux obtenus moyennant les opérateurs d'intervalle infini. Considérons par exemple le cas, où la variable λ parcourt l'intervalle $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$. Alors le théorème d'unicité, interprété pour les équations à dérivées partielles, concerne le rectangle $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, $0 \leqslant t < T$ ou la demi-bande $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, suivant que l'on considère les opérateurs d'intervalle fini ou infini. Le théorème concernant le rectangle est évidemment le plus fort, car à priori il peut exister des solutions dans le rectangle qui ne se laissent pas prolonger sur la demi-bande.

L'emploi pratique de la méthode des opérateurs d'intervalle fini est presque le même que celui des opérateurs d'intervalle infini et les calculs n'exigent qu'une nouvelle interprétation.

Démontrons, à titre d'exemple d'une application, le théorème suivant de Tychonoff [9]:

Soit

$$m(\lambda) = \max |x(\lambda, t)|;$$

si $x(\lambda,t)$ est une solution de l'équation de la chaleur

$$x_{\lambda\lambda}(\lambda,t) = x_t(\lambda,t) \tag{44}$$

et s'il existe une constante C telle que

$$m(\lambda)\cdot e^{-C\lambda^2} \to 0 \tag{45}$$

pour $\lambda \to \infty$ et pour $\lambda \to -\infty$, alors l'égalité $x(\lambda,0)=0$ entraîne $x(\lambda,t)\equiv 0$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$.

On peut supposer que $C > 1/4t_0$. Considérons les opérateurs dans l'intervalle $0 \leqslant t < T = 1/4C$. La fonction paramétrique $x(\lambda) = \{x(\lambda,t)\}$, où $x(\lambda,t)$ est considérée dans la bande $-\infty < \lambda < \infty$, $0 \leqslant t < T$, satisfait à l'équation opérationnelle

$$x''(\lambda) = sx(\lambda). \tag{46}$$

Cette fonction est donc de la forme

$$x(\lambda) = c_1 e^{-\lambda\sqrt{s}} + c_2 e^{\lambda\sqrt{s}}. \tag{47}$$

Soient λ_1 et λ_2 deux points, où la valeur de $m(\lambda)$ est finie, et soit

$$x(\lambda_1) = a, \qquad x(\lambda_2) = b.$$

En résolvant le système de deux dernières équations par rapport à c_1 et c_2, on vérifiera, en tenant compte de l'égalité

$$e^{-\lambda\sqrt{s}} = \left\{\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\lambda}{4t}\right)\right\} \qquad (\lambda > 0),$$

que c_1 et c_2 sont deux fonctions bornées de t, ce qui s'exprime, en symbole du calcul opérationnel,

$$|c_1| \leqslant \gamma_1/s \quad \text{et} \quad |c_2| \leqslant \gamma_2/s,$$

γ_1 et γ_2 étant des nombres.

En vertu de (47), on a

$$c_2 = c_1 e^{-2\lambda\sqrt{s}} - x(\lambda) e^{-\lambda\sqrt{s}}, \qquad c_1 = c_2 e^{2\lambda\sqrt{s}} - x(\lambda) e^{\lambda\sqrt{s}}.$$

En employant l'inégalité

$$\frac{1}{s} e^{-\lambda\sqrt{s}} = \left\{\int_0^t \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\tau}\right) d\tau\right\} < \frac{2}{\pi\sqrt{T}} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-C\lambda^2},$$

il vient, d'après l'hypothèse $|x(\lambda)| \leqslant m(\lambda)/s$,

$$|c_2| < \gamma_1 e^{-2C\lambda^2} + m(\lambda) e^{-C\lambda^2} \quad \text{et} \quad |c_1| < \gamma_2 e^{-2C\lambda^2} + m(-\lambda) e^{-C\lambda^2}$$

pour λ assez grand. En faisant tendre λ vera ∞, il vient $c_1 = c_2 = 0$, d'où $x(\lambda) \equiv 0$ pour $-\infty < \lambda < \infty$.

Nous avons ainsi démontré que $x(\lambda,t) \equiv 0$ pour $0 \leqslant t < T$. Si $T < t_0$, on a encore $x(\lambda,T) \equiv 0$, en vertu de la continuité, et il résulte par une translation que $x(\lambda,t) \equiv 0$ pour $T \leqslant t < \min(2T, t_0)$. Après un nombre fini de pas on parvient à l'identité $x(\lambda,t) \equiv 0$ dans la bande $-\infty < \lambda < \infty$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$ tout entière. Ainsi le théorème est démontré.

Remarquons enfin que cette démonstration fournit le théorème dans des conditions légèrement relâchées, car la condition (45) n'intervient que dans la forme plus faible $x(\pm\lambda) e^{-\lambda\sqrt{s}} \to 0$ pour $\lambda \to \infty$.

Travaux cités

[1] L. Finkelsztejn, J. Mikusiński et C. Ryll-Nardzewski, *Sur une équation intégro-différentielle*, Coll. Math. 2 (1951), p. 178-181.

[2] J. Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Stud. Math. 11 (1950), p. 41-70.

[3] — *Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire*, Stud. Math. 12 (1951), p. 208-224.

[4] — *Sur les équations différentielles du calcul opératoire et leurs applications aux équations classiques aux dérivées partielles*, Stud. Math. 12 (1951), p. 227-270.

[5] — *Sur un déterminant*, Ann. Soc. Pol. Math. 25 (1952), p. 27-29.

[6] — *A new proof of Titchmarsh's theorem on convolution*, Stud. Math. 13 (1953), p. 56-58.

[7] — *Sur quelques équations intégro-différentielles*, ce volume, p. 182-187.

[8] E. C. Titchmarsh, *The zeros of certain integral functions*, Proc. London Math. Soc. 25 (1926), p. 283-302.

[9] A. Tychonoff, *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur*. Мат. Сбор. 42 (1935), p. 199-216.

Reçu par la Rédaction le 14. 6. 1955