# Sur un problème du calcul de probabilité (I) *

**(Le mouvement d'une molécule sur une droite)**

par

JAN MYCIELSKI et S. PASZKOWSKI (Wrocław)

**1.1. Introduction et problèmes.** Les questions traitées dans cette note proviennent de M. C. Ryll-Nardzewski[1]). Elles sont les suivantes.

Une matière douée d'une masse est repartie sur une droite. La masse de la matière contenue dans chaque semidroite est infinie. Une molécule se meut sur cette droite et elle peut 1° passer par la matière, 2° être réfléchie par la matière (changer la direction de sa marche), 3° être absorbée par la matière (disparaître). Nous supposons que ces phénomènes du mouvement de la molécule sont indépendants par rapport à des segments non empiétants de la droite et que les probabilités de ces phénomènes dépendent seulement de la direction de la marche de la molécule et de la masse de la matière contenue dans le segment. Ainsi ces probabilités ne dépendent pas du temps.

Nous allons adopter pour ce mécanisme le modèle mathématique suivant:

Une mesure est définie sur la droite qui est une fonction continue des segments[2]). Elle est finie sur chaque segment et infinie sur chaque semidroite.

Les probabilités du passage, de la réflexion et de l'absorption de la molécule sur un segment de mesure $x$ sont des fonctions en $x$. Les probabilités concernant une molécule qui marche de gauche à droite seront désignées par des minuscules, qui marche de droite à gauche par des majuscules. Ainsi $p(x)$ et $P(x)$ désignent les probabilités du passage d'une

* Ce travail fut presenté à la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Mathématique le 29 avril 1955.

[1]) Il les a communiqué à une séance de la même société le 29 janvier 1954. M. C. Ryll-Nardzewski s'est occupé de cette partie du problème qui est décrite dans le § 1.5 de cette note. Il a trouvé les équations (46)-(48) concernant ce cas et certaines de leurs solutions (les formules (50) et (51)).

[2]) Nous ne postulons pas l'existence de la densité (elle serait la dérivée de la mesure).



molécule par un segment de mesure $x$, $q(x)$ et $Q(x)$ les probabilités de la réflexion, enfin $r(x)$ et $R(x)$ les probabilités de l'absorption. Si

$$Q(x)q(y)<1 \quad \text{pour chaque} \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0, \tag{1}$$

alors les fonctions $p, q, r, P, Q, R$ doivent satisfaire aux équations fonctionnelles suivantes:

$$p(x)+q(x)+r(x)=1, \tag{2}$$

$$p(x+y)=\frac{p(x)p(y)}{1-Q(x)q(y)}, \tag{3}$$

$$q(x+y)=q(x)+p(x)P(x)\cdot\frac{q(y)}{1-Q(x)q(y)}, \tag{4}$$

$$r(x+y)=r(x)+p(x)\cdot\frac{r(y)+q(y)R(x)}{1-Q(x)q(y)}, \tag{5}$$

$$P(x)+Q(x)+R(x)=1, \tag{6}$$

$$P(x+y)=\frac{P(x)P(y)}{1-q(x)Q(y)}, \tag{7}$$

$$Q(x+y)=Q(x)+p(x)P(x)\cdot\frac{Q(y)}{1-q(x)Q(y)}, \tag{8}$$

$$R(x+y)=R(x)+P(x)\cdot\frac{R(y)+Q(y)r(x)}{1-q(x)Q(y)}. \tag{9}$$

En effet, les équations (2) et (6) proviennent de ce que l'un des trois phénomènes: passage, réflexion, absorption doit arriver.

Démontrons (3)-(5) et (7)-(9). Soient $I$ et $J$ deux intervalles contigus de mesure $x$ et $y$ respectivement. La figure 1 est une illustration du fait que $p(x+y)$ — la probabilité du passage de la molécule par le segment $I\cup J$ — est la somme des probabilités des phénomènes suivants:

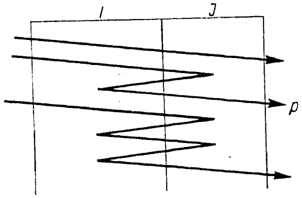


Fig. 1

la molécule passe par $I$ et passe par $J$;

la molécule passe par $I$, est réflechie par $J$, est réflechie par $I$ et passe par $J$; etc., etc.

Il en résulte l'égalité suivante:

$$p(x+y)=p(x)p(y)+p(x)q(y)Q(x)p(y)+p(x)q(y)Q(x)q(y)Q(x)p(y)+\ldots \tag{10}$$

De la même manière les égalités

$$q(x+y)=q(x)+p(x)q(y)P(x)+p(x)q(y)Q(x)q(y)P(x)+p(x)q(y)Q(x)q(y)Q(x)q(y)P(x)+\ldots, \tag{11}$$

$$r(x+y)=r(x)+p(x)r(y)+p(x)q(y)R(x)+p(x)q(y)Q(x)r(y)+p(x)q(y)Q(x)q(y)R(x)+\ldots \tag{12}$$

peuvent être lues des figures 2 et 3.

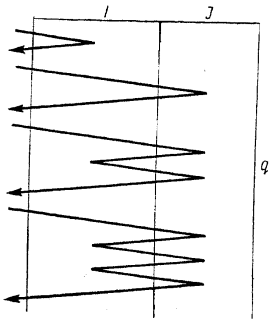


Fig. 2

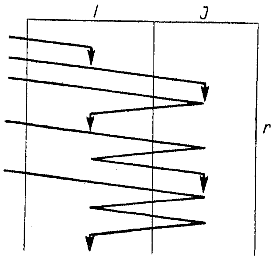


Fig. 3

En vue de (1) les égalités (10)-(12) donnent (3)-(5). Les deux directions du mouvement de la molécule étant symétriques, on obtient (7)-(9) de (3)-(5) en substituant $P, Q, R$ à $p, q, r$ et inversement.

Le but de cette note est d'analyser le système d'équations (2)-(9) en adoptant l'hypothèse (1) et l'hypothèse

$$0\leqslant p(x),\ q(x),\ r(x),\ P(x),\ Q(x),\ R(x)\leqslant 1 \quad \text{pour} \quad x\geqslant 0, \tag{13}$$

qui résulte du sens probabilistique de ces fonctions.

Nous démontrerons que ce système est compatible et nous trouverons toutes les solutions de ce système en fonctions $p, q, r, P, Q, R$ (§§ 1.2 et 1.3). De plus, nous décrirons l'allure des solutions pour les arguments croissants infiniment (§ 1.4). Nous allons nous occuper aussi spécialement du cas $p=P$, $q=Q$, $r=R$ (§ 1.5).



Il est à remarquer que les égalités (5) et (9) que nous avons déduites ici du sens physique des fonctions $r$ et $R$ peuvent être aussi dérivées des autres équations par un calcul facile.

**1.2. Solutions du système (2)-(9).** Nous donnerons ici la forme explicite de toutes les solutions du système (2)-(9) satisfaisant aux conditions (1) et (13). Il sera démontré que toutes ces fonctions sont dérivables.

Nous introduirons les notations

$$\varkappa=p'(0),\qquad K=P'(0),\qquad \lambda=q'(0),\qquad \Lambda=Q'(0). \tag{14}$$

Nous démontrerons que

$$-\varkappa\geqslant\lambda\geqslant 0,\qquad -K\geqslant\Lambda\geqslant 0. \tag{15}$$

Dans la suite les lettres $\varkappa, K, \lambda, \Lambda$ vont jouer le rôle des paramètres arbitraires assujettis aux inégalités (15).

Posons encore

$$\delta=(\varkappa-K)/2,\qquad \sigma=(\varkappa+K)/2,\qquad a=\sqrt{\sigma^2-\lambda\Lambda} \tag{16}$$

(d'après (15) il vient $\sigma^2\geqslant\lambda\Lambda$).

Solutions.

(I.1.1) *Si* $p(0)>0$, $P(0)>0$, $\lambda>0$, $\Lambda>0$, $a>0$, *alors*

$$p(x)=\frac{ae^{\delta x}}{a\cosh ax-\sigma\sinh ax},\qquad P(x)=\frac{ae^{-\delta x}}{a\cosh ax-\sigma\sinh ax},$$

$$q(x)=\frac{\lambda\sinh ax}{a\cosh ax-\sigma\sinh ax},\qquad Q(x)=\frac{\Lambda\sinh ax}{a\cosh ax-\sigma\sinh ax},$$

$$r(x)=1-\frac{ae^{\delta x}+\lambda\sinh ax}{a\cosh ax-\sigma\sinh ax},\qquad R(x)=1-\frac{ae^{-\delta x}+\Lambda\sinh ax}{a\cosh ax-\sigma\sinh ax}.$$

(I.1.2) *Si* $p(0)>0$, $P(0)>0$, $\lambda>0$, $\Lambda>0$, $a=0$, *alors*

$$p(x)=P(x)=\frac{1}{1-\varkappa x},\qquad q(x)=Q(x)=-\frac{\varkappa x}{1-\varkappa x},$$

$$r(x)=R(x)\equiv 0.$$

(I.2) *Si* $p(0)>0$, $P(0)>0$, $\lambda>0$, $\Lambda=0$, *alors*

$$p(x)=e^{\varkappa x}, \qquad P(x)=e^{Kx},$$

$$q(x)=\frac{\lambda}{\varkappa+K}\,(e^{(\varkappa+K)x}-1), \qquad Q(x)\equiv 0,$$

$$r(x)=1-e^{\varkappa x}-\frac{\lambda}{\varkappa+K}(e^{(\varkappa+K)x}-1), \qquad R(x)=1-e^{Kx}.$$

(I.2*) *Si* $p(0)>0$, $P(0)>0$, $\lambda=0$, $\Lambda>0$, *alors les solutions sont celles de* (I.2) *transformées par symétrie (c'est-à-dire en substituant* $P, Q, R, K, \Lambda$ *à* $p, q, r, \varkappa, \lambda$ *et inversement).*

(I.3) *Si* $p(0)>0$, $P(0)>0$, $\lambda=\Lambda=0$, *alors*

$$p(x)=e^{\varkappa x}, \qquad P(x)=e^{Kx},$$

$$q(x)\equiv 0, \qquad Q(x)\equiv 0,$$

$$r(x)=1-e^{\varkappa x}, \qquad R(x)=1-e^{Kx}.$$

(II.1.1) *Si* $p(0)>0$, $P(0)=0$, $q(0)=0$, *alors*

$$p(x)=e^{\varkappa x}, \qquad P(x)\equiv 0,$$

$$q(x)\equiv 0, \qquad Q(x)\equiv Q,$$

$$r(x)=1-e^{\varkappa x}, \qquad R(x)\equiv 1-Q,$$

*où* $Q$ *est une constante arbitraire telle que* $0\leqslant Q\leqslant 1$.

(II.1.1*) *Si* $p(0)=0$, $P(0)>0$, $Q(0)=0$, *alors les solutions sont celles de* (II.1.1) *transformées par symétrie.*

(II.1.2) *Si* $p(0)>0$, $P(0)=0$, $q(0)>0$, *alors*

$$p(x)=(1-q)e^{lx}, \qquad P(x)\equiv 0,$$

$$q(x)\equiv q, \qquad Q(x)\equiv 1,$$

$$r(x)=(1-q)(1-e^{lx}), \qquad R(x)\equiv 0,$$

*où* $l$ *et* $q$ *sont des constantes arbitraires telles que* $l\leqslant 0$ *et* $0<q<1$.

(II.1.2*) *Si* $p(0)=0$, $P(0)>0$, $Q(0)>0$, *alors les solutions sont celles de* (II.1.2) *transformées par symétrie.*

(II.2) *Si* $p(0)=P(0)=0$, *alors*

$$p(x)\equiv 0, \qquad P(x)\equiv 0,$$

$$q(x)\equiv q, \qquad Q(x)\equiv Q,$$

$$r(x)\equiv 1-q, \qquad R(x)\equiv 1-Q,$$

*où* $q$ *et* $Q$ *sont des constantes arbitraires telles que* $0\leqslant q\leqslant 1$, $0\leqslant Q\leqslant 1$, $qQ<1$.



Seules les solutions (I.1.1)-(I.3) ont un sens physique clair, car les égalités $p(0)=P(0)=1$ doivent être remplies, si la molécule passe librement (sans résistance) par les segments de mesure nulle (dans lesquels aucune matière n'est contenue).

**1.3. Démonstrations.** On vérifie sans difficulté que les formules (I.1.1)-(II.2) sont des solutions du système (2)-(9) et satisfont à (1) et (13); ainsi il suffira de démontrer qu'elles sont les seules solutions possibles.

Les équations (5) et (9) étant impliquées par les autres, les équations (2) et (6) peuvent être traitées comme des définitions des fonctions $r$ et $R$ et le poids de la solution consiste à trouver toutes les fonctions $p, q, P, Q$ satisfaisant au système (3), (4), (7), (8), aux inégalités (1), (13) et aux conditions des cas énumérés.

Nous démontrerons la dérivabilité des solutions pour $x>0$. D'après (1), (13), (2), (4), (5), (6), (8) et (9) les fonctions $p, q, r, P, Q, R$ sont monotones, donc, d'après le théorème de Lebesgue, dérivables sauf un ensemble de mesure nulle. Pour $z>0$ posons $z=x+y$ où $x,y>0$ et $x$ est un point où toutes les fonctions $p, q, r, P, Q, R$ sont dérivables. Les égalités (3)-(5) et (7)-(9) impliquent donc que toutes ces fonctions sont dérivables au point $z$.

L'existence des dérivées à droite $p'(0)$, $q'(0)$, $r'(0)$, $P'(0)$, $Q'(0)$, $R'(0)$ sera aussi démontrée dans tous les cas particuliers.

Nous omettrons les démonstrations dans les cas (I.2*), (II.1.1*) et (II.1.2*) qui sont analogues aux cas symétriques (I.2), (II.1.1) et (II.1.2).

(I) $p(0)>0$, $P(0)>0$. D'après (4) il vient

$$q(0)=q(0)+p(0)P(0)\cdot\frac{q(0)}{1-Q(0)q(0)},$$

donc $q(0)=0$; (3) donne que $p(0)=1$ et (2) que $r(0)=0$. De la même manière (8), (7) et (6) impliquent $Q(0)=0$, $P(0)=1$, $R(0)=0$.

D'après (4) nous avons pour $y>0$ l'égalité suivante:

$$\frac{q(x+y)-q(x)}{y}=p(x)P(x)\cdot\frac{q(y)/y}{1-Q(x)q(y)}. \tag{17}$$

Comme nous l'avons démontré, la dérivée $q'(x)$ existe pour $x>0$, donc il existe aussi $\lim\limits_{y\to 0} S(y)$, où

$$S(y)=\frac{\dfrac{q(y)}{y}}{1-Q(x)q(y)}.$$

Or,

$$\frac{q(y)}{y}=\frac{S(y)}{1+yS(y)Q(x)}$$

et par là nous obtenons l'existence de la $\lim\limits_{y\to 0}(q(y)/y)=q'(0)=\lambda$ (c'est la définition de la constante $\lambda$).

Il vient d'après (17)

$$q'(x)=\lambda p(x)P(x). \tag{18}$$

De la même manière (8) donne

$$Q'(x)=\Lambda p(x)P(x), \tag{19}$$

où $\Lambda=Q'(0)$.

D'après (3) nous avons pour $y>0$ l'égalité suivante:

$$\frac{p(x+y)-p(x)}{y}=\frac{1}{y}p(x)\left(\frac{p(y)}{1-Q(x)q(y)}-1\right)$$

$$=\frac{p(x)\{(p(y)-1)/y+Q(x)\cdot q(y)/y\}}{1-Q(x)q(y)}.$$

Or $p(0)=1$, $q(0)=0$ et la fonction $q$ est continue au point 0 (puisqu'elle est dérivable), donc il en résulte

$$p'(x)=p(x)[\varkappa+\lambda Q(x)], \tag{20}$$

où $\varkappa=p'(0)$ doit donc exister.

De la même manière (7) donne

$$P'(x)=P(x)[K+\Lambda q(x)], \tag{21}$$

où $K=P'(0)$.

Il vient de (3) que $p(x)>0$ pour tout $x>0$. En effet, s'il était $p(x)=0$ il serait aussi $p(x/2^n)=0$ pour $n=1,2,\ldots$ Mais c'est impossible par l'hypothèse $p(0)>0$, puisque la fonction $p$ est continue au point 0 (elle est dérivable).

Le membre droit de l'égalité (3) étant évidemment symétrique par rapport aux variables $x$ et $y$ et $p(x)>0$, l'égalité (3) implique

$$1-Q(x)q(y)=1-q(x)Q(y). \tag{22}$$

Les égalités (4) et (22) impliquent de la même manière que

$$q(x)[1-Q(x)q(y)]+p(x)P(x)q(y)=q(y)[1-q(x)Q(y)]+p(y)P(y)q(x),$$



c'est-à-dire

$$q(x)[p(y)P(y)-q(y)Q(y)-1]=q(y)[p(x)P(x)-q(x)Q(x)-1]. \tag{23}$$

Or

$$[p(y)P(y)-q(y)Q(y)]'_{y=0}=p'(0)+P'(0),$$

donc, en divisant (23) par $y$ et en prenant $y\to 0$, on obtient

$$(\varkappa+K)q(x)=\lambda[p(x)P(x)-q(x)Q(x)-1]. \tag{24}$$

Les égalités (18) et (24) donnent

$$q'(x)=\lambda q(x)Q(x)+(\varkappa+K)q(x)+\lambda. \tag{25}$$

Nous résoudrons le système (18)-(21), (25) moyennant les hypothèses du cas I. Notons qu'il n'est pas indispensable d'utiliser à ce but toutes les équations différentielles obtenues, mais cela simplifiera les calculs.

(I.1) $\lambda>0$, $\Lambda>0$. Les formules (18) et (19) impliquent

$$\Lambda q(x)\equiv\lambda Q(x). \tag{26}$$

Les formules (20) et (21) donnent d'après (26)

$$p'(x)=[\varkappa+\Lambda q(x)]p(x),\qquad P'(x)=[K+\Lambda q(x)]P(x), \tag{27}$$

d'où

$$\frac{p'(x)}{p(x)}-\varkappa=\frac{P'(x)}{P(x)}-K$$

et

$$P(x)=e^{(K-\varkappa)x}p(x). \tag{28}$$

Les égalités (26) et (25) impliquent

$$q'(x)=\Lambda q^2(x)+(\varkappa+K)q(x)+\lambda. \tag{29}$$

La solution de cette équation différentielle avec la condition $q(0)=0$ est la fonction

$$q(x)=\frac{\lambda\sinh\alpha x}{\alpha\cosh\alpha x-\sigma\sinh\alpha x}, \tag{30}$$

où $\sigma=(\varkappa+K)/2$, $\alpha=\sqrt{\sigma^2-\lambda\Lambda}$, si l'inégalité $\alpha>0$ est remplie. Nous démontrerons d'abord que $\alpha$ est réel, c'est-à-dire que $\sigma^2-\lambda\Lambda\geqslant 0$.

Puisque, d'après (2) et (6),

$$\varkappa+\lambda+r'(0)=K+\Lambda+R'(0)=0 \tag{31}$$

et les fonctions $r(x)$ et $R(x)$ sont non-décroissantes, donc $\varkappa+\lambda\leqslant 0$ et $K+\Lambda\leqslant 0$. Ainsi nous obtenons

$$-\varkappa\geqslant\lambda>0,\qquad -K\geqslant\Lambda>0. \tag{32}$$

De plus, $4\sigma^2=(\varkappa+K)^2\geqslant(\lambda+\Lambda)^2$, d'où

$$4\sigma^2-4\lambda\Lambda\geqslant(\lambda+\Lambda)^2-4\lambda\Lambda=(\lambda-\Lambda)^2\geqslant 0,$$

ce qui prouve que $\sigma^2\geqslant\lambda\Lambda$ et que si $\alpha=0$ alors $\lambda=\Lambda$.

(I.1.1) $\alpha>0$. La fonction $q(x)$ a la forme (30). D'après (18) et (28) on a

(33) $$q'(x)=\lambda e^{(K-\varkappa)x}p^2(x).$$

En posant $\delta=(\varkappa-K)/2$ il en vient

(34) $$p(x)=e^{\delta x}\sqrt{\frac{q'(x)}{\lambda}}=\frac{\alpha e^{\delta x}}{\alpha\cosh\alpha x-\sigma\sinh\alpha x}.$$

Les formules (34), (30), (2), (28), (26) et (6) donnent toutes les solutions (I.1.1).

(I.1.2) $\alpha=0$. Il est donc $\sigma^2=\lambda\Lambda$ et, comme nous l'avons remarqué déjà, $\lambda=\Lambda$. Ainsi $\sigma=-\lambda=-\Lambda$ (puisque $\sigma<0$ et $\lambda,\Lambda>0$), c'est-à-dire

$$\varkappa+K=-(\lambda+\Lambda).$$

D'après (32) il est donc $\varkappa=K=-\lambda=-\Lambda$. D'après (29)

$$q'(x)=-\varkappa[q(x)-1]^2,$$

d'où

(35) $$q(x)=-\frac{\varkappa x}{1-\varkappa x}.$$

L'égalité (33) prend la forme $q'(x)=\lambda p^2(x)$ et nous avons

(36) $$p(x)=\frac{1}{1-\varkappa x}$$

et $r(x)\equiv 0$. Les égalités $\varkappa=K$, $\lambda=\Lambda$ donnent d'après (26) et (28) les identités $p(x)\equiv P(x)$, $q(x)\equiv Q(x)$, $r(x)\equiv R(x)$ et les formules (35), (36) donnent les solutions (I.1.2).

(I.2) $\lambda>0$, $\Lambda=0$. D'après (19) nous avons $Q(x)\equiv 0$, donc d'après (20) $p'(x)=\varkappa p(x)$ et d'après (21) $P'(x)=KP(x)$. De là nous obtenons

(37) $$p(x)=e^{\varkappa x},\qquad P(x)=e^{Kx}.$$

L'égalité (18) implique

(38) $$q'(x)=\lambda e^{(\varkappa+K)x}.$$

Or $\varkappa\leqslant 0$, $K\leqslant 0$ puisque $p(0)=P(0)=1$. Mais il est impossible que l'on ait $\varkappa+K=0$, parce que, si cette égalité était remplie, on aurait d'après (38), $q(x)=\lambda x$ et la fonction $q(x)$ ne serait pas bornée. Ainsi $\varkappa+K<0$ et l'égalité (38) donne



(39) $$q(x)=\frac{\lambda}{\varkappa+K}(e^{(\varkappa+K)x}-1).$$

Des formules (37) et (39) proviennent les solutions (I.2).

(I.3) $\lambda=\Lambda=0$. Les formules (37) et (38) restent valables. Or, dans le cas I $q(0)=0$, donc (38) implique $q(x)\equiv 0$; ainsi nous obtenons les solutions (I.3).

(II) $P(0)=0$. L'équation (7) implique $P(x)\equiv 0$ et (4), (8), (9) impliquent que les fonctions $q(x), Q(x), R(x)$ sont aussi des constantes. Posons donc d'après (6)

(40) $$q(x)\equiv q,\qquad Q(x)\equiv Q,\qquad R(x)\equiv 1-Q,$$

où, d'après (1) et (13), $0\leqslant q\leqslant 1$, $0\leqslant Q\leqslant 1$, $qQ<1$.

L'égalité (3) donne

(41) $$p(x+y)=\frac{p(x)p(y)}{1-qQ}.$$

(II.1) $p(0)>0$. D'après (41) la fonction

$$L(x)=\log\frac{p(x)}{1-qQ}$$

satisfait à l'équation fonctionnelle de Cauchy $L(x+y)=L(x)+L(y)$ et est continue, donc $L(x)=lx$ et $p(x)=(1-qQ)e^{lx}$, où, suivant (1) et (13), il doit être $l\leqslant 0$.

L'équation (2) donne

$$r(x)=1-(1-qQ)e^{lx}-q=(1-q)(1-e^{lx})+q(Q-1)e^{lx}.$$

Ainsi $r(0)=q(Q-1)$. D'après (13) $r(0)\geqslant 0$ et $Q\leqslant 1$. Il en vient que ou bien $q=0$ (cas (II.1.1)), ou bien $q>0$ et $Q=1$ (cas (II.1.2)). Dans les deux cas

(42) $$r(x)=(1-q)(1-e^{lx}),$$

(43) $$p(x)=(1-q)e^{lx}.$$

Les formules (40), (42) et (43) donnent pour $q=0$ les solutions (II.1.1) (dans le cas $l=p'(0)=\varkappa$) et pour $q>0$ les solutions (II.1.2).

Les solutions (II.1.1*) et (II.1.2*) s'obtiennent de la même manière.

(II.2) $p(0)=0$, $P(0)=0$. On trouve d'après (3) et (7) que $p(x)\equiv 0$ et $P(x)\equiv 0$. Les relations (40) restent valables et, d'après (2),

$$r(x)\equiv 1-q.$$

Ainsi les solutions (II.2) sont obtenues.

**1.4. Les valeurs asymptotiques des fonctions.** Nous nous occuperons des valeurs des fonctions $p, q, r, P, Q, R$ pour $x\to\infty$. Nous discuterons seulement le cas (I) ($p(0)=P(0)=1$) qui a un sens physique clair (voir § 1.2).

(I.1.1) $\lambda, \Lambda, \alpha>0$. D'après (15) il est $\varkappa<0$ et $K<0$. Les formules (I.1.1) pour les fonctions $p, q, P, Q$ (nous omettrons celles de $r$ et $R$ d'après (2) et (6)) peuvent être autrement écrites:

$$\begin{aligned} p(x)&=\frac{2\alpha e^{(\alpha+\delta)x}}{(\alpha-\sigma)e^{2\alpha x}+\alpha+\sigma}, & P(x)&=\frac{2\alpha e^{(\alpha-\delta)x}}{(\alpha-\sigma)e^{2\alpha x}+\alpha+\sigma},\\ q(x)&=\frac{\lambda(e^{2\alpha x}-1)}{(\alpha-\sigma)e^{2\alpha x}+\alpha+\sigma}, & Q(x)&=\frac{\Lambda(e^{2\alpha x}-1)}{(\alpha-\sigma)e^{2\alpha x}+\alpha+\sigma}.\end{aligned}\tag{44}$$

Comme $\alpha>0$, nous en obtenons pour $x\to\infty$ les égalités asymptotiques suivantes:

$$p(x)\sim\frac{2\alpha}{\alpha-\sigma}\,e^{-(\alpha-\delta)x},\qquad P(x)\sim\frac{2\alpha}{\alpha-\sigma}\,e^{-(\alpha+\delta)x},$$

$$q(x)\sim\frac{\lambda}{\alpha-\sigma}\left(1-\frac{2\alpha}{\alpha-\sigma}\,e^{-2\alpha x}\right),\qquad Q(x)\sim\frac{\Lambda}{\alpha-\sigma}\left(1-\frac{2\alpha}{\alpha-\sigma}\,e^{-2\alpha x}\right).$$

Nous calculons que $4(\alpha^2-\delta^2)=(\varkappa+K)^2-4\lambda\Lambda-(\varkappa-K)^2=4(\varkappa K-\lambda\Lambda)\geqslant 0$ d'après (15). Ainsi $\alpha^2-\delta^2>0$, donc $\alpha-\delta>0$, $\alpha+\delta>0$ ou bien $\alpha^2=\delta^2$. Si $\alpha^2-\delta^2>0$, alors

$$\lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}P(x)=0,\qquad \lim_{x\to\infty}q(x)=\frac{\lambda}{\alpha-\sigma},\qquad \lim_{x\to\infty}Q(x)=\frac{\Lambda}{\alpha-\sigma}.$$

Si $\alpha^2=\delta^2$, alors $r(x)=R(x)\equiv 0$. Pour $\alpha=\delta$, nous avons $\varkappa K=\lambda\Lambda$ et d'après l'inégalité (15) il vient que $\varkappa=-\lambda$, $K=-\Lambda$. Alors

$$\begin{aligned} p(x)&\sim\frac{K-\varkappa}{K}, & P(x)&\sim\frac{K-\varkappa}{K}\,e^{(K-\varkappa)x},\\ q(x)&\sim\frac{\varkappa}{K}\left(1-\frac{K-\varkappa}{K}\,e^{(K-\varkappa)x}\right), & Q(x)&\sim 1-\frac{K-\varkappa}{K}\,e^{(K-\varkappa)x}.\end{aligned}\tag{45}$$



Pour $\alpha=-\delta$, on obtient

$$p(x)\sim\frac{\varkappa-K}{\varkappa}\,e^{(\varkappa-K)x},\qquad P(x)\sim\frac{\varkappa-K}{\varkappa},$$

$$q(x)\sim 1-\frac{\varkappa-K}{\varkappa}\,e^{(\varkappa-K)x},\qquad Q(x)\sim\frac{K}{\varkappa}\left(1-\frac{\varkappa-K}{\varkappa}\,e^{(\varkappa-K)x}\right).$$

Ainsi une et seulement une des expressions $\lim\limits_{x\to\infty}p(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}P(x)$ peut être différente de 0 (dans les autres cas $\lim\limits_{x\to\infty}p(x)=\lim\limits_{x\to\infty}P(x)=0$). Le sens probabilistique de ce fait est assez inattendu: *la probabilité du passage de la molécule par toute la droite peut être positive, mais seulement pour une seule direction du mouvement de la molécule.*

(I.1.2) $\lambda>0$, $\Lambda>0$, $\alpha=0$. Nous avons alors

$$\lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}P(x)=0,\qquad \lim_{x\to\infty}q(x)=\lim_{x\to\infty}Q(x)=1,\qquad \lim_{x\to\infty}r(x)=\lim_{x\to\infty}R(x)=0.$$

(I.2) $\lambda>0$, $\Lambda=0$. Nous avons alors

$$\lim_{x\to\infty}p(x)=0,\qquad \lim_{x\to\infty}P(x)=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}q(x)=-\frac{\lambda}{\varkappa+K},\qquad \lim_{x\to\infty}Q(x)=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}r(x)=1+\frac{\lambda}{\varkappa+K},\qquad \lim_{x\to\infty}R(x)=1.$$

**1.5. Le cas** $p=P$, $q=Q$, $r=R$. Il est naturel d'admettre que la matière réagit avec la même résistance pour les deux directions du mouvement de la molécule, c'est-à-dire que $p(x)\equiv P(x)$, $q(x)\equiv Q(x)$, $r(x)\equiv R(x)$ pour $x\geqslant 0$. Nous tirons alors du système (2)-(9) le système d'équations composé de (2) et de

$$p(x+y)=\frac{p(x)p(y)}{1-q(x)q(y)},\tag{46}$$

$$q(x+y)=q(x)+\frac{p^2(x)q(y)}{1-q(x)q(y)},\tag{47}$$

$$r(x+y)=r(x)+p(x)\cdot\frac{r(y)+q(y)r(x)}{1-q(x)q(y)}.\tag{48}$$

Toutes leurs solutions qui satisfont à l'inégalité (13) et à l'inégalité

(49) $$q(x) < 1 \quad \text{pour chaque} \quad x \geqslant 0$$

sont les suivantes:

A. *D'après* (I.1.1), *quand* $p(0) > 0$, $\lambda > 0$, $\alpha = \sqrt{\varkappa^2 - \lambda^2} > 0$,

$$p(x) = \frac{\alpha}{\alpha \cosh \alpha x - \varkappa \sinh \alpha x}, \qquad q(x) = \frac{\lambda \sinh \alpha x}{\alpha \cosh \alpha x - \varkappa \sinh \alpha x},$$

$$r(x) = 1 - \frac{\alpha + \lambda \sinh \alpha x}{\alpha \cosh \alpha x - \varkappa \sinh \alpha x}.$$

B. *D'après* (I.1.2), *quand* $p(0) > 0$, $\lambda > 0$, $\varkappa + \lambda = 0$,

(50) $$p(x) = \frac{1}{1 - \varkappa x}, \quad q(x) = -\frac{\varkappa x}{1 - \varkappa x}, \quad r(x) \equiv 0.$$

C. *D'après* (I.3), *quand* $p(0) > 0$, $\lambda = 0$,

(51) $$p(x) = e^{\varkappa x}, \quad q(x) \equiv 0, \quad r(x) = 1 - e^{\varkappa x}.$$

D. *D'après* (II.2), *quand* $p(0) = 0$,

$$p(x) \equiv 0, \quad q(x) \equiv q, \quad r(x) \equiv 1 - q.$$

Une solution directe du système (2), (46)-(48) peut être obtenue d'une manière analogue à celle du § 1.3 pour le système (2)-(9), mais notons encore que pour obtenir les fonctions $p$ et $q$ dans les cas A, B, C (quand $p(0) = 1$) l'équation (47) seule est suffisante (moyennant (13) et (49)). Nous en dérivons l'équation différentielle

(52) $$q'(x) = \lambda p^2(x).$$

D'autre part, d'après la symétrie de $q(x+y)$ en $x$ et $y$ on obtient l'égalité analogue à (24)

(53) $$2\varkappa q(x) = \lambda [p^2(x) - q^2(x) - 1].$$

Les fonctions $p$ et $q$ s'obtiennent des équations (52) et (53). Pour obtenir $r$ il suffit alors d'utiliser (2) ((48) résulte de (2), (46), (47)).

Note ajoutée pendant la correction. Récemment nous avons pris connaissance d'un travail de M. R. M. Redheffer, *Novel uses of functional equations*, Journal of rational mechanics and analysis 3 (1954), p. 271-279, qui traite un problème analogue. On y trouve les équations (46) et (48) de C. Ryll-Nardzewski.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

*Reçu par la Rédaction le 18. 5. 1955*

# Some remarks on the existence and uniqueness of solutions of the hyperbolic equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$

by

A. ALEXIEWICZ and W. ORLICZ (Poznań)

In this paper we prove some facts concerning the partial differential equation of the hyperbolic type

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

First, we prove an existence theorem for the case where the initia data are prescribed on two intersecting characteristics. The classical proof carried out by the method of successive approximation (Kamke [4][1]), p. 402) uses in an essential way the hypothesis that the function $f(x, y, z, p, q)$ satisfies a Lipschitz condition with respect to $p, q$ and to $z$. Schauder ([6], p. 56) has proved the same assuming that the function $f$ satisfies a Hölder condition with respect to $x, y, z$ and a Lipschitz one with respect to $p$ and $q$; the proof is based on the fixed-point theorem in Banach spaces (Schauder [7]). Recently Hartman and Wintner[2]) have shown that, for the existence of a solution, it suffices to suppose that the function $f$ is continuous, bounded, and satisfies a Lipschitz condition only with respect to $p$ and $q$. Perhaps the shortest way of proving this theorem is the use of the fixed-point theorem of Schauder. We give here a proof of the theorem of Hartman and Wintner, using quite elementary and standard methods; the application in the proof of a Banach space *via* the vector-valued functions is made only for the sake of brevity and may easily be omitted. The ideas of this proof are basic for the rest of the present paper.

Next we give a proof of continuous dependence of the solutions on the initial data and on the function $f$. Then we prove a category-

[1]) Numbers in brackets refer to the bibliography at the end of this paper.
[2]) [3], see also [2]; both papers were unavailable for the authors.