Sur quelques équations intégro-différentielles

par

J. MIKUSIŃSKI (Warszawa)

1. Supposons que les fonctions $p(t)$ et $q(t)$ soient continues dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant T$ et que l'une au moins d'elles ne s'annulle pas identiquement au voisinage de $t=0$. Supposons de plus qu'une fonction de deux variables $x(\lambda, t)$ soit continue sur le triangle

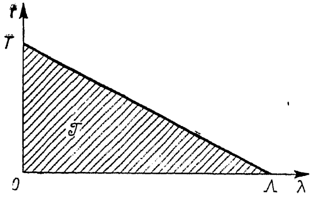

Fig. 1

$$\mathcal{T}\left[0 \leqslant \frac{\lambda}{\Lambda} \leqslant \frac{\lambda}{\Lambda} + \frac{t}{T} \leqslant 1\right],$$

ainsi que sa dérivée partielle $x_\lambda(\lambda, t)$. Ceci posé on a le théorème suivant:

Si $x(\lambda,t)$ satisfait, dans $\mathcal{T}$, à l'équation

$$(1) \qquad \int_0^t p(t-\tau) x_\lambda(\lambda,\tau)\, d\tau = \int_0^t q(t-\tau) x(\lambda,\tau)\, d\tau,$$

avec la condition initiale $x(0,t)=0$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$, on a $x(\lambda,t)=0$ identiquement sur le triangle $\mathcal{T}$.

Ce théorème, démontré dans un travail antérieur [1], subsiste lorsqu'on remplace l'équation (1) par l'une quelconque des équations suivantes:

$$(2) \qquad \int_0^t p(t-\tau) x_\lambda(\lambda,\tau)\, d\tau = x(\lambda,t),$$

$$(3) \qquad x_\lambda(\lambda,t) = \int_0^t q(t-\tau) x(\lambda,\tau)\, d\tau.$$

(Dans les cas (2) et (3) la supposition que $p(t)$ ou $q(t)$ soit non identiquement nulle au voisinage de $t=0$ devient superflue.) Les démonstrations du théorème pour (2) et (3) sont analogues et n'exigent que des modifications évidentes. On peut, d'ailleurs, obtenir les théorèmes pour (2)

et (3) directement du théorème précédent; en effet, en intégrant l'équation (2) par rapport à t, on a

$$(4) \qquad \int_0^t p_1(t-\tau) x_\lambda(\lambda,\tau)\, d\tau = \int_0^t q_1(t-\tau) x(\lambda,\tau)\, d\tau,$$

où $p_1(t) = \int_0^t p(\tau)\, d\tau$ et $q_1(t)=1$; pareillement, l'intégration de (3) conduit à la même équation (4) avec $p_1(t)=1$ et $q_1(t)=\int_0^t q(\tau)\, d\tau$.

Le théorème précédent devient en général faux (voir l'exemple à la fin de [1]) lorsqu'on remplace le triangle $\mathcal{T}$ par le rectangle

$$\mathcal{R}[0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda,\ 0 \leqslant t \leqslant T].$$

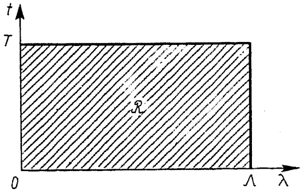

Fig. 2

Nous montrerons cependant dans cette note qu'il reste vrai pour l'équation (3); de plus, il le reste encore pour les équations (1) et (2), si l'on impose aux fonctions $p(t)$ et $q(t)$ des restrictions convenables.

2. Supposons que les fonctions $p(t)$ et $q(t)$ soient sommables sur l'intervalle $[0, T]$. Supposons de plus que la fonction $x(\lambda,t)$ et sa dérivée $x_\lambda(\lambda,t)$ soient continues sur $\mathcal{R}$ et que $x(0,t)=0$. Ceci posé, on a les théorèmes suivants:

(I) *Si $x(\lambda,t)$ satisfait dans $\mathcal{R}$ à l'équation* (3), *on a $x(\lambda,t)=0$ identiquement sur $\mathcal{R}$.*

(II) *Si $p(t) \leqslant 0$ et si $x(\lambda,t)$ satisfait dans $\mathcal{R}$ à l'équation* (2), *on a $x(\lambda,t)=0$ identiquement sur $\mathcal{R}$.*

(III) *Si $p(t) \geqslant 0$, $\int_0^t p(\tau)\, d\tau \geqslant kt^a$ $(k>0,\ 0<a<1)$ et si $x(\lambda,t)$ satisfait dans $\mathcal{R}$ à l'équation* (1) *ou à l'équation* (2), *on a $x(\lambda,t)=0$ identiquement sur $\mathcal{R}$.*

(IV) *Si les fonctions $p(t)$ et $q(t)$ sont absolument continues sur $[0,T]$, $p(0) \neq 0$, et si $x(\lambda,t)$ satisfait dans $\mathcal{R}$ à l'équation* (1), *on a $x(\lambda,t)=0$ identiquement sur $\mathcal{R}$.*

La méthode de démonstration de ces théorèmes sera tout-à-fait différente de celle pour le triangle. Nous emploierons cependant une modification de la méthode dont nous nous sommes servis pour démontrer la non-existence des fonctions $e^{-s^a \lambda}$ $(a>1)$ du calcul opérationnel (voir [3], en particulier p. 215-218). En particulier nous nous appuyerons sur le lemme suivant[1]):

[1]) Ce lemme est un corollaire immédiat du lemme 2 de l'article [3].

Lemme. *Si les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ (réelles ou complexes) sont sommables dans l'intervalle $[0,T]$ et si*

$$h(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau,$$

on a pour $\sigma\geqslant 0$

$$\Big|\int_0^T e^{-\sigma t}f(t)\,dt\cdot\int_0^T e^{-\sigma t}g(t)\,dt-\int_0^T e^{-\sigma t}h(t)\,dt\Big|\leqslant e^{-\sigma T}\int_0^T|f(t)|\,dt\cdot\int_0^T|g(t)|\,dt.$$

Posons

$$X(\lambda,\sigma)=\int_0^{T(\lambda)} e^{\sigma[T(\lambda)-t]}x(\lambda,t)\,dt,\qquad Y(\lambda,\sigma)=\int_0^{T(\lambda)} e^{\sigma[T(\lambda)-t]}x_\lambda(\lambda,t)\,dt,$$

$$P(\lambda,\sigma)=\int_0^{T(\lambda)} e^{-\sigma t}p(t)\,dt,\qquad Q(\lambda,\sigma)=\int_0^{T(\lambda)} e^{-\sigma t}q(t)\,dt,$$

où $T(\lambda)$ est une fonction continue et décroissante sur l'intervalle $[0,\Lambda]$, dérivable dans $(0,\Lambda)$ et telle que $T(0)=T$, $T(\Lambda)=0$.

Multiplions les équations (1), (2) et (3) par $e^{\sigma[T(\lambda)-t]}$ et intégrons les de 0 à $T(\lambda)$. Grâce au lemme précédent, nous sommes conduits, pour $\sigma\geqslant 0$, à l'inégalité

$$|P(\lambda,\sigma)\,Y(\lambda,\sigma)-Q(\lambda,\sigma)\,X(\lambda,\sigma)|\leqslant M(\lambda),$$

où $P(\lambda,\sigma)=1$ dans le cas de (3) et $Q(\lambda,\sigma)=1$ dans le cas de (2); $M(\lambda)$ est une fonction continue dans $[0,\Lambda]$, qui ne dépend pas de σ.

Il est facile de vérifier que

$$X_\lambda(\lambda,\sigma)=T'(\lambda)x\big(\lambda,T(\lambda)\big)+T'(\lambda)X(\lambda,\sigma)+Y(\lambda,\sigma);$$

on a donc

(5) $$R(\lambda,\sigma)\cdot|x(\lambda,\sigma)|\leqslant M(\lambda)+|P(\lambda,\sigma)|\cdot|T'(\lambda)x\big(\lambda,T(\lambda)\big)-x_\lambda(\lambda,\sigma)|,$$

où $R(\lambda,\sigma)=|\sigma P(\lambda,\sigma)T'(\lambda)+Q(\lambda,\sigma)|$.

Soit λ_0,t_0 un point quelconque à l'intérieur de $\mathcal{R}$. Nous démontrerons qu'il est possible, dans les conditions des théorèmes (I) et (II), de choisir la fonction $T(\lambda)$ de manière que $T(\lambda_0)>t_0$ et qu'il existe un nombre positif σ tel que

(6) $$R(\lambda,0)>1\quad\text{pour}\quad\sigma>\sigma_0\quad\text{et}\quad 0\leqslant\lambda\leqslant\Lambda.$$

Dans le cas du théorème (I) choisissons $T(\lambda)$ d'une manière quelconque, pourvu que $T(\lambda_0)>t_0$ et $-M<T'(\lambda)<-\mu<0$ pour $0\leqslant\lambda\leqslant\Lambda$. Alors on a $R(\lambda,\sigma)>\sigma\mu-|Q(\lambda,\sigma)|$. Comme

(7) $$|Q(\lambda,\sigma)|\leqslant\int_0^T|q(t)|\,dt=Q,$$

on a (6) pour σ_0 assez grand.

Dans le cas du théorème (II) on a $P(\lambda,\sigma)\leqslant 0$. En choisissant $T(\lambda)$ comme précédemment, on aura $R(\lambda,\sigma)\geqslant-\sigma\mu P(\lambda,\sigma)+1\geqslant 1$.

Fixons arbitrairement $\sigma>\sigma_0$ et désignons par λ_σ le point de $[0,\Lambda]$, où le module de $X(\lambda,\sigma)$ atteint son maximum. On a alors $X_\lambda(\lambda_\sigma,\sigma)=0$, car $X(0,\sigma)=X(\Lambda,\sigma)=0$. D'après (5) et (6) on a donc

$$|X(\lambda,\sigma)|\leqslant|X(\lambda_\sigma,\sigma)|\leqslant M(\lambda_\sigma)+|P(\lambda_\sigma,\sigma)T'(\lambda_\sigma)|\,x\big(\lambda_\sigma,T(\lambda_\sigma)\big).$$

Les fonctions $M(\lambda)$ et $x\big(\lambda,T(\lambda)\big)$ sont continues sur $[0,\Lambda]$, donc bornées. De plus, on a $|P(\lambda,\sigma)T'(\lambda)|\leqslant\int_0^T|p(t)|\,dt\cdot\mu$, donc

(8) $$|X(\lambda,\sigma)|\leqslant N\quad\text{pour}\quad 0\leqslant\lambda\leqslant\Lambda\quad\text{et}\quad\sigma>\sigma_0,$$

où N est une constante.

Un raisonnement un peu plus fin permet d'établir la même inégalité (8) aussi dans les conditions du théorème (III), la fonction $T(\lambda)$ et les nombres N et σ étant convenablement choisis. Dans ce cas, on a pour $\sigma>1$

$$P(\lambda,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\cdot\int_0^{\sigma T(\lambda)}e^{-\tau}p\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)d\tau>\frac{e^{-T}}{\sigma}\cdot\int_0^{T(\lambda)}p\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)d\tau=e^{-T}\cdot\int_0^{T(\lambda)/\sigma}p(t)\,dt=e^{-T}\left(\frac{T(\lambda)}{\sigma}\right)^\alpha.$$

Choisissons un nombre k de manière que $t_0<k\sqrt[1+\alpha]{\Lambda-\lambda_0}<T$ et posons $T(\lambda)=k\sqrt[1+\alpha]{\Lambda-\lambda}$ pour $\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\Lambda$; on peut prolonger $T(\lambda)$ sur l'intervalle $0\leqslant\lambda\leqslant\Lambda$ tout entier de manière que $T'(\lambda)<-\mu<0$ dans $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$. On aura alors

$$-P(\lambda,\sigma)T'(\lambda)>\begin{cases}e^{-T}t_0^\alpha\mu\sigma^{-\alpha} & \text{pour}\quad 0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0,\\ -e^{-T}[T(\lambda)^{1+\alpha}]'\sigma^{-\alpha}=e^{-T}k^{1+\alpha}\sigma^{-\alpha} & \text{pour}\quad\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\Lambda.\end{cases}$$

Il existe donc un nombre $\varrho>0$ pour lequel

(9) $$-P(\lambda,\sigma)T'(\lambda)>\varrho\sigma^{-\alpha}\quad\text{pour}\quad 0\leqslant\lambda\leqslant\Lambda.$$

En vertu de (7), il s'ensuit que l'inégalité (6) est satisfaite pour σ_0 assez grand.

En divisant (5) par $R(\lambda,\sigma)$, on peut écrire après quelques transformations faciles

$$|x(\lambda,\sigma)|\leqslant M(\lambda)+S(\lambda,\sigma)|x\big(\lambda,T(\lambda)\big)|+|P(\lambda,\sigma)|\cdot|X_\lambda(\lambda,\sigma)|,$$

où

$$S(\lambda,\sigma)=\left|\sigma+\frac{Q(\lambda,\sigma)}{P(\lambda,\sigma)T'(\lambda)}\right|^{-1}.$$

En vertu de (7) et (9) on a

$$S(\lambda,\sigma)\leqslant\left(\sigma-\frac{Q}{\varrho}\sigma^{a}\right)^{-1}<1 \quad \text{pour} \quad \sigma>\sigma_0,$$

pourvu que σ_0 soit assez grand.

Fixons arbitrairement $\sigma>\sigma_0$ et désignons, comme précédemment, par λ_σ le point où le module de $X(\lambda,\sigma)$ atteint son maximum. On a $X_\lambda(\lambda_\sigma,\sigma)=0$ et, par conséquent,

$$|X(\lambda,\sigma)|\leqslant|X(\lambda_\sigma,\sigma)|\leqslant M(\lambda_\sigma)+\left|x(\lambda_\sigma,T(\lambda_\sigma))\right| \quad \text{pour} \quad \sigma>\sigma_0,$$

ce qui conduit à l'inégalité (8).

En écrivant l'inégalité (8) explicitement,

$$\left|\int_0^{T(\lambda)} e^{\sigma[T(\lambda)-t]}x(\lambda,t)\,dt\right|\leqslant N,$$

on conclut d'après des théorèmes des moments ([2] et [4]) que $x(\lambda,t)=0$ identiquement dans le domaine $0\leqslant\lambda\leqslant\Lambda$, $0\leqslant t\leqslant T(\lambda)$, qui contient en particulier le point λ_0,t_0. Or, ce point a été fixé arbitrairement dans le rectangle $\mathcal{R}$, on a donc $x(\lambda,t)=0$ dans $\mathcal{R}$ et, en vertu de la continuité de $x(\lambda,t)$, on a encore $x(\lambda,t)=0$ sur le rectangle $\mathcal{R}$ avec sa frontière.

Les théorèmes (I), (II) et (III) se trouvent donc établis.

Occupons-nous enfin du théorème (IV). Alors il y a une fonction $r(t)$, satisfaisant à l'équation

$$\int_0^t p(t-\tau)r(\tau)\,d\tau=q(t).$$

En effet, cette équation est équivalente avec l'équation dérivée

$$p(0)r(t)+\int_0^t p'(t-\tau)r(\tau)\,d\tau=q'(t),$$

dont la théorie est bien connue. D'après le théorème de Titchmarsh sur le produit de composition, on tire de (1)

$$x(\lambda,t)=\int_0^t r(t-\tau)x(\lambda,\tau)\,d\tau \qquad (0\leqslant\lambda\leqslant\Lambda,\quad 0\leqslant t\leqslant T),$$

ce qui nous ramène au cas du théorème (I).

Travaux cités

[1] L. Finkelsztejn, J. Mikusiński et C. Ryll-Nardzewski, *Sur une équation intégro-différentielle*, Coll. Math. 2 (1951), p. 178-181.

[2] J. Mikusiński, *A theorem on moments*, Stud. Math. 12 (1951), p. 192-193.

[3] J. Mikusiński, *Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire*, Stud. Math. 12 (1951), p. 208-224.

[4] — and C. Ryll-Nardzewski, *A theorem on bounded moments*, Stud. Math. 13 (1953), p. 51-55.

Reçu par la Rédaction le 10. 4. 1955