Sur la force latérale exercée sur un obstacle par un liquide visqueux compressible

par

A. KRZYWICKI (Wrocław)

Je considère le *mouvement spacieux d'un liquide visqueux, compressible, remplissant tout l'espace à l'extérieur d'une surface fermée Σ de dimensions finies, qui, sans se déformer, se déplace parallèlement à une droite avec une vitesse constante égale à* W_0 [1]).

Soit XYZ un système de coordonnées lié à la surface Σ, l'axe Z étant parallèle à la vitesse de Σ. Soient u, v, w les composantes de la vitesse du liquide par rapport au système immobile, parallèle au système XYZ; soient p, ϱ, μ, ν respectivement la pression, la densité et les coefficients de la viscosité du liquide. J'admets que *les forces extérieures sont nulles* et, pour simplifier, que la surface Σ possède partout une normale continue.

Les équations du mouvement ont la forme

$$
\begin{aligned}
&\varrho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+(w-W_0)\frac{\partial u}{\partial z}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial \Theta}{\partial x}+\mu\Delta u,\\
(1)\quad &\varrho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+(w-W_0)\frac{\partial v}{\partial z}\right]=-\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\frac{\partial \Theta}{\partial y}+\mu\Delta v,\\
&\varrho\left[\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+(w-W_0)\frac{\partial w}{\partial z}\right]=-\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\frac{\partial \Theta}{\partial z}+\mu\Delta w,
\end{aligned}
$$

où

$$\Theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},\qquad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

L'équation de continuité s'écrit:

$$(2)\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\varrho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\varrho v)+\frac{\partial}{\partial z}[\varrho(w-W_0)]=0.$$

[1]) Le cas du mouvement plan du liquide visqueux, incompressible a été considéré par M. Wolibner [2] et le cas du liquide compressible par l'auteur [1].

J'admets que les conditions suivantes sont satisfaites:

I. *Le liquide adhère à la surface* Σ, on aura donc sur cette surface

$$(3)\qquad u=v=0,\qquad w=W_0.$$

II. *L'énergie cinétique du mouvement* $\mathcal{E}$ *est finie:*

$$(4)\qquad \mathcal{E}=\tfrac{1}{2}\iiint\varrho(u^2+v^2+w^2)\,d\omega<+\infty,$$

l'intégration étant étendue sur tout l'espace extérieur à la surface Σ.

III. *Il existe une constante* M *telle que*

$$(5)\qquad \iiint\limits_{\pi'}\varrho\,d\omega\leqslant M\iiint\limits_{\pi}d\omega,$$

$$(6)\qquad \iiint\limits_{\pi'}\frac{1}{\varrho}\,d\omega\leqslant M\iiint\limits_{\pi'}d\omega,$$

où π est un cylindre à l'axe Z, contenant $\sum$ et symétrique au plan XY; la moitié de sa hauteur est égale au carré de son rayon [2]); π' est la portion de π extérieure à $\sum$;

IV. u, v, w, p, ϱ *et ces dérivées de ces fonctions, qui figurent dans* (1) *et* (2), *sont continues* [3]).

Il existe alors deux suites de surfaces cylindriques Φ_n *et* Φ'_n *définies ci-dessous, croissantes infiniment, telles que*

$$(7)\qquad P_x=-\lim_{n\to\infty}\left[\iiint\limits_{\Omega_n}\frac{\partial(\varrho u)}{\partial t}\,d\omega+R_n\iint\limits_{\Gamma_n}\frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t}\sin\varphi\,d\sigma\right],$$

$$(8)\qquad P_y=-\lim_{n\to\infty}\left[\iiint\limits_{\Omega'_n}\frac{\partial(\varrho v)}{\partial t}\,d\omega-R'_n\iint\limits_{\Gamma'_n}\frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t}\cos\varphi\,d\sigma\right],$$

$$k\leqslant\frac{R_n^2}{h_n}\leqslant K,$$

$$k\leqslant\frac{R_n'^2}{h'_n}\leqslant K,$$

[2]) L'hypothèse sur π est choisie à cause de la méthode utilisée. Il est évident qu'il suffit d'admettre que les conditions (5) et (6) sont remplies seulement pour une suite de domaines χ_n, $\chi_n=\Pi_n-\pi_n$, Π_n désignant le cylindre $0\leqslant r\leqslant 2\lambda_n$, $-2\lambda_n^2\leqslant z\leqslant 2\lambda_n^2$, et π_n — le cylindre $0\leqslant r\leqslant\lambda_n$, $|-\lambda_n^2\leqslant z\leqslant\lambda_n^2$, $\{\lambda_n\}$ étant une suite arbitraire infiniment croissante; $r^2=x^2+y^2$.

[3]) Ces conditions et la condition concernant la surface Σ peuvent être affaiblies (voir [1]).

P_x et P_y désignant les composantes latérales de la force exercée sur l'obstacle par le liquide, u_φ (u_r et u_z) les composantes cylindriques de la vitesse absolue du liquide par rapport au système XYZ, Ω_n le domaine contenu entre la surface Σ et la surface Φ_n, Γ_n la surface latérale, R_n le rayon de base de Φ_n, h_n la moitié de la hauteur du cylindre Φ_n, et k, K deux constantes positives.

Les composantes P_x et P_y s'expriment par les formules

$$P_x = \iint_\Sigma p n_x \, d\sigma - \nu \iint_\Sigma \Theta n_x \, d\sigma - \mu \iint_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma, \tag{9}$$

$$P_y = \iint_\Sigma p n_y \, d\sigma - \nu \iint_\Sigma \Theta n_y \, d\sigma - \mu \iint_\Sigma \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma, \tag{10}$$

n_x, n_y (et n_z) désignant les cosinus directeurs de la normale intérieure par rapport à la surface de l'intégration.

Il suffit de démontrer la formule (7), la démonstration de (8) étant complètement analogue. Soit Φ la surface d'un cylindre à l'axe Z et symétrique par rapport au plan XY. En ajoutant l'équation (2), multipliée par u, au côté gauche de la première équation de (1), en intégrant l'équation obtenue sur Ω et en tenant compte de (3) et (9), on obtient

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \frac{\partial(\varrho u)}{\partial t} \, d\omega + P_x = \iint_\Phi \varrho u \{u n_x + v n_y + (w - W_0) n_z\} \, d\sigma + \\ + \iint_\Phi p n_x \, d\sigma - \nu \iint_\Phi \Theta n_x \, d\sigma - \mu \iint_\Phi \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma.\end{aligned} \tag{11}$$

On a $\Phi = \Gamma + \Delta^+ + \Delta^-$, Δ^+ et Δ^- désignant les deux bases de Φ avec z positif et z négatif respectivement. Sur la surface Γ on a $n_x = -\cos\varphi$, $n_y = -\sin\varphi$, $n_z = 0$, sur la base Δ^+ $n_x = n_y = 0$, $n_z = -1$, et sur Δ^- $n_x = n_y = 0$, $n_z = -1$.

En tenant compte des dernières formules, l'équation (11) prend la forme

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \frac{\partial(\varrho u)}{\partial t} \, d\omega + P_x & \\ = -\iint_\Gamma \varrho u \{u \cos\varphi + v \sin\varphi\} \, d\sigma & - \iint_{\Delta^+} \varrho u (w - W_0) \, d\sigma + \\ + \iint_{\Delta^-} \varrho u (w - W_0) \, d\sigma & - \iint_\Gamma p \cos\varphi \, d\sigma + \\ + \nu \iint_\Gamma \Theta \cos\varphi \, d\sigma & - \mu \iint_\Phi \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma.\end{aligned} \tag{12}$$

En introduisant les coordonnées cylindriques, une des équations du mouvement et l'équation de continuité (2) deviennent respectivement

$$\begin{aligned}-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} - \nu \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}\right) = \varrho \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} - W_0 \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right) - \\ - \mu \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2}\right),\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u_r \frac{\partial \varrho}{\partial r} + u_\varphi \frac{\partial \varrho}{r \partial \varphi} + \\ + \frac{\varrho}{r}\left\{\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right\} + \frac{\partial(\varrho u_z)}{\partial z} - W_0 \frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0.\end{aligned} \tag{14}$$

En ajoutant au second membre de (13) le premier membre de (14), multiplié par u_φ, on obtient

$$\begin{aligned}-\left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} - \nu \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}\right) = r \frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \\ + 2\varrho u_r u_\varphi + r \frac{\partial(\varrho u_r u_\varphi)}{\partial r} + r \frac{\partial(\varrho u_\varphi u_z)}{\partial z} - \\ - W_0 r \frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial z} - \\ - \mu \left(r \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + r \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2}\right).\end{aligned}$$

Si l'on introduit les coordonnées cylindriques dans l'équation (12) en tenant compte des identités

$$\iint_\Gamma (p - \nu\Theta) \cos\varphi \, d\sigma = -\iint_\Gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} - \nu \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}\right) \sin\varphi \, d\sigma,$$

$$\iint_\Gamma \frac{\partial(\varrho u_\varphi^2)}{\partial \varphi} \sin\varphi \, d\sigma = -\iint_\Gamma \varrho u_\varphi^2 \cos\varphi \, d\sigma,$$

$$\iint_\Gamma \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \sin\varphi \, d\sigma = -\iint_\Gamma u_r \cos\varphi \, d\sigma,$$

$$\iint_\Gamma \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} \sin\varphi \, d\sigma = -\iint_\Gamma u_\varphi \sin\varphi \, d\sigma,$$

l'équation (12) prend la forme

$$F(R, h) = \sum_{i=1}^{4} [G_i(R, h) + g_i(R, h)] + \sum_{i=1}^{2} D_i(R, h) + d(R, h), \tag{15}$$

où

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
F(R,h) &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\varrho u)}{\partial t}\, d\omega + R\iint_{\Gamma} \frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t} \sin\varphi\, d\sigma + P_x, \\
G_1(R,h) &= -\iint_{\Gamma} \varrho u_r (u_r\cos\varphi - u_\varphi \sin\varphi)\, d\sigma + \\
&\quad + \iint_{\Gamma} \varrho u_\varphi^2 \cos\varphi\, d\sigma - 2\iint_{\Gamma} \varrho u_r u_\varphi \sin\varphi\, d\sigma, \\
G_2(R,h) &= -\iint_{\Gamma} R\,\frac{\partial(\varrho u_r u_\varphi)}{\partial r} \sin\varphi\, d\sigma, \\
G_3(R,h) &= -\iint_{\Gamma} R\,\frac{\partial(\varrho u_\varphi u_z)}{\partial z} \sin\varphi\, d\sigma, \\
G_4(R,h) &= W_0 \iint_{\Gamma} R\,\frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial z} \sin\varphi\, d\sigma, \\
g_1(R,h) &= -2\mu \iint_{\Gamma} \frac{1}{R}\, u_r \cos\varphi\, d\sigma - 2\mu \iint_{\Gamma} \frac{1}{R}\, u_\varphi \sin\varphi\, d\sigma, \\
g_2(R,h) &= \mu \iint_{\Gamma} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \sin\varphi\, d\sigma + \mu \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \cos\varphi - \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \sin\varphi \right) d\sigma, \\
g_3(R,h) &= \mu \iint_{\Gamma} R\, \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} \sin\varphi\, d\sigma, \\
g_4(R,h) &= \mu \iint_{\Gamma} R\, \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} \sin\varphi\, d\sigma, \\
D_1(R,h) &= -\iint_{\Delta+} \varrho u_z (u_r \cos\varphi - u_\varphi \sin\varphi)\, d\sigma + \\
&\quad + \iint_{\Delta-} \varrho u_z (u_r \cos\varphi - u_\varphi \sin\varphi)\, d\sigma, \\
D_2(R,h) &= W_0 \iint_{\Delta+} \varrho (u_r \cos\varphi - u_\varphi \sin\varphi)\, d\sigma - \\
&\quad - W_0 \iint_{\Delta-} \varrho (u_r \cos\varphi - u_\varphi \sin\varphi)\, d\sigma, \\
d(R,h) &= \mu \iint_{\Delta+} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \cos\varphi - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \sin\varphi \right) d\sigma - \\
&\quad - \mu \iint_{\Delta-} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \cos\varphi - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \sin\varphi \right) d\sigma;
\end{aligned}
\right.
$$

h désigne la moitié de la hauteur du cylindre Φ.

On verra qu'il existe deux suites $\{R_n\}$ et $\{h_n\}$ infiniment croissantes, $k \leqslant R_n^2/h_n \leqslant K$, telles que

$$(17)\qquad \lim_{n\to\infty} F(R_n, h_n) = 0.$$

Dans ce but nous allons démontrer que

$$(18)\qquad \lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{\gamma^3\eta^2} \int_{\gamma}^{2\gamma}\int_{\beta}^{2\beta}\int_{\alpha}^{2\alpha} dR\, d\alpha\, d\beta \int_{\eta}^{2\eta}\int_{\zeta}^{2\zeta} F(R,h)\, dh\, d\zeta = 0, \qquad \gamma^2 \leqslant \eta \leqslant 2\gamma^2.$$

Des formules (18) résultent les inégalités

$$(19)\qquad \gamma \leqslant \beta \leqslant 2\gamma, \quad \gamma \leqslant \alpha \leqslant 4\gamma, \quad \gamma \leqslant R \leqslant 8\gamma, \quad \gamma^2 \leqslant \zeta \leqslant 4\gamma^2, \quad \gamma^2 \leqslant h \leqslant 8\gamma^2.$$

En vertu de (4) on a $\iiint \varrho (u_r^2 + u_\varphi^2 + u_z^2)\, d\omega < \infty$, donc

$$\lim_{\gamma\to\infty} \int_{\alpha}^{2\alpha} dR \iint_{\Gamma} \varrho u_r^2\, d\sigma = 0 \quad \text{où} \quad \gamma \leqslant \alpha \leqslant 4\gamma, \quad \gamma^2 \leqslant h \leqslant 8\gamma^2,$$

et de même pour u_φ et u_z. La manière de la croissance à l'infini de α et de h est définie par les formules (19). *Dans la suite* on emploie l'opération lim *en tenant compte de* (19). D'après l'inégalité de Schwarz on a la relation

$$\lim_{\gamma\to\infty} \int_{\alpha}^{2\alpha} dR \iint_{\Gamma} \varrho |u_r u_\varphi|\, d\sigma = 0, \quad \text{donc} \quad \lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha}^{2\alpha} G_1(R,h)\, dR = 0, \quad \text{où}$$

$$(20)\qquad \lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{\gamma^3\eta^2} \int_{\gamma}^{2\gamma}\int_{\beta}^{2\beta}\int_{\alpha}^{2\alpha} dR\, d\alpha\, d\beta \int_{\eta}^{2\eta}\int_{\zeta}^{2\zeta} G_1(R,h)\, dh\, d\zeta = 0.$$

En intégrant le terme G_2 deux fois, on obtient

$$\left| \int_{\beta}^{2\beta}\int_{\alpha}^{2\alpha} G_2(R,h)\, dR\, d\alpha \right| \leqslant 4\beta \int_{\beta}^{4\beta} dR \iint_{\Gamma} \varrho |u_r u_\varphi|\, d\sigma + \int_{\beta}^{2\beta}\int_{\alpha}^{2\alpha} dR\, d\alpha \iint_{\Gamma} \varrho |u_r u_\varphi|\, d\sigma.$$

Il s'ensuit

$$(21)\qquad \lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{\beta^2} \int_{\beta}^{2\beta}\int_{\alpha}^{2\alpha} G_2(R,h)\, dR\, d\alpha = 0,$$

d'où l'on obtient une formule analogue à (20). Pareillement

$$(22)\qquad \lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{\alpha\zeta} \int_{\alpha}^{2\alpha} dR \int_{\zeta}^{2\zeta} G_3(R,h)\, dh = 0.$$

De l'inégalité

$$\left| \int_{\alpha}^{2\alpha} dR \int_{\zeta}^{2\zeta} G_4(R,h)\, dh \right| \leqslant \text{const}\cdot\alpha \int_{\alpha}^{2\alpha}\int_{\zeta}^{2\zeta}\int_{0}^{2\pi} \varrho |u_\varphi|\, dR\, dh\, d\varphi$$

on tire, en tenant compte de l'inégalité de Schwarz et de (5),

$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{a^2\sqrt{\zeta}} \int_a^{2a} dR \int_\zeta^{2\zeta} G_4(R,h)\, dh = 0,$$

(23)
$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{a\zeta} \int_a^{2a} dR \int_\zeta^{2\zeta} G_4(R,h)\, dh = 0.$$

Un calcul semblable à celui qui a fourni (21) et (24) donne maintenant

(24)
$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{\zeta} \int_\zeta^{2\zeta} D_1(R,h)\, dh = 0, \qquad \lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{\zeta} \int_\zeta^{2\zeta} D_2(R,h)\, dh = 0.$$

On a

(25)
$$\left| \int_a^{2a} dR \iint_\Gamma \frac{1}{R} u_r \cos\varphi\, d\sigma \right| \leqslant \frac{1}{a} \left[\int_a^{2a} dR \iint_\Gamma \varrho u_r^2 d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^{2a} dR \iint_\Gamma \frac{1}{\varrho}\, d\sigma \right]^{\frac{1}{2}},$$

et une formule analogue pour le deuxième terme de g_1. En vertu de l'inégalité (25) et de (6) on obtient

$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{\sqrt{h}} \int_a^{2a} dR \iint_\Gamma \frac{1}{R} u_r \cos\varphi\, d\sigma = 0,$$

ou, en tenant compte de (19),

(26)
$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{a} \int_a^{2a} g_1(R,h)\, dR = 0.$$

On obtient d'une manière analogue les égalités

(27)
$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{\beta^2} \int_\beta^{2\beta}\int_a^{2a} g_2(R,h)\, dR\, da = 0, \qquad \lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{\gamma^2} \int_\gamma^{2\gamma}\int_\beta^{2\beta}\int_a^{2a} g_3(R,h)\, dR\, da\, d\beta = 0,$$
$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{a\eta^2} \int_a^{2a} dR \int_\eta^{2\eta}\int_\zeta^{2\zeta} g_4(R,h)\, dh\, d\zeta = 0, \qquad \lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{\eta^2} \int_\eta^{2\eta}\int_\zeta^{2\zeta} d(R,h)\, dh\, d\zeta = 0.$$

Enfin, de (20)-(24) et de (26) et (27) on déduit (18). En posant $\eta=\gamma^2$ et en désignant par $m(\gamma)$ le minimum de $|F(R,h)|$ lorsque $\gamma\leqslant R\leqslant 8\gamma$ et $\gamma^2\leqslant h\leqslant 4\gamma^2$, on obient

$$\frac{21}{4}\gamma^7 m(\gamma) \leqslant \left| \int_\gamma^{2\gamma}\int_\beta^{2\beta}\int_a^{2a} dR\, da\, d\beta \int_{\gamma^2}^{2\gamma^2}\int_\zeta^{2\zeta} F(R,h)\, dh\, d\zeta \right|.$$

Cette inégalité, tenant compte de (18), achève la démonstration de (17) et de même de la formule (7), où on a posé $k=1/4$, $K=64$.

Si le mouvement est permanent par rapport au système XYZ, il résulte de (7) *et* (8) *que le liquide n'exerce aucune force latérale sur la surface Σ.*

Si les mouvements exercent une force latérale sur l'obstacle, ce qui a lieu dans la majorité des phénomènes physiques et techniques, les mouvements du liquide ne peuvent être permanents.

Or, le problème de la force portante est une des questions principales de l'aérodynamique; à cause de sa difficulté, qui est considérable, on admet des hypothèses simplifiantes: on suppose que le mouvement de l'air (ou bien celui d'un liquide non-visqueux et compressible) soit plan et permanent, on néglige l'influence de la surface-limite (terre) et l'on prend comme point de départ l'équation de Bernoulli, qui résulte des équations du mouvement. Malheureusement, on obtient alors (cf. R. v. Mises, *Theorie des Fluges*) une énergie cinétique infinie. Il a été démontré [1] que les équations de Navier-Stokes conduisent, quand on néglige les forces extérieures, qui sont insignifiantes pour le cas de grandes vitesses, à une contradiction entre l'hypothèse de la permanence du mouvement du liquide et celle d'une énergie cinétique finie. Or, cette dernière hypothèse est toujours vérifiée par les mouvements réels; il s'ensuit que le corps mobile engendre des „perturbations" qui s'étendent aux domaines croissants de manière que toute portion du liquide ambiant en est troublée après un temps assez long, ce qui implique que le mouvement est instable. On aboutit aux conclusions analogues en étudiant un liquide incompressible, ce qui résulte du travail [2] de M. W. Wolibner.

De même que dans le cas du mouvement plan du liquide, nous avons obtenu les formules (7) et (8) sans tenir compte de l'équation caractéristique du liquide. Ces formules résultent des équations du mouvement et de l'équation de continuité seules. Les formules (7) et (8) sont valables pour une fonction arbitraire $p(x,y,z,t)$ et pour une vaste classe de mouvements, comme dans le cas du mouvement du liquide hétérogène, incompressible ou compressible, et même dans le cas où l'équation caractéristique du liquide dépend du temps.

Travaux cités

[1] A. Krzywicki, *Sur le mouvement plan d'un liquide visqueux compressible*, ce volume, p. 113-122.

[2] W. Wolibner, *Sur le mouvement plan du liquide visqueux, incompressible, entourant une courbe simple fermée*, Studia Math. 12 (1951), p. 279-285.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 2. 3. 1955