Über den stochastischen Ergodensatz

von

S. GŁADYSZ (Wrocław)

Es sei X ein festgesetzter Parameterraum und Φ eine Familie von maßtreuen Abbildungen φ_x eines festgesetzten Raumes S in sich. Diese Abbildungen sind vom Parameter x abhängig. Laßt uns die stochastisch unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots$ (kurz mit x^* bezeichnet) nacheinander wählen und den Raum S der Reihe nach den Abbildungen $\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \ldots$ unterwerfen. Der Beweis der Existenz der Grenze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\varphi_{x_k} \ldots \varphi_{x_1} s) = f(s, x^*)$$

liefert keine Schwierigkeiten. Es genügt (wie Pitt [7], S. 342, zeigte) die Abbildung

$$\varphi^*(s; x_1, x_2, \ldots) = (\varphi_{x_1} s; x_2, x_3, \ldots)$$

des Produktes $S \times X \times X \times \ldots$ in sich zu betrachten.

Größere Schwierigkeiten treten auf, wenn man die Gestalt der Grenzfunktion f^* untersuchen will. Das Problem führt zur Untersuchung von Mengen, die invariant gegenüber φ^* sind. Die ersten Resultate in dieser Richtung haben Ulam und von Neumann [10] erhalten. Anzai [2] erhielt die Ergodizitätskriterien von φ^* für ein endliches X. Dagegen hat Kakutani [6], in ziemlich komplizierter Weise, dieses Problem allgemein gelöst. Beide letzten Arbeiten knüpfen an die Theorie der Markoffschen Prozesse und müssen darum die Umkehrbarkeit der Abbildungen φ_x voraussetzen. Daß diese Voraussetzung entbehrlich ist, zeigte Ryll-Nardzewski [9]. Er zeigte übrigens, und dabei auf ziemlich einfache Weise, daß die Grenzfunktion f^* immer von x^* wesentlich unabhängig ist. Die Ergebnisse von Kakutani folgen daraus unmittelbar.

In dieser Arbeit wird noch ein Beweis des stochastischen Ergodensatzes gegeben. Dieser Beweis stützt sich auf einen bekannten Satze von Jessen [1], betreffend die Konvergenz der Integrale einer in einem unendlichen Produkte bestimmten Funktion zu derselben Funktion. Diese Methode

scheint hier „natürlich" zu sein und vereinfacht den Beweis von Ryll-Nardzewski.

Wir verallgemeinern den stochastischen Ergodensatz auf den Fall, daß die Abbildungen φ von den r ersten Koordinaten $x_1, \ldots, x_r$ des Punktes x^* abhängen. Diese Verallgemeinerung ist aber nur formal.

Ähnlich sind notwendige und hinreichende Bedingungen gegeben dafür, daß die Abbildung φ^* vom schwachen Mischungstypus ist. Das ergibt die Antwort auf eine, dies betreffende, von E. Marczewski gestellte Frage. Das erhaltene Ergebnis stellt sich kurz so dar: nur in äußerst triviallen Fällen ist die Abbildung φ^* nicht vom schwachen Mischungstypus. Der Fall ist also ähnlich dem der Ergodizität.

Wir machen noch die Anmerkung, daß alle Schwierigkeiten im wesentlichen schon im Hilfssatz 3 überwunden werden.

1. HILFSSATZ 1. *Es sei T eine meßbare und maßtreue Abbildung*[1]) *von X $(\mu(X)=1)$ in sich, $f(x)$, $q(x)$ meßbar mit $|q(x)|=1$. Existiert f. ü. (endlich)*

$$\lim_{n\to\infty} q(x)\cdot q(Tx)\cdot\ldots\cdot q(T^{n-1}x)\cdot f(T^n x),$$

so haben wir $q(x)\cdot f(Tx) = f(x)$ f. ü.

Beweis. Die Funktion $h(x) = f(x) - q(x)\cdot f(Tx)$ erfüllt

$$\lim_{n\to\infty} q(x)\cdot\ldots\cdot q(T^{m-1}x)\cdot h(T^m x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} q(x)\cdot\ldots\cdot q(T^{m-1}x)\cdot f(T^n x) - \lim_{n\to\infty} q(x)\cdot\ldots\cdot q(T^m x)\cdot f(T^{m+1}x) = 0$$

für f. a. x. Das zieht nach sich die Konvergenz zu Null von $|h(T^m x)|$ für f. a. x und desto mehr die asymptotische Konvergenz. Da diese Funktionen gleiche Verteilungsfunktionen haben, ist das nur dann möglich, wenn $h(x)=0$ f. ü.

Jetzt setzen wir zwei Maßräume $(S, \mathcal{B}, m)$, $m(S)=1$, und $(X, \mathcal{E}, \mu)$, $\mu(X)=1$, fest (z. B. [4]). Mit $(X^*, \mathcal{E}^*, \mu^*)$ bezeichnen wir das abzählbare Produkt[2]) von Maßräumen $(X, \mathcal{E}, \mu)$, und mit $(X_r^*, \mathcal{E}_r^*, \mu_r^*)$ das Produkt von r solchen Maßräumen[3]). Es sei

$$\Phi_r = \{\varphi_{x_r^*} = \varphi_{(x_1,\ldots,x_r)} \mid x_r^* = (x_1, \ldots, x_r) \in X_r^*\}$$

---

[1]) Es sei $\mathcal{E}$ ein σ-Körper von meßbaren Mengen. T heißt *meßbar*, wenn $T^{-1}E \in \mathcal{E}$ für jedes $E \in \mathcal{E}$, und *μ-maßtreu*, wenn $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$.

[2]) Das einseitig unendliche Produkt ist folgendermassen erklärt:

$$X^* = X_1 \times X_2 \times \ldots, \quad \mathcal{E}^* = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \ldots, \quad \mu^* = \mu_1 \times \mu_2 \times \ldots,$$

wobei $X_1 = X_2 = \ldots = X$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \ldots = \mathcal{E}$, $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu$.

[3]) $X_r^* = X_1 \times \ldots \times X_r$, $\quad \mathcal{E}_r^* = \mathcal{E}_1 \times \ldots \times \mathcal{E}_r$, $\quad \mu_r^* = \mu_1 \times \ldots \times \mu$.

eine invariante Familie von Abbildungen $\varphi_{x_r^*}$ von S in sich (d. h. eine $\mathcal{B}\times\mathcal{E}_r^*$-meßbare[4]) Familie von $\mathcal{B}$-meßbaren und m-maßtreuen Abbildungen $\varphi_{x_r^*}$ von S in sich).

Im Produktraume $(S\times X^*, \mathcal{B}\times\mathcal{E}^*, m\times\mu^*)$ erklären wir die Hilfstransformation

$$\varphi^*(s;x^*)=\varphi^*(s;x_1,x_2,\ldots)=(\varphi_{(x_1,\ldots,x_r)}s;x_2,x_3,\ldots).$$

Bei unseren Voraussetzungen ist diese Transformation $\mathcal{B}\times\mathcal{E}^*$-meßbar und $m\times\mu^*$-maßtreu.

Hilfssatz 2. *Ist* $f(x^*)=f(x_1,x_2,\ldots)\in L^1(X^*)$, *so ist* μ^*-*f. ü.* ([1] S. 23)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{X_{n+1}}\int_{X_{n+2}}\ldots f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},x_{n+2},\ldots)\,dx_{n+1}\,dx_{n+2}\ldots=f(x^*).$$

Hilfssatz 3. *Es sei* $f(s;x^*)\in L^1(S\times X^*)$, $q(s;x_1)$ *eine* $\mathcal{B}\times\mathcal{E}$-*meßbare Funktion mit* $|q|=1$. *Ist* $m\times\mu^*$-*f. ü.*

$$q(s;x_1)f(\varphi_{x_1}s;x_2,x_3,\ldots)=f(s;x_1,x_2,\ldots), \tag{1}$$

so existiert eine $\mathcal{B}$-*meßbare Funktion* $g(s)$, *so daß f. ü.* $f(s;x^*)=g(s)$.

Beweis: Wir nehmen an, daß

$$F(s)=\int_{X^*}f(s;x^*)\,d\mu^*=\int_{X_1}\int_{X_2}\ldots f(s;x_1',x_2',\ldots)\,dx_1'\,dx_2'\ldots$$

ist. Für jedes feste x^* ist

$$\begin{aligned}\varphi^{*n}F&=F\big(\varphi^{*n}(s;x^*)\big)=F(\varphi_{x_n}\ldots\varphi_{x_1}s)\\&=\int_{X_1}\int_{X_2}\ldots f(\varphi_{x_n}\ldots\varphi_{x_1}s;x_1',x_2',\ldots)\,dx_1'\,dx_2'\ldots\end{aligned}$$

Da das Maß μ^* gegenüber der „Shifttransformation" invariant ist,

$$Tx^*=T(x_1,x_2,\ldots)=(x_2,x_3,\ldots),$$

so erhält man

$$\begin{aligned}\varphi^{*n}F&=\int_{X_{n+1}}\int_{X_{n+2}}\ldots f(\varphi_{x_n}\ldots\varphi_{x_1}s;x_{n+1}',x_{n+2}',\ldots)\,dx_{n+1}'\,dx_{n+2}'\ldots\\&=\int_{X_{n+1}}\int_{X_{n+2}}\ldots f\big(\varphi^{*n}(s;x^*)\big)\,dx_{n+1}'\,dx_{n+2}'\ldots\end{aligned}$$

Wir machen jetzt Gebrauch von (1):

$$\begin{aligned}\varphi^{*n}F=q^{-1}(s;x_1)\cdot\ldots\cdot q^{-1}\big(\varphi^{*n-1}(s;x^*)\big)\cdot\\ \cdot\int_{X_{n+1}}\int_{X_{n+2}}\ldots f(s;x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}',x_{n+2}',\ldots)\,dx_{n+1}'\,dx_{n+2}'\ldots\end{aligned}$$

[4]) Die Familie Φ_r heißt $\mathcal{B}\times\mathcal{E}^*$-*meßbar*, wenn $\{(s;x_r^*)\,|\,\varphi_{x_r^*}s\in B\}\in\mathcal{B}\times\mathcal{E}_r^*$ für jede Menge $B\in\mathcal{B}$.

Dies ergibt

$$q(s;x_1)\cdot\ldots\cdot q\big(\varphi^{*n-1}(s;x^*)\big)F\big(\varphi^{*n}(s;x^*)\big)=\int_{X_{n+1}}\ldots f(s;x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}',\ldots)\,dx_{n+1}'\ldots$$

und aus Hilfssatz 2 erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}q(s;x_1)\cdot\ldots\cdot q(\varphi_{x_{n-1}}\ldots\varphi_{x_1}s;x_n)\cdot F(\varphi_{x_n}\ldots\varphi_{x_1}s)=f(s;x_1,x_2,\ldots)$$

für $m\times\mu^*$-f. a. $(s;x^*)$. Nach Hilfssatz 1 ist das nur dann möglich, wenn f. ü.

$$q(s;x_1)\cdot F(\varphi_{x_1}s)=F(s).$$

Wir haben also

$$\begin{aligned}F(s)&=q(s;x_1)\cdot F(\varphi_{x_1}s)\\&=q(s;x_1)\cdot q(\varphi_{x_1}s;x_2)\cdot F(\varphi_{x_2}\varphi_{x_1}s)=\ldots=f(s;x_1,x_2,\ldots),\end{aligned}$$

w. z. b. w.

Jetzt gehen wir zu einem beliebigen $r\geqslant 1$ über.

Hilfssatz 3′. *Es sei* $f(s;x^*)\in L^1(S\times X^*)$, $q(s;x_1,\ldots,x_r)$ *eine* $\mathcal{B}\times\mathcal{E}_{r-1}^*$-*meßbare Funktion mit* $|q|=1$. *Ist* $m\times\mu^*$-*f. ü.*

$$q(s;x_1,\ldots,x_r)\cdot f\big(\varphi^*(s;x^*)\big)=f(s;x^*), \tag{2}$$

so existiert eine $\mathcal{B}\times\mathcal{E}_{r-1}^*$-*meßbare Funktion* $g(s;x_1,\ldots,x_{r-1})$, *derart, daß f. ü.*

$$f(s;x^*)=g(s;x_1,\ldots,x_{r-1}).$$

Der Hilfssatz 3′ ist nur scheinbar allgemeiner als Hilfssatz 3, denn er läßt sich leicht aus dem letzten erhalten. Es genügt nämlich den Maßraum $(S\times X^*,\mathcal{B}\times\mathcal{E}^*,m\times\mu^*)$ als Produkt von zwei neuen Maßräumen $(\overline{S},\overline{\mathcal{B}},\overline{m})$ und $(\overline{X}^*,\overline{\mathcal{E}}^*,\overline{\mu}^*)$ zu betrachten, wobei

$$\overline{S}=S\times X_1\times\ldots\times X_{r-1},\quad \overline{\mathcal{B}}=\mathcal{B}\times\mathcal{E}_1\times\ldots\times\mathcal{E}_{r-1},\quad \overline{m}=m\times\mu_1\times\ldots\times\mu_{r-1},$$

$$\overline{X}^*=X_r\times X_{r+1}\times\ldots,\quad \overline{\mathcal{E}}^*=\mathcal{E}_r\times\mathcal{E}_{r+1}\times\ldots,\quad \overline{\mu}^*=\mu_r\times\mu_{r+1}\times\ldots$$

Anstatt der Familie

$$\Phi_r=\{\varphi_{x_r^*}=\varphi_{(x_1,\ldots,x_r)}\,|\,x_r^*\in X_r^*\}$$

der Abbildungen $\varphi_{x_r^*}$ von S in sich, die von den r ersten Koordinaten $x_1,\ldots,x_r$ abhängen, hat man jetzt mit der Familie

$$\overline{\Phi}_r=\{\overline{\varphi}_{x_r}\,|\,x_r\in X_r\}$$

der Abbildungen

$$\bar{\varphi}_{x_r}\bar{s}=\bar{\varphi}_{x_r}(s,x_1,\dots,x_{r-1})=(\varphi_{(x_1,\dots,x_{r-1};x_r)}s,x_2,\dots,x_r)$$

von $\bar{S}$ in sich zu tun. Diese Abbildungen sind nur von der ersten Koordinate des Punktes des Produktraumes $\bar{X}^*$ abhängig. Sie sind dabei $\bar{\mathfrak{B}}$-meßbar und $\bar{m}$-maßtreu. Unser Hilfssatz folgt also unmittelbar aus Hilfssatz 3, da die Familie $\bar{\Phi}_r - \bar{\mathfrak{B}}\times\mathcal{E}_r$ -meßbar ist (dies wegen der vorausgesetzten $\mathfrak{B}\times\mathcal{E}_r^*$-Meßbarkeit von Φ_r). Wir können nämlich (2) so schreiben:

$$q(s,x_1,\dots,x_{r-1};x_r)\cdot f(\varphi_{(x_1,\dots,x_{r-1};x_r)}s,x_2,\dots,x_r;x_{r+1},\dots)$$
$$=f(s,x_1,\dots,x_{r-1};x_r,\dots),$$

oder, was gleichbedeutend ist,

$$q(\bar{s};x_r)\cdot f(\bar{\varphi}_{x_r}(\bar{s};\bar{x}^*))=f(\bar{s};\bar{x}^*).$$

Daraus folgt aber

$$f(\bar{s};\bar{x}^*)=g(\bar{s})=g(s,x_1,\dots,x_{r-1}) \text{ f. ü., w. z. b. w.}$$

Bemerkung. Offensichtlich könnte man Hilfssatz 3′ auch direkt (Wort für Wort wie Hilfssatz 3) erhalten, indem man die Funktion

$$F(s;x_1,\dots,x_{r-1})=\int_{X_r}\int_{X_{r+1}}\dots f(s;x_1,x_2,\dots)\,dx_r\,dx_{r+1}\dots$$

betrachtete.

Wir brauchen noch folgenden Hilfssatz ([3], Satz II):

HILFSSATZ 4. *Bei festgesetztem $(X,\mathcal{E},\mu)$, $\mu(X)=1$, sei T eine $\mathcal{E}$-meßbare und μ-maßtreue Abbildung von X in sich. Ist $f(x)\in L^p(X)$, $p\geqslant 1$, und $q(x)$ eine $\mathcal{E}$-meßbare Funktion mit $|q|=1$, so existiert der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}q(x)\cdot q(Tx)\cdot\ldots\cdot q(T^{k-1}x)\cdot f(T^k x)=F(x)$$

für f. a. x. Dabei $F(x)\in L^p(X)$ und

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}q(x)\cdot\ldots\cdot q(T^{k-1}x)\cdot f(T^k x)-F(x)\right\|_{L^p(X)}=0.$$

Die Grenzfunktion $F(x)$ erfüllt f. ü. die Gleichung

$$q(x)\cdot F(Tx)=F(x).$$

Jetzt sind wir imstande folgende Verallgemeinerung des stochastischen Ergodensatzes zu beweisen:

SATZ 1. *Ist $f(s;x^*)=f(s;x_1,x_2,\dots)\in L^p(S\times X^*)$, $p\geqslant 1$, und $q(s;x_1,\dots,x_r)$ eine $\mathfrak{B}\times\mathcal{E}_r^*$-meßbare Funktion mit $|q|=1$, so haben wir*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}q(s;x^*)\cdot\ldots\cdot q(\varphi^{*k-1}(s;x^*))\cdot f(\varphi^{*k}(s;x^*))$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}q(s;x_1,\dots,x_r)\cdot q(\varphi_{(x_1,\dots,x_r)}s;x_2,\dots,x_{r+1})\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot q(\varphi_{(x_{k-1},\dots,x_{k+r-2})}\cdots\varphi_{(x_1,\dots,x_r)}s;x_k,\dots,x_{k+r-1})\cdot$$
$$\cdot f(\varphi_{(x_k,\dots,x_{k+r-1})}\cdots\varphi_{(x_1,\dots,x_r)}s;x_{k+1},x_{k+2},\dots)$$
$$=f^*(s;x_1,\dots,x_{r-1})\in L^p(S\times X^*)$$

für $m\times\mu^*$-f. a. $(s;x^*)$ und

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}q(s;x^*)\cdot\ldots\cdot q(\varphi^{*k-1}(s;x^*))\cdot f(\varphi^{*k}(s;x^*))-f^*(s;x^*)\right\|_{L^p}=0.$$

Beweis. Die Konvergenz fast überall, die Zugehörigkeit von f^* zu L^p und die Konvergenz in L^p folgen unmittelbar aus Hilfssatz 4, angewandt auf die Abbildung φ^* von $S\times X^*$ in sich.

Es bleibt also nur die Gestalt der Grenzfunktion f^* zu untersuchen. Diese Funktion erfüllt f. ü., nach Hilfssatz 4, die Gleichung

$$q(s;x_1,\dots,x_r)\cdot f^*(\varphi^*(s;x^*))=f^*(s;x^*),$$

und hängt (Hilfssatz 3′) nur von den Veränderlichen $s,x_1,\dots,x_{r-1}$ ab, w. z. b. w.

Für $r=1$ und $q\equiv 1$ gibt Satz 1 den stochastischen Ergodensatz in der von Ryll-Nardzewski [9] bewiesenen Gestalt.

DER STOCHASTISCHE ERGODENSATZ. *Ist $f(s;x^*)\in L^p(S\times X^*)$, $p\geqslant 1$, so existiert f. ü. der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\varphi_{x_k}\cdots\varphi_{x_1}s;x_{k+1},x_{k+2},\dots)=f^*(s).$$

Dabei $f^*(s)\in L^p(S)$ und

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\varphi_{x_k}\cdots\varphi_{x_1}s;x_{k+1},\dots)-f^*(s)\right\|_{L^p(S\times X^*)}=0.$$

Für $f\equiv 1$ und $q=q(x_1,\dots,x_r)$ erhält man aus Satz 1 die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Robbins ([8], S. 787):

Ist $q(x_1,\dots,x_r)$ eine $\mathcal{E}^*$-meßbare Funktion für die $|q|=1$, so ist f. ü.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}q(x_1,\dots,x_r)\cdot\ldots\cdot q(x_{k+1},\dots,x_{k+r})=q^*(x_1,\dots,x_{r-1}).$$

Robbins formulierte diesen Satz für $r=1$. In diesem Fall sind die Funktionen $q_n = q(x_n)$ stochastisch unabhängig (mit derselben Verteilungsfunktion) und es zeigt sich leicht, daß $q^*=0$ f. ü. ist (ausgenommen den triviallen Fall $q_1=1$ f. ü.). Dies ist eine unmittelbare Folge der Konvergenz von Integralen der linksseitigen Funktionen zu $q^*=\text{const}$. Wir haben nämlich

$$q^* = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1} \int q_1 \cdot \ldots \cdot q_k \, d\mu^* = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int q_1 \, d\mu^* \cdot \ldots \cdot \int q_k \, d\mu^* = 0$$

wegen $\int q_1 \, d\mu^* = \int q_2 \, d\mu^* = \ldots \neq 1$.

2. Wir werden jetzt ein Beispiel geben, das zeigt, daß in Satz 1 die Anzahl der Veränderlichen, von denen die Grenzfunktion f^* abhängt, nicht vermindert werden kann.

Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{B} = (A, \mathcal{A}, \nu)$ den Borelschen Maßraum: $A = \langle 0,1)$, $\mathcal{A}$ den Körper von Borelschen Mengen und mit ν das Lebesgguesche Maß. Es sei $(S, \mathcal{B}, m) = (X, \mathcal{E}, \mu) = \boldsymbol{B}$ und

$$\varphi_{x_r^*} s = \varphi_{(x_1,\ldots,x_r)} s = (s + a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r) \bmod 1,$$

wobei $a_1, \ldots, a_r$ beliebige reelle Konstanten sind, die folgenden Bedingungen genügen:

$$(3) \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_r = 0,$$

$$(4) \qquad a_1,\ a_1 + a_2,\ \ldots,\ a_1 + a_2 + \ldots + a_{r-1} \neq 0,$$

keine der Zahlen

$$(5) \qquad a_r,\ a_r + a_{r-1},\ \ldots,\ a_r + a_{r-1} + \ldots + a_2$$

ist ganz (z. B. $a_1 = a_2 = \ldots = a_{r-1} = 1/r$ und $a_r = -r + 1/r$). Für die Funktion $f(s; x^*) = e^{2\pi i s} = \exp s$ erhält man dann

$$\begin{aligned} f(\varphi^{*k}(s;x^*)) &= \exp\Big(s + \sum_{\varkappa=1}^{r} a_\varkappa x_\varkappa + \ldots + \sum_{\varkappa=1}^{r} a_\varkappa x_{k+\varkappa-1}\Big) \\ &= \exp[s + a_1 x_1 + \ldots + (a_1 + \ldots + a_{r-1}) x_{r-1}] \cdot \\ &\quad \cdot \exp(a_1 + \ldots + a_r)(x_r + \ldots + x_k) \cdot \\ &\quad \cdot \exp[(a_2 + \ldots + a_r) x_{k+1} + \ldots + a_r x_{k+r-1}]. \end{aligned}$$

Aus (3) folgt für $n \geqslant 2r$ $f(\varphi^{*k}(s;x^*)) = h(x^*) \cdot H(T^k x^*) \cdot \exp s$, wobei

$$h(x^*) = \exp[a_1 x_1 + \ldots + (a_1 + \ldots + a_{r-1}) x_{r-1}],$$

$$H(x^*) = \exp[(a_2 + \ldots + a_r) x_1 + \ldots + a_r x_{r-1}],$$

$$T x^* = T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots).$$

Wir wenden den individuellen Ergodensatz auf die ergodische Abbildung T an und erhalten

$$\begin{aligned} f^*(s;x^*) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\varphi^{*k}(s;x^*)) \\ &= \exp s \cdot h(x^*) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} H(T^k x^*) \\ &= \exp s \cdot h(x^*) \cdot \int H(x^*) \, d\mu^*. \end{aligned}$$

Da keine der Zahlen (5) ganz ist, so kommt

$$\int H(x^*) \, d\mu^* = \int_0^1 \exp(a_2 + \ldots + a_r) x_1 \, dx_1 \cdot \ldots \cdot \int_0^1 \exp a_r x_{r-1} \, dx_{r-1} = a \neq 0.$$

Die Grenzfunktion hat also die Gestalt

$$f^*(s;x^*) = a \cdot e^{2\pi i s} \cdot h(x_1, \ldots, x_{r-1}),$$

wobei $a \neq 0$ und h, nach (4), wesentlich von allen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_{r-1}$ abhängt.

So zeigt obiges Beispiel, daß die Grenzfunktion f^* (die im Satz 1 auftritt) von allen Variablen s, $x_1, \ldots, x_{r-1}$ wesentlich abhängen kann, obwohl $q \equiv 1$, die Funktion f nur von s abhängig und fast jede Abbildung $\varphi_{x_r^*}$ ergodisch ist.

3. Wir werden jetzt Bedingungen für die Ergodizität (metrische Transitivität) der Transformation

$$\varphi^*(s;x^*) = \varphi^*(s; x_1, x_2, \ldots) = (\varphi_{(x_1,\ldots,x_r)} s; x_2, x_3, \ldots)$$

angeben. Das wird nur der Vollständigkeit wegen gemacht, da das Resultat (Satz 2) eine nur unwesentliche Verallgemeinerung auf beliebige r des Ergebnisses (für $r=1$) von Kakutani [6] ist.

Ähnlich wie im Beweise von Hilfssatz 3′ betrachten wir hier die Familie

$$\Phi_r = \{\varphi_{(x_1,\ldots,x_r)} \mid x_r^* = (x_1, \ldots, x_r) \in X_r^*\}$$

der Abbildungen $\varphi_{x_r^*}$ von S in sich, die von den r ersten Koordinaten $x_1, \ldots, x_r$ des Punktes x^* abhängen, als Familie

$$\bar{\Phi}_r = \{\bar{\varphi}_{x_r} \mid x_r \in X_r\}$$

von Abbildungen

$$\bar{\varphi}_{x_r} \bar{s} = \bar{\varphi}_{x_r}(s, x_1, \ldots, x_{r-1}) = (\varphi_{(x_1,\ldots;x_r)} s, x_2, \ldots, x_r)$$

des Produktraumes $S \times X_1 \times \ldots \times X_{r-1}$ in sich. Diese Abbildungen hängen jetzt nur von x_r ab.

Definition. Die Familie Φ_r heißt *ergodisch*, wenn jede Menge $\bar{B}\epsilon\bar{\mathcal{B}}=\mathcal{B}\times\mathcal{E}_1\times\ldots\times\mathcal{E}_{r-1}$, die fast invariant [5]) gegenüber μ_r-fast jeder Abbildung $\bar{\varphi}_{x_r}$ ist, vom $m\times\mu_1\times\ldots\times\mu_{r-1}$-Maße 0 oder 1 ist.

Satz 2. *Die Abbildung φ^* von $S\times X^*$ in sich ist dann und nur dann ergodisch, wenn die Familie Φ_r ergodisch ist.*

Beweis. Ist die Familie Φ_r nicht ergodisch, so existiert eine Menge $\bar{B}\epsilon\bar{\mathcal{B}}$ für die $0<\bar{m}(\bar{B})=(m\times\mu_{r-1}^*)(\bar{B})<1$ ist, welche fast invariant in Bezug auf μ_r-fast jede Abbildung $\bar{\varphi}_{x_r}$ ist. Die charakteristische Funktion $\bar{\chi}$ dieser Menge erfüllt also $\bar{m}\times\mu_r$-f. ü. die Gleichung

$$\bar{\chi}(\bar{\varphi}_{x_r}\bar{s})=\bar{\chi}(\varphi_{(x_1,\ldots;x_r)}s,x_2,\ldots,x_r)=\bar{\chi}(s,x_1,\ldots,x_{r-1}), \tag{6}$$

und das ist gleichbedeutend mit der Existenz einer nicht f. ü. konstanten Funktion, die invariant in Bezug auf φ^* ist. Die Abbildung φ^* kann also nicht ergodisch sein.

Umgekehrt, setzen wir jetzt voraus, daß Φ_r ergodisch ist. Dann ist jede Menge $\bar{B}\epsilon\bar{\mathcal{B}}$, deren charakteristische Funktion $\bar{\chi}$ f. ü. (6) erfüllt, vom $m\times\mu_{r-1}^*$-Maße 0 oder 1. In diesem Falle ist also $\bar{\chi}=\text{const}$ f. ü. Das zieht eine analoge Eigenschaft für jede $\mathcal{B}\times\mathcal{E}_{r-1}^*$-meßbare Funktion nach sich. Aber nach Hilfssatz 3′ ist jede $\mathcal{B}\times\mathcal{E}^*$-meßbare Funktion, die invariant gegenüber φ^* ist, im wesentlichen $\mathcal{B}\times\mathcal{E}_{r-1}^*$-meßbar (d. h. sie ist f. ü. gleich einer solchen Funktion). Diese Funktion muss also konstant sein, w. z. b. w.

Als Beispiel laßt uns die „stochastische Irrfahrt" $(r=1)$ auf der Geraden betrachten.

Satz 3. *Es sei $x_1(t),x_2(t),\ldots$, $t\epsilon(0,1)$, eine Folge von reellwertigen, meßbaren, stochastisch unabhängigen Funktionen mit denselben Verteilungsfunktionen. Ist $f(s)$, $s\epsilon(0,1)$, eine Borelsche, summierbare Funktion mit der Periode 1, so ist für f. a. (s,t)*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(s+s_k(t))=\int_0^1 f(s)\,ds, \tag{7}$$

wenn sich nur der wesentliche Wertevorrat mod 1 *von $x_1(t)$ nicht auf eine endliche Anzahl von rationalen Zahlen reduziert.*

Im Gegenteil ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(s+s_k(t))=\frac{1}{N}\left[f(s)+f\left(s+\frac{1}{N}\right)+\ldots+f\left(s+\frac{N-1}{N}\right)\right] \tag{8}$$

---

5) Die meßbare Menge B heißt *fast invariant* gegenüber der Abbildung φ, wenn $m(B\dot{-}\varphi^{-1}B)=0$, wobei $A\dot{-}B$ die symmetrische Differenz $(A-B)+(B-A)$ bezeichnet.

für f. a. t und jedes s, für welches alle Werte $f(s)$, $f(s+1/N),\ldots$, $f(s+(N-1)/N)$ endlich sind, wobei N die Anzahl der verschiedenen Werte mod 1 *bedeutet, die im wesentlichen von den ergodischen Teilsummen*

$$s_k(t)=x_1(t)+\ldots+x_k(t)$$

angenommen werden.

Beweis. Um Satz 2 anwenden zu können, nehmen wir: $(S,\mathcal{B},m)=\boldsymbol{B}$, $X=(-\infty,\infty)$, als $\mathcal{E}$ den Körper aller Borelschen Mengen, definieren das Maß μ durch $\mu(E)=|x_1^{-1}(E)|$, wobei $|\,|$ das Maß auf der t-Achse ist, und setzen $\Phi=\{\varphi_x s=(s+x)\bmod 1\,|\,x\epsilon X\}$. Wegen der Meßbarkeit von $x(t)=x_1(t)$, ist die Familie Φ $\mathcal{B}\times\mathcal{E}$-meßbar. Aus Satz 2 ergibt sich sofort die Existenz der Grenzen, die auf den linken Seiten von (7) und (8) auftreten. Es bleibt also nur die Gestalt der Grenzfunktionen f^* zu untersuchen.

Wir betrachten zuerst den Fall, daß der Wertevorrat mod 1 von x sich nicht im wesentlichen auf eine endliche Anzahl von rationalen Zahlen reduziert. Dann haben wir die Alternative: 1° x nimmt irrationale Werte auf einer Menge von positivem Maße an, oder 2° der Wertevorrat mod 1 von x reduziert sich auf unendlich viele verschiedene rationale Zahlen $a_1,a_2,\ldots$

Im Falle 1° bleibt jede gegenüber μ-f. a. Abbildungen φ_x fast invariante Menge $B\epsilon\mathcal{B}$ fast invariant bei einer Verschiebung mod 1 um eine irrationale Zahl. Eine solche Abbildung ist metrisch transitiv und es muß $m(B)=0$ oder 1 sein.

Im Falle 2° ist jede Menge $B\epsilon\mathcal{B}$, die fast invariant gegenüber μ-f. a. Abbildungen $(s+x)$ mod 1 ist, bis auf eine Menge vom Maße Null gleich einer Menge, die geradezu invariant ist gegenüber allen Abbildungen $(s+a_n)$ mod 1. Wir können also voraussetzen, daß B periodisch, mit den Perioden $a_1,a_2,\ldots$, ist. Wenn man die rationalen Zahlen a_n in der Form $a_n=l_n/m_n$ darstellt (l_n, m_n natürlich ohne gemeinsame Teiler), so erhält man

$$\lim_{n\to\infty}m_n=\infty, \tag{9}$$

da die a_n beschränkt sind. Da der Menge B zusammen mit a_n auch alle Perioden l_n/m_n, $2l_n/m_n$, …, m_nl_n/m_n angehören, so besitzt sie unter anderen auch die Periode $1/m_n$. Sie besitzt also, wegen (9), beliebig kleine Perioden, was $m(B)=0$ oder 1 nach sich zieht.

So haben wir bewiesen, daß in beiden diesen Fällen die Familie Φ ergodisch ist. Das verursacht, nach Satz 3, die Ergodizität von φ^*, womit die Richtigkeit der Gleichung (7) sichergestellt ist.

Reduziert sich dagegen der wesentliche Wertevorrat mod 1 von x auf eine endliche Anzahl von rationalen Zahlen, so nehmen im wesentlichen die Teilsummen $s_n = x_1 + \ldots + x_n$ auch nur eine endliche Anzahl von rationalen Zahlen σ_n, $n=1,2,\ldots,N$, an. Wie man leicht sehen kann, gibt es eine entsprechende Anordnung: $\sigma_n = n\sigma$ für $n \neq N$ und $\sigma_N = (N\sigma) \bmod 1 = 0$, wobei σ die kleinste jedoch von Null verschiedene der Zahlen σ_n ist.

Die Familie Φ ist jetzt sicher nicht ergodisch, doch können wir auch diesen Fall auf die Ergodizität zurückführen. Wir setzen s_0 fest und nehmen den Raum S_0 der Punkte $(s_0, s_0+1/N, \ldots, s_0+(N-1)/N) \bmod 1$ unter Beachtung. Es sei $\mathfrak{B}_0$ der Körper aller Untermengen von S_0 mit dem Maß $m_0\{s\} = 1/N$, $s \in S_0$. Nach einem eventuellen Ausschluss der x, die eine Menge vom Maße Null bilden, transformieren alle Abbildungen φ_x S_0 in sich. Sie sind dabei m_0-maßtreu.

Die Familie Φ, als eine Familie von Abbildungen von S_0 in sich betrachtet, ist ergodisch[6]). Satz 2 ergibt für f. a. x^*, oder, was gleichbedeutend ist, für f. a. t

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(s_0+s_k) = \int_{S_0} f(s)\, dm_0$$
$$= \frac{1}{N}\left[f(s_0) + f\left(s_0+\frac{1}{N}\right) + \ldots + f\left(s_0+\frac{N-1}{N}\right)\right],$$

wenn nur $f(s)$ summierbar in Bezug auf m_0 d. h. wenn nur die Funktion f für alle $s \in S_0$ endlich ist. Dies beweist (8) und gleichzeitig Satz 3 im allgemeinen.

4. Hilfssatz 3′ erlaubt uns Kriterien für die schwachen Mischungseigenschaften der Abbildung

$$\varphi^*(s; x^*) = \varphi^*(s; x_1, x_2, \ldots) = (\varphi_{(x_1,\ldots,x_r)} s; x_2, x_3, \ldots)$$

anzugeben.

Definition. Eine Familie Φ_r heißt vom *Mischungstypus*, wenn jede Funktion $f(\bar{s}) = f(s, x_1, \ldots, x_{r-1}) \in L^1(\bar{S})$, die eine Eigenfunktion[7]) von μ_r-fast jeder Abbildung

$$\bar{\varphi}_{x_r}\bar{s} = \bar{\varphi}_{x_r}(s, x_1, \ldots, x_{r-1}) = (\varphi_{(x_1,\ldots,x_r)} s, x_2, \ldots, x_r)$$

ist und die dabei für μ_r-fast jedes x_r zu demselben Eigenwerte gehört, $\overline{m}$-f. ü. konstant ist.

[6]) Jede nichtleere Menge von S_0, die fast invariant gegenüber fast jeder Abbildung φ_x ist, muß invariant gegenüber der Verschiebung mod 1 um σ sein und darum ist sie gleich dem ganzen Raume S_0.

[7]) Eine Funktion $f(s) \in L^1$ heißt eine *Eigenfunktion* der Abbildung φ, wenn es eine solche Konstante a gibt, daß $f(\varphi s) = a \cdot f(s)$ für fast jedes s gilt. Sie gehört zu dem Eigenwert a.

Satz 4. *Die Abbildung φ^* besitzt nur triviale (d. h. f. ü. konstante) Eigenfunktionen dann und nur dann, wenn die Familie Φ_r vom Mischungstypus ist.*

Beweis. Ist die Familie Φ_r nicht vom Mischungstypus, so existiert eine solche nicht konstante Funktion $f(\bar{s}) \in L^1(\bar{S})$ und eine solche Zahl a, daß $(\overline{m} \times \mu_r)$-f. ü.

$$f(\bar{\varphi}_{x_r}\bar{s}) = f(\varphi_{(x_1,\ldots,x_r)} s, x_2, \ldots, x_r) = a \cdot f(s, x_1, \ldots, x_{r-1}).$$

Die erhaltene Gleichheit kann man einfach als $f(\varphi^*(s;x^*)) = a \cdot f(s;x^*)$ darstellen; dies zeigt, daß die Abbildung φ^* eine nicht-triviale Eigenfunktion besitzt.

Umgekehrt, wenn die Abbildung φ^* eine nicht-triviale Eigenfunktion $f(s;x^*) \in L^1(S \times X^*)$ besitzt, so erfüllt diese Funktion die Gleichung $f(\varphi^*(s;x^*)) = a \cdot f(s;x^*)$. Da $|a|=1$, muß diese Funktion (nach Hilfssatz 3′ mit $q \equiv a$) im wesentlichen von der Gestalt $f(s, x_1, \ldots, x_{r-1})$ sein. Sie erfüllt also gleichzeitig f. ü. die Gleichung

$$f(\bar{\varphi}_{x_r}\bar{s}) = a \cdot f(\bar{s}),$$

was zeigt, daß f eine Eigenfunktion fast jeder Abbildung $\bar{\varphi}_{x_r}$ ist. Da f dabei demselben Eigenwerte a angehört, kann die Familie Φ_r nicht vom Mischungstypus sein.

Da der Beweis von Satz 4 in einer Richtung trivial ist, so kann er auch kurz so formuliert werden: *Die Abbildung φ^* kann nur triviale Eigenfunktionen besitzen.* Unter einer *trivialen Eigenfunktion* verstehen wir hier eine Funktion, die eine Eigenfunktion fast jeder Abbildung $\bar{\varphi}_{x_r}$ ist und die dabei für fast jedes x_r zu demselben Eigenwert gehört.

Mit der Nichtexistenz einer nicht-trivialen Eigenfunktionen von φ^* sind streng die Mischungseigenschaften dieser Abbildung verbunden ([5], S. 35 u. f.).

Bei festgesetztem $(S, \mathfrak{B}, m)$, heißt die Abbildung φ^* vom *Mischungstypus*, wenn es eine solche Menge M von natürlichen Zahlen von Dichte Null gibt, daß

$$\lim_{n\to\infty,\, n \bar{\in} M} m(\varphi^{-n} A \cdot B) = m(A) \cdot m(B) \tag{10}$$

für jedes Mengenpaar $A, B \in \mathfrak{B}$ erfüllt ist.

Die Menge M heißt dabei von *Dichte Null*, wenn

$$\lim_{n-m\to\infty} \frac{1}{n-m} N[(m,n) \cdot M] = 0,$$

wobei $N[(m,n) \cdot M]$ die Anzahl der Punkte von M bedeutet, die in den Abschnitt (m,n) fallen.

Da die Beweise der bekannten Mischungskriterien einen wesentlichen Gebrauch von der Spektralanalyse unitärer Operatoren im Hilbertschen Raume machen, müssen wir zusätzlich voraussetzen, daß die Abbildungen $\varphi_{x_r^*}$ eineindeutig und beiderseits meßbar, die Familie Φ_r beiderseits meßbar und $L^2(S)$ und $L^2(X)$ separabel sind.

Als Analogie zu den gleichwertigen Behauptungen:

a. die Abbildung φ von S in sich ist vom Mischungstypus,

b. die Abbildung φ besitzt nur triviale Eigenfunktionen,

c. die Abbildung $\psi(s,t)=(\varphi s,\varphi t)$ von $S\times S$ in sich ist ergodisch, werden wir folgendes beweisen:

Satz 5. *Folgende Behauptungen sind gleichwertig:*

a. *Die Abbildung* $\varphi^*(s;x_1,x_2,\ldots)=(\varphi_{(x_1,\ldots,x_r)}s;x_2,x_3,\ldots)$ *von* $S\times X^*$ *in sich ist vom Mischungstypus.*

b. *Die Familie* Φ_r *ist vom Mischungstypus.*

c. *Die Familie* $\Psi_r=\{\psi_{(x_1,\ldots,x_r;y_1,\ldots,y_r)}\,|\,(x_r^*;y_r^*)\epsilon X_r^*\times X_r^*\}$ *von Abbildungen* $\psi_{(x_r^*;y_r^*)}(s,t)=(\varphi_{x_r^*}s,\varphi_{y_r^*}t)$ *von* $S\times S$ *in sich ist ergodisch.*

Wir nehmen die Abbildung

$$\bar{\bar{\varphi}}^*(\bar{\bar{x}}^*;s;x^*)=\bar{\bar{\varphi}}^*(\ldots,x_{-1},x_0;s;x_1,x_2,\ldots)=(\ldots,x_0,x_1;\varphi_{(x_1,\ldots,x_r)}s;x_2,x_3,\ldots)$$

von $X^*\times S\times X^*$ in sich unter Betracht. Diese Abbildung ist $\mathcal{E}^*\times\mathcal{B}\times\times\mathcal{E}^*$ meßbar und $\mu^*\times m\times\mu^*$-maßtreu.

Hilfssatz 5. *Ist die Funktion* $f(\bar{\bar{x}}^*;s;x^*)\epsilon L^1(X^*\times S\times X^*)$ *eine Eigenfunktion von* $\bar{\bar{\varphi}}^*$, *so existiert eine solche Funktion* $g(s;x^*)$, *daß* $\mu^*\times m\times\mu^*$-*f. ü.* $f(\bar{\bar{x}}^*;s;x^*)=g(s;x^*)$ *ist.*

Kurz gesagt: *Die Abbildungen* $\bar{\bar{\varphi}}^*$ *und* φ^* *haben gemeinsame Eigenfunktionen.*

Beweis. Die Funktion f läßt sich in L^1 durch Funktionen f_n von der Gestalt $f_n(x_{-n+1},\ldots,x_0;s;x_1,x_2,\ldots)$ approximieren. Es ist klar, daß die Funktionen $\bar{\bar{\varphi}}^{*n}f_n$ nur von den Variablen s, x_1, x_2, ... abhängen.

Zu einem beliebig festgesetzten $\varepsilon>0$, kann man ein solches n und eine solche Funktion f_n wählen, daß $\|f-f_n\|<\varepsilon$. Gehört der Eigenwert a zu der Eigenfunktion f, so ist $\bar{\bar{\varphi}}^{*n}f=a^n\cdot f$, was zusammen mit der $\mu^*\times m\times\mu^*$-Maßtreue von $\bar{\bar{\varphi}}^*$

$$\|f-a^{-n}\bar{\bar{\varphi}}^{*n}f_n\|=\|a^{-n}\cdot\bar{\bar{\varphi}}^{*n}f-a^{-n}\cdot\bar{\bar{\varphi}}^{*n}f_n\|=|a^{-n}|\cdot\|\bar{\bar{\varphi}}^{*n}(f-f_n)\|=\|f-f_n\|<\varepsilon$$

ergibt. Man kann also f beliebig genau durch die Funktionen $a^{-n}\bar{\bar{\varphi}}^{*n}f^n$ approximieren. Da diese Funktionen nur von den Variablen s, x^* abhängen, muß die Funktion f auch im wesentlichen von der Gestalt $f(s;x_1,x_2,\ldots)$ sein, w. z. b. w.

Beweis von Satz 5. a→b. Wir setzen voraus, daß φ^* vom Mischungstypus ist. Es existiert also eine Menge M von natürlichen Zahlen von Dichte Null derart, daß für jedes Mengenpaar $A^*,B^*\epsilon\mathcal{B}\times\mathcal{E}^*$ (10) erfüllt ist. Dies zieht nach sich die Gleichheit

$$\lim_{n\to\infty,n\bar{\epsilon}M}\int g\cdot\varphi^{*n}f\,d(m\times\mu^*)=\int f\,d(m\times\mu^*)\cdot\int g\,d(m\times\mu^*)$$

für jedes Paar von Funktionen f und g, wobei $f\epsilon L^1(S\times X^*)$, g meßbar und beschränkt ist. Wenn also f eine Eigenfunktion von φ^* mit dem Eigenwert a ist, so haben wir

$$\lim_{n\to\infty,n\bar{\epsilon}M}\int g\cdot\varphi^{*n}f\,d(m\times\mu^*)=\lim_{n\to\infty}a^n\cdot\int f\cdot g\,d(m\times\mu^*)$$
$$=\int f\,d(m\times\mu^*)\cdot\int g\,d(m\times\mu^*)$$

für jede beschränkte Funktion g. Das ist nur dann möglich, wenn $f=\mathrm{const}$ ist. Die Abbildung φ^* besitzt nun nur triviale Eigenfunktionen und, nach Satz 4, ist die Familie Φ_r vom Mischungstypus.

b→c. Ist Φ_r vom Mischungtypus, so (Satz 4) besitzt die Abbildung φ^* nur triviale Eigenfunktionen, also besitzt die Abbildung $\bar{\bar{\varphi}}^*$ (Hilfssatz 5) auch nur triviale Eigenfunktionen. Die Abbildung $\bar{\bar{\varphi}}^*$ ist umkehrbar (die inverse Abbildung ist

$$\bar{\bar{\varphi}}^{*-1}(\ldots,x_{-1},x_0;s;x_1,x_2,\ldots)=(\ldots,x_{-2},x_{-1};\overset{-1}{\varphi}_{(x_0,\ldots,x_{r-1})}s;x_0,\ldots)),$$

da die Umkehrbarkeit von $\varphi_{x_r^*}$ vorausgesetzt ist. Daraus folgt, daß $\bar{\bar{\varphi}}^*$ vom Mischungstypus ist (um so mehr also φ^*, und deshalb b→a). Daraus folgt weiter, daß die Abbildung

$$\bar{\bar{\psi}}^*(\bar{\bar{x}}^*,s,x^*;\bar{\bar{y}}^*,t,y^*)=(\bar{\bar{\varphi}}^*(\bar{\bar{x}}^*,s,x^*);\bar{\bar{\varphi}}^*(\bar{\bar{y}}^*,t,y^*))$$

von $(X^*\times S\times X^*)\times(X^*\times S\times X^*)$ in sich ergodisch ist, was die Ergodizität der Abbildung

$$\psi^*(s,x^*;t,y^*)=(\varphi^*(s;x^*);\varphi^*(t;y^*))$$
$$=(\varphi_{(x_1,\ldots,x_r)}s;x_2,x_3,\ldots;\varphi_{(y_1,\ldots,y_r)}t;y_2,y_3,\ldots)$$

von $(S\times X^*)\times(S\times X^*)$ in sich nach sich zieht.

Man kann aber ψ^* als Abbildung

$$\psi^*(u;z^*)=\psi^*((s,t);(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots)$$
$$=(\varphi_{(x_1,\ldots,x_r)}s,\varphi_{(y_1,\ldots,y_r)}t;(x_2,y_2),(x_3,y_3),\ldots)$$

von $U\times Z^*$, wobei $U=S\times S$, $Z=X\times X$, in sich auffassen. Auf eine solche Interpretation ist schon Satz 2 anwendbar, der sofort die Ergodizität der Familie Ψ_r bestätigt.

$c \to a$. Ist die Familie Ψ_r ergodisch, so ist nach Satz 2 die Abbildung ψ^* von $(S\times S)\times(X^*\times X^*)$ in sich ergodisch. Gleichzeitig ist auch (Hilfssatz 5) die Abbildung $\bar{\bar{\psi}}^* = \big(\bar{\bar{\varphi}}^*(\bar{\bar{x}}^*, s, x^*); \bar{\bar{\varphi}}^*(\bar{\bar{y}}^*, t, y^*)\big)$ ergodisch. Die letzte Abbildung ist eineindeutig und man kann die bekannten Kriterien anwenden, die uns zeigen, daß die Abbildung $\bar{\bar{\varphi}}^*(\bar{\bar{x}}^*, s, x^*)$ von $X^*\times S\times X^*$ in sich vom Mischungstypus ist. Um so mehr muß die Abbildung φ^* von $S\times X^*$ in sich vom Mischungstypus sein.

Als Beispiel betrachten wir nochmals „die stochastische Irrfahrt" auf der Geraden. Es sei $(S, \mathcal{B}, m) = B$, $X = (0,1)$, $\mathcal{E}$ ein Körper Borelscher Mengen mit irgendeinem μ.

SATZ 6. *Die Familie* $\Phi = \{\varphi_x | x \in (0,1)\}$ *der Abbildungen*

$$\varphi_x s = (s+x) \bmod 1$$

von $\langle 0,1)$ *in sich ist dann und nur dann vom Mischungstypus, wenn der Wertevorrat von* $x-y$ *im wesentlichen (nach dem Produktmaße* $\mu\times\mu$*) sich nicht auf eine endliche Anzahl von rationalen Zahlen reduziert.*

Beweis. Es sei $f(s)$ eine Funktion, die eine nicht-triviale Eigenfunktion μ-fast jeder Abbildung φ_x ist und die dabei demselben Eigenwert a angehört. Dann ist $f(s+x) = a\cdot f(s)$ für $m\times\mu$-f. a. (s,x), und daraus folgt $f(s+x) = f(s+y)$ und $f(s) = f\big(s-(x-y)\big)$ für fast jedes Paar x, y. Man kann sich leicht überzeugen, wie im Beweise von Satz 3, daß dies nur dann möglich ist, wenn $x-y$ im wesentlichen nur endlich viele rationale Werte annimmt.

Satz 6 kann man auch folgenderweise formulieren:

Es sei $x_1(t), x_2(t), \ldots$, $t\in(0,1)$, *eine Folge von reellen, meßbaren und stochastisch unabhängigen Funktionen mit denselben Verteilungsfunktionen. Reduziert sich der wesentliche Wertevorrat* mod 1 *von* $x_1(t)-x_2(t)$ *nicht auf eine endliche Anzahl von rationalen Zahlen, so existiert eine Menge* M *der Dichte Null, so daß für jedes Paar* $f, g \in L^2(0,1)$ *von Borelschen Funktionen mit der Periode* 1

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\bar{\in} M}} \int_0^1\int_0^1 f\big(s+s_n(t)\big)\cdot g(s)\,ds\,dt = \int_0^1 f(s)\,ds \int_0^1 g(s)\,ds, \tag{11}$$

wobei $s_n = x_1 + \ldots + x_n$.

Zitatennachweis

[1] S. Andersen and B. Jessen, *Some limit theorems on integrals in an abstract set*, Det Kgl. Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Med. 22, no 14 (1946).

[2] H. Anzai, *Random ergodic theorem with finite possible states*, Osaka Math. J. 2 (1950), S. 43-49.

[3] S. Gładysz, *A random ergodic theorem*, Bull. Ac. Sci. Pol. 2 (1954), S. 411-413.

[4] P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York 1950.

[5] E. Hopf, *Ergodentheorie*, Ergebnisse der Math., Berlin 1937.

[6] S. Kakutani, *Random ergodic theorems and Markoff processes with a stable distribution*, Proc. Sec. Berkeley Symp. 1950 (1951), S. 247-261.

[7] H. R. Pitt, *Some generalizations of the ergodic theorem*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 38 (1942), S. 325-343.

[8] H. Robbins, *On the equidistribution of sums of independent random variables*, Proc. Am. Math. Soc. 4 (1953), S. 786-799.

[9] C. Ryll-Nardzewski, *On the ergodic theorem (III)*, Studia Math. 14 (1954), S. 298-301.

[10] S. M. Ulam and J. von Neumann, *Random ergodic theorems*, Bull. Am. Math. Soc. 51 (1945), S. 660.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 25. 2. 1955