К ТЕОРИИ РИССА-ШАУДЕРА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА (B_0)

М. АЛЬТМАН (Варшава)

Основоположниками теории пространств типа (B_0) являются С. Мазур и В. Орлич [5].

Линейное пространство $\mathfrak{X}$ называется *пространством типа* (B_0), если в нём существует счётная последовательность псевдонорм $\{|x|_i\}$, обладающих следующими свойствами:

(а) $|x|_i \geqslant 0$, $|0|_i = 0$, $|tx|_i = |t|\,|x|_i$, $|x+y|_i \leqslant |x|_i + |y|_i$ $(i=1,2,\ldots)$.

(б) Если $|x|_i = 0$ $(i=1,2,\ldots)$, то $x=\mathbf{0}$

(x, y — произвольные элементы пространства $\mathfrak{X}$, $\mathbf{0}$ — нулевой элемент, t — действительное число).

(в) Если определим расстояние двух элементов x, y по формуле

$$\varrho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x-y|_i}{1+|x-y|_i},$$

то пространство $\mathfrak{X}$ превращается в полное пространство.

В дальнейшем будут использованы результаты, полученные в работе [2].

Итак, однородный и аддитивный оператор, определённый на пространстве $\mathfrak{X}$ типа (B_0) со значениями, принадлежащими другому пространству такого же типа, называется *вполне непрерывным*, если он переводит некоторую окрестность нулевого элемента (или некоторую сферу с центром в нулевом элементе) в компактное множество. Вполне непрерывный оператор является в то же время непрерывным и, следовательно, линейным вполне непрерывным оператором. Это вытекает непосредственно из леммы доказанной в работе [2] (стр. 196). Таким образом, определение вполне непрерывного оператора не требует дополнительного требования его непрерывности. Это замечание справедливо также и для локально-выпуклых линейных топологических пространств (ср. [4], стр. 180).

Пусть теперь U — линейный вполне непрерывный оператор, отображающий пространство $\mathfrak{X}$ типа (B_0) в себя. Положим $T=I-U$, где I — тождественный оператор.

Если $T=AB=BA$, причём A и B — линейные операторы отображающие пространство $\mathfrak{X}$ в себя, то известная теория Рисса-Шаудера ([7], [8]) *имеет место для каждого из операторов A и B.*

Доказательство этого результата является целью настоящей работы.

Из этого результата вытекает в частности, что если некоторая итерация линейного оператора U является вполне непрерывным оператором, то для оператора $I-U$ имеет место теория Рисса-Шаудера.

Для пространств Банаха последний результат был получен Никольским [6].

Применяемый здесь метод доказательства основывается на алгебраическом методе Рисса [7] и на результатах полученных в работе [2]. Существенным моментом является переход с самого начала к сопряжённому оператору (Теорема 4). Этот шаг позволяет немедленно получить Теорему 5, которая вместе с Теоремой 1 сразу же ведет к Теореме 6, являющейся узловой теоремой во всей теории Рисса.

Однако следует отметить, что основная теорема теории Рисса (о представимости оператора в виде суммы операторов обратимого и конечномерного) получается с помощью непосредственного рассуждения, применимого также в случае классической теории Рисса, но не наоборот, т. е. метод Рисса доказательства этой теоремы здесь неприменим.

Вследствие предположенной коммутативности произведения, $AB = BA$, роли, в которых эти операторы выступают, симметричны; следовательно, достаточно всю теорию доказать для одного из них.

Теорема 1. *Область значений оператора A образует замкнутое подпространство пространства $\mathfrak{X}$.*

Доказательство.[1]) Пусть L образ оператора A в $\mathfrak{X}$ и y — точка замыкания множества L. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset \mathfrak{X}$ такая, что $A(x_n) \to y$ при $n \to \infty$. Пусть $|x|$ — соответствующая псевдонорма элемента, определённая по лемме ([2], стр. 196). Обозначим через G множество всех решений уравнения

$$A(x) = 0. \tag{1}$$

[1]) [3], Теорема 11, стр. 151.

Положим $d_n = \inf|x_n - x|$, $x \in G$. Тогда существует элемент $w_n \in G$ такой, что

(2) $$d_n \leqslant |x_n - w_n| \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right) d_n\ ^{2});$$

имеем

(3) $$\lim_{n\to\infty} A(x_n - w_n) = y.$$

Докажем, что последовательность $\{|x_n - w_n|\}$ ограничена. В самом деле, предположим, что

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - w_n| = \infty.$$

Полагая

$$z_n = \frac{x_n - w_n}{|x_n - w_n|}$$

и учитывая (3), имеем

$$\lim_{n\to\infty} A(z_n) = 0 \quad \text{и} \quad |z_n| = 1,$$

откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} T(z_n) = \lim_{n\to\infty} BA(z_n) = 0.$$

В силу компактности последовательности $\{U(z_n)\}$, из последовательности $\{z_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{z_{n_i}\}$, сходящуюся к некоторому элементу w_0, удовлетворяющему уравнению $A(w_0)=0$; следовательно, $w_0 \in G$. Положив $z_n - w_0 = g_n$, имеем

(4) $$|g_{n_i}| \to 0 \quad \text{при} \quad i\to\infty.$$

Так как

$$\frac{x_n - w_n}{|x_n - w_n|} - w_0 = g_n,$$

то $x_n - w_n - w_0|x_n - w_n| = g_n |x_n - w_n|$. Отсюда, в силу (2), получается

(5) $$\big|x_{n_i} - w_{n_i} - w_0|x_{n_i} - w_{n_i}|\big| \leqslant |g_{n_i}|\left(1+\frac{1}{n_i}\right) d_{n_i}.$$

На основании (4) и (5) существует n_i такое, что

$$\big|x_{n_i} - w_{n_i} - w_0|x_{n_i} - w_{n_i}|\big| \leqslant \frac{d_{n_i}}{2},$$

что невозможно, так как $w_{n_i} - w_0|x_{n_i} - w_{n_i}| \in G$, а по определению $d_{n_i} = \inf|x_{n_i} - x|$, $x \in G$.

[2]) Если $d_n = 0$, то по правой стороне равенства (2) достаточно положить 1.

Так как последовательность $\{|x_n - w_n|\}$ ограничена и последовательность $\{T(x_n - w_n) = BA(x_n - w_n)\}$ сходится, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k} - w_{n_k}\}$ сходящаяся к некоторому элементу $x \in \mathfrak{X}$ и, следовательно, $A(x_{n_k} - w_{n_k}) = A(x_{n_k}) \to A(x)$ при $k\to\infty$, откуда имеем $y = A(x)$ и теорема доказана.

Следствие. *Область значений оператора A^n ($n=1,2,\ldots$) образует замкнутое подпространство пространства $\mathfrak{X}$.*

Доказательство проводится точно так же, как и доказательство Теоремы 1, заменяя оператор T оператором $T^n = B^n A^n$.

Теорема 2. *Множество G всех решений уравнения $A(x)=0$ образует евклидово пространство.*

Доказательство. Пространство G содержит самое большее конечное число линейно независимых элементов, так как на основании Теоремы 2 ([2], стр. 197) уравнение $T(x)=0$ имеет не больше, чем конечное число линейно независимых решений. Аналогично доказывается следующая

Теорема 2′. *Множество всех решений уравнения $A^n(x)=0$ ($n=1,2,\ldots$) образует евклидово пространство.*

Обозначим через G_n множество всех решений уравнения $A^n(x)=0$ ($n=1,2,\ldots$).

Теорема 3. *Существует натуральное число ν такое, что $G_n = G_\nu$ при $n>\nu$ и $G_n \neq G_\nu$ при $n<\nu$ (или, что равносильно, $A^n(x)=0$ влечёт $A^\nu(x)=0$ при $n>\nu$ и для $n<\nu$ существует элемент x такой, что $A^{n+1}(x)=0$, но $A^n(x)\neq 0$).*

Доказательство. На основании теоремы 3 ([2], стр. 198) утверждение верно для оператора T, следовательно размерность пространства G_n не может неограниченно возрастать вместе с n.

Следствие. *Если уравнение $A(x)=y$ имеет решение при любом $y \in \mathfrak{X}$, то уравнение $A(x)=0$ имеет единственное решение $x=0$.*

Обозначим через $\bar{A}$ оператор сопряжённый с A, а через G_n^* множество всех решений сопряжённого с (1) уравнения $\bar{A}(X)=0$.

Теорема 4. *Существует натуральное число μ такое, что $G_n^* = G_\mu^*$ при $n>\mu$ и $G_n^* \neq G_\mu^*$ при $n<\mu$ (или, что равносильно, $\bar{A}^n(X)=0$ влечёт $\bar{A}^\mu(X)=0$ при $n<\mu$ и для $n<\mu$ существует линейный функционал X, определённый на $\mathfrak{X}$ и такой, что $\bar{A}^{n+1}(X)=0$, но $\bar{A}^n(X)\neq 0$).*

Доказательство. Существование такого числа μ следует из теорем 3 и 16 ([2], стр. 198 и 205), согласно которым число линейно независимых решений уравнения $\bar{T}^n(X)=0$ не может неограниченно расти вместе с n; следовательно, то же самое верно и для оператора $\bar{A}^n$, так как $\bar{T}^n = \bar{B}^n \bar{A}^n$.

Пусть L_n — область значений оператора A^n.

Теорема 5. *Существует натуральное число ν такое, что $L_n=L_\nu$ для $n>\nu$ и $L_{n+1}\neq L_\nu$ для $n<\nu$. Число ν совпадает с соответствующими числами, определёнными в теоремах 3 и 4, т. е. $\nu=\mu$*[3].

Подпространство L_ν, т. е. множество элементов y вида $y=A^\nu(x)$, называется *многообразием ядра,* его элементы — *элементами ядра.* Решения уравнения $A^\nu(x)=0$ называются *нуль-элементами.*

Эти определения равносильны следующим: элемент y называется *элементом ядра,* если уравнения $y=A^n(x)$ разрешимы при всяком n. *Нуль-элемент* это элемент, который, начиная с некоторого n, удовлетворяет всем уравнениям $A^n(x)=0$.

Теорема 6. *Любой элемент пространства $\mathfrak{X}$ может быть, и притом единственным образом, представлен в виде суммы элемента ядра и нуль-элемента.*

Доказательство. Рассуждая таким же образом, как в аналогичной теореме Рисса ([7], теорема 8), на основании теорем 3 и 5 получаем требуемое представление.

Теорема 7. *Существует один единственный линейный оператор $A^{(0)}$, переводящий каждый элемент ядра в самого себя и каждый нуль-элемент в нуль. Любой элемент переводится посредством преобразования $A^{(0)}$ в элемент ядра, а посредством преобразования $I-A^{(0)}$ в нуль-элемент.*

Кроме того, $A^{(0)2}=A^{(0)}$ *и* $(I-A)A^{(0)}=A^{(0)}(I-A)$ [4].

Теорема 8. *Оператор $I-A$ допускает единственное разложение $I-A=A_1+A_2$, где A_1 — линейный оператор, переводящий все нуль-элементы в нуль, а A_2 — линейный оператор, переводящий все элементы ядра в нуль. Оператор $I-A_1$ совпадает с $I-A$ для всех элементов ядра, а A_2 совпадает с $I-A$ для всех нуль-элементов. Оператор A_1 переводит каждый элемент в элемент ядра, A_2 — переводит каждый элемент в нуль-элемент. Операторы A_1, A_2 ортогональны, т. е. $A_1A_2=A_2A_1=0$*[5].

Линейный оператор называется *конечномерным,* если он отображает $\mathfrak{X}$ в подпространство конечного числа измерений.

Линейный оператор D называется *обратимым,* если он взаимно однозначно отображает пространство $\mathfrak{X}$ само на себя. В этом случае, в силу полноты пространства $\mathfrak{X}$, существует обратный линейный оператор D^{-1} ([3], теорема 5, стр. 41), для которого $DD^{-1}=D^{-1}D=I$.

[3]) Доказательство проводится точно так же как доказательство теоремы I [1].

[4]) Доказательство проводится точно так же как доказательство теоремы 3 [1].

[5]) Доказательство теоремы проводится точно так же как доказательство теоремы 4 [1].

Теорема 9. *Оператор $D_1=I-A_1$ обратим. Уравнения $A^n(x)=0$ и $D_2^n(x)=0$, где $D_2=I-A_2$, имеют при любом n одинаковые решения. Уравнения $A^n(x)=y$ и $D_2^n(x)=y$ (с одинаковыми правыми частями) или одновременно разрешимы, или оба не имеют решений*[6].

Число λ называется *регулярным значением оператора A,* если $x-\lambda A(x)=0$ влечёт за собой $x=0$, в противном случае λ называется *собственным значением оператора A.*

Теорема 10. *Собственные значения оператора A не имеют ни одной конечной предельной точки.*

Доказательство. Это следует непосредственно из теоремы 11 ([2], стр. 201).

Теорема 11. *Оператор A можно представить в виде суммы линейных операторов*

$$A=D+K,$$

из которых D — обратимый, а K — конечномерный.

Доказательство. На основании теоремы 8 имеем

$$A=I-A_1-A_2=D_1-(I-A)(I-A^{(0)})=D_1-(I-A^{(0)})(I-A).$$

Положим $D=D_1$ и $K=-A_2$. Тогда обратимость D следует из теоремы 9, а конечномерность оператора K следует из конечномерности оператора A_2, так как оператор $I-A^{(0)}$ конечномерный.

На основании теоремы 11 можно уравнения

(6) $A(x)=0$, (8) $A(x)=y$,

(7) $\bar{A}(X)=0$, (9) $\bar{A}(X)=Y$

свести к равносильным уравнениям

(10) $x-K_1(x)=0$, (12) $x-K_1(x)=y$,

(11) $X-\bar{K}_1(X)=0$, (13) $X-\bar{K}_1(X)=Y$,

где K_1 — конечномерный оператор.

Для этого достаточно ввести новый неизвестный элемент x_1 по формуле $x_1=D(x)$. Тогда по теореме 11 уравнение (8) примет вид $x_1+K_1(x_1)=y$, где $K_1=KD^{-1}$.

Применяя соответствующие теоремы, указанные в работе [2] (стр. 205-206) к уравнениям (10)-(12) получаем следующие теоремы:

[6]) Доказательство проводится точно так же как доказательство теоремы 5 [1].

Теорема 12. *Однородные уравнения* (6), (7) *имеют одинаковое число линейно независимых решений. Если одно из уравнений* (8), (9) *разрешимо при любой правой части, то это же верно и для другого, причем из разрешимости одного из этих уравнений при любой правой части следует единственность решения.*

Теорема 13. *Уравнение* $A(x)=y_0$ *имеет решение тогда и только тогда, когда элемент* y_0 *ортогонален всем линейным функционалам* X, *являющимся решениями сопряженного однородного уравнения* (7), *т. е.* $X(y_0)=0$ *для всех* X *удовлетворяющих уравнению* (7). *Уравнение* $\bar{A}(X)=Y_0$ *имеет решение тогда и только тогда, когда функционал* Y_0 *ортогонален всем элементам* x, *являющимся решениями однородного уравнения* (6), *т. е. если* $y_0(x)=0$ *для всех* x, *удовлетворяющих уравнению* (6).

В частности, если однородное уравнение (6) (*соотв.* (7)) *не имеет нетривиальных решений, то уравнение* (8) (*соотв.* (9)) *имеет решение при любой правой части.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться соотношением $A(x)=(I-K_1)D(x)$, где $K_1=KD^{-1}$. Если $Y_0(x)=0$ для всех x, удовлетворяющих уравнению $A(x)=0$, то $Y_0(D^{-1}y)=0$, если $A(D^{-1}y)=0$. Следовательно $\bar{D}^{-1}Y_0(y)=0$, если $A(D^{-1}y)=(I-K_1)y=0$, и в силу теоремы 20 ([2], стр. 206) существует линейный функционал X, удовлетворяющий уравнению $\bar{D}^{-1}y_0=\overline{(I-K_1)}X$. Это значит, что $Y_0=\bar{D}\overline{(I-K_1)}X=\overline{(I-K_1)D}X=\bar{A}(X)$.

Утверждение относительно уравнения $A(x)=y_0$ следует из теоремы 1.

Теорема 14. *Если при некотором натуральном* n *оператор* U^n *является вполне непрерывным, то для оператора* $I-U$ *имеет место теория Рисса-Шаудера.*

Доказательство. Пользуясь тождеством

$$T=I-U^n=(I-U)(I+U+\ldots+U^{n-1}),$$

получаем представление оператора T в виде коммутативного произведения $T=AB=BA$, где $A=I-U$, и на основании вышеизложенного — теорема верна.

Цитированная литература

[1] M. Altman, *On linear functional equations in* (B_0)*-spaces*, этот том, стр. 131.

[2] — *On linear functional equations in locally convex linear topological spaces*, Stud. Math. 13 (1953), стр. 194-207.

[3] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[4] J. Leray, *Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complétement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes*, Acta Scient. Math. 12 B (1950), стр. 177-186.

[5] S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires (I)*, Stud. Math. 10 (1948), стр. 184-208.

[6] S. Nikolskij, *Lineare Gleichungen im metrischen Raume*, C. R. de l'Acad. des Sci. de l'URSS II (1936), стр. 315-319.

[7] F. Riesz, *Über lineare Funktionalgleichungen*, Acta Math. 41 (1918), стр. 71-98.

[8] J. Schauder, *Über lineare vollstetige Funktionaloperationen*, Stud. Math. 2 (1930), стр. 183-196.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Reçu par la Rédaction le 26. 1. 1955.