$$\frac{\{e^{-1/t}\}k_n}{a_{p_n}} \epsilon C \qquad (n=1,2,\ldots).$$

On conclut de là que $\{e^{-1/t}\}k_n$ tend vers zéro presque uniformément, ce qui entraîne la convergence de la suite $k_1, k_2, \ldots$ vers zéro. Cela prouve que la suite (1) n'est pas convergente (II).

Nous allons démontrer maintenant que les convergences (I) et (II) ne sont pas topologiques. Dans ce but, il suffit de construire un ensemble $X \subset A$ tel que $\overline{\overline{X}} \neq \overline{X}$. Soit X l'ensemble des éléments de la forme

$$c_{mn} = \frac{l^n}{a_m} + \left\{\frac{1}{m}\right\} \qquad (m, n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

où la suite $a_1, a_2, \ldots$ est définie par la formule (*).

Comme $l^n/a_m \bar{\epsilon} C$, on a

$$c_{mn} \neq 0$$

quels que soient les indices m et n (naturels).

D'après (3), on voit que, pour tout m fixe, la suite $c_{m1}, c_{m2}, \ldots$ converge (I) et, d'autant plus, converge (II) vers $\{1/m\}$. Donc, tous les éléments de la suite $\{1/1\}, \{1/2\}, \ldots$ appartiennent à $\overline{X}$. Or, la dernière suite converge (I) et (II) vers 0, donc $0 \epsilon \overline{\overline{X}}$. Pour démontrer que $\overline{\overline{X}} \neq \overline{X}$, il suffit de remarquer que 0 n'appartient pas à $\overline{X}$. Il résulte du lemme précédent que les seules suites d'éléments de X, convergentes (II), sont celles, dont tous les éléments, sauf un nombre fini au plus, appartiennent à la même ligne de la matrice (c_{mn}). Ces suites ne peuvent pas converger (II) vers zéro et, d'autant plus ne peuvent pas converger (I) vers zéro. Or, cela achève la démonstration.

Publications citées

[1] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa-Wrocław 1948.

[2] J. Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Math. 11 (1950), p. 41-70.

[3] — *Remarks on the moment problem and a theorem of Picone*, Colloquium Math. 2 (1951), p. 138-141.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE WROCŁAW

(Reçu par la Rédaction le 3. 10. 1953)

Sur le corps des opérateurs de Mikusiński

par

C. RYLL-NARDZEWSKI (Lublin)

Soit C l'anneau des fonctions $f=\{f(t)\}$ continues dans l'intervalle $0 \leqslant t < \infty$ avec l'addition habituelle et la multiplication au sens du produit de composition

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

Cet anneau n'a pas de diviseurs de zéro et peut donc être étendu au corps quotient Q. Les éléments de Q seront dits *opérateurs*[1]).

Le but de cette note est de démontrer que le corps Q n'est pas algébriquement fermé. Plus précisément, nous démontrerons qu'il existe dans C des éléments f pour lesquels l'équation $x^2=f$ n'est pas résoluble dans Q.

Posons par définition, pour $\lambda>0$,

$$T_\lambda\{f(t)\} = \{\lambda f(\lambda t)\} \qquad (f \epsilon C);$$

il est facile de vérifier que

$$T_\lambda(fg) = (T_\lambda f)(T_\lambda g) \qquad (f, g \epsilon C). \tag{1}$$

La transformation T_λ s'étend aux éléments $x \epsilon Q$, en posant pour $x=f/g$ $(f, g \epsilon C)$

$$T_\lambda x = \frac{T_\lambda f}{T_\lambda g}.$$

La relation (1) permet de vérifier facilement que cette extension est univoque et compatible avec la définition dans C. De plus, la relation (1) est encore valable dans Q.

Il existe des fonctions réelles $f \epsilon C$ tels que

$$T_{\lambda_0} f = -\lambda_0^2 f, \tag{2}$$

[1]) J. Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica 11 (1950), p. 41-70.

par exemple

$$f=\left\{t\sin\frac{\pi\log t}{\log\lambda_0}\right\}\qquad(\lambda_0\text{ positif et }\neq 1).$$

Si (2), l'équation

$$x^2=f \tag{3}$$

n'est pas résoluble dans Q. En effet, supposons, au contraire, qu'il existe un opérateur x satisfaisant à cette équation. Cet opérateur est réel ou purement imaginaire, c'est-à-dire il est de la forme f/g ou bien de la forme $i\,f/g$, où les fonctions f et g (appartenant à C) sont réelles. On a

$$T_{\lambda_0}(x^2)=(T_{\lambda_0}x)^2=T_{\lambda_0}f=-\lambda_0^2 f=-\lambda_0^2 x^2,$$

d'où

$$T_{\lambda_0}x=\pm i\lambda_0 x.$$

Or, ce n'est pas possible, car on voit aussitôt que l'opérateur $T_{\lambda_0}x$ est réel ou imaginaire, suivant que x est réel ou imaginaire.

Cette contradiction prouve que l'équation (3) n'est pas résoluble.

(Reçu par la Rédaction le 27. 12. 1953)

Singular integrals and periodic functions

by

A. P. CALDERÓN (Columbus, Ohio) and A. ZYGMUND *) (Chicago, Illinois)

1. The purpose of this note is to extend to periodic functions some of the results about singular integrals known for the non-periodic case. We shall be more specific later and begin by recalling basic facts.

Let $x=(\xi_1,\ldots,\xi_k)$, $y=(\eta_1,\ldots,\eta_k),\ldots$ denote points in the k-dimensional Euclidean space E^k. By x we shall also denote the vector joining the origin $O=(0,\ldots,0)$ with the point x. The length of the vector x will be denoted by $|x|$. If $x\neq 0$, by x' we shall mean the projection of x onto the unit sphere Σ having O for centre. Thus

$$x'=\frac{x}{|x|},\qquad |x'|=1.$$

We shall consider kernels $K(x)$ of the form

$$K(x)=\frac{\Omega(x')}{|x|^k}=\frac{\Omega(x')}{r^k}\qquad(r=|x|), \tag{1.1}$$

where Ω is a scalar (real or complex) function defined on Σ and satisfying the following conditions:

1° $\Omega(x')$ is continuous on Σ and its modulus of continuity $\omega(\delta)$ satisfies the Dini condition

$$\int_0^1\frac{\omega(\delta)}{\delta}\,d\delta<\infty;$$

2° The integral of $\Omega(x')$ extended over Σ is zero.

Condition 1° is certainly satisfied if the function Ω satisfies a Lipschitz condition of positive order. It could be considerably relaxed in very important special cases, but for the problems discussed in this paper it is the most suitable one. On the other hand, condition 2° is absolutely essential, as explained in [2][1]).

*) Fellow of the John Simon Guggenheim Foundation.

[1]) Numbers in brackets refer to the bibliography at the end of the paper.