En ajoutant une inégalité à l'autre on obtient la thèse du théorème 12.

L'ensemble R composé de tous les (x, y) pour lesquels on a $x-[x]<1/2$, et le segment AB de longueur $2r=1/2\sin 60^{0}$ réalisent l'égalité dans l'inégalité (14) pour $\omega_1=1/2$. Je ne sais pas si l'inégalité (14) peut être améliorée pour d'autres ω_1.

Publications citées

[1] B. de Finetti, *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio*, Mem. R. Accad. Naz. Lincei, 6 série, 4 (1930), p. 86.

[2] A. Khintchine, *Sur les classes d'événements équivalents*, Математический Сборник 39.3 (1932), p. 40-42.

[3] А. Я. Хинчин, *О классах эквивалентных событий*, Доклады Академии Наук СССР 85 (1952), p. 713-714.

[4] E. B. Levy, *The point methods of pasture analysis*, New Zealand Journal of Agriculture 46 (1933).

(Reçu par la Rédaction le 23. 5. 53)

Sur la structure non topologique du corps des opérateurs

par

K. URBANIK (Wrocław)

1. Soit C l'anneau des fonctions complexes continues $a=\{a(t)\}$, définies pour $0\leqslant t<\infty$. L'addition et la multiplication sont données par les formules

$$a+b=\{a(t)+b(t)\},$$

$$a\cdot b=\{\int_0^t a(t-\tau)b(\tau)\,d\tau\}.$$

Soit A le corps quotient sur C; les éléments de A seront dits *opérateurs* [1]).

J. Mikusiński a introduit deux types de convergence des opérateurs:

(I) La suite d'opérateurs $a_1, a_2, \ldots$ converge vers l'opérateur a, lorsqu'il existe un élément $k\epsilon C$ $(k\neq 0)$ tel que $ka_n\epsilon C$ $(n=1,2,\ldots)$, $ka\epsilon C$ et que la suite $ka_1, ka_2, \ldots$ converge vers ka presque uniformément (c'est-à-dire uniformément dans tout intervalle fini) [2]).

(II) La suite d'opérateurs $a_1, a_2, \ldots$ converge vers l'opérateur a, lorsqu'il existe une suite $k_1, k_2, \ldots$ $(k_n\epsilon C)$ convergente presque uniformément vers un élément $k\epsilon C$ $(k\neq 0)$, telle que $k_n a_n\epsilon C$ $(n=1,2,\ldots)$, $ka\epsilon C$, et que la suite $k_1a_1, k_2a_2, \ldots$ converge vers ka presque uniformément [3]).

Il est évident que la convergence (I) entraîne la convergence (II). L'implication inverse n'a pas lieu. Par exemple la suite $\{e^{nt}\}$ converge (II), mais diverge (I). En effet, on peut vérifier facilement que

$$\left\{\frac{1}{n}-t\right\}\{e^{nt}\}=\left\{\frac{1}{n}t\right\},$$

d'où la convergence (II). D'autre part supposons qu'il existe une fonction $k\epsilon C$ telle que la suite $k\{e^{nt}\}$, c'est-à-dire la suite

$$\{\int_0^t e^{n\tau}k(t-\tau)\,d\tau\},$$

[1]) J. Mikusiński [2], p. 43-44.

[2]) Cf. loc. cit., p. 62.

[3]) Cette définition n'a pas encore été publiée.

converge presque uniformément. Alors, pour tout t fixe, la suite $\int_0^t e^{n\tau} k(t-\tau)\,d\tau$ $(n=1,2,\ldots)$ est bornée, d'où il résulte, d'après un théorème des moments [4]), que $k(t-\tau)=0$ pour $0\leqslant\tau\leqslant t$. Comme t peut être fixé arbitrairement, il s'ensuit que $k=0$ identiquement. Cela prouve que la suite $\{e^{nt}\}$ ne converge pas au sens (I).

2. Une convergence quelconque étant définie dans A, on peut introduire la notion de fermeture de la manière suivante. Si $X\subset A$, on appelle la *fermeture* de X, qu'on désigne par $\overline{X}$, l'ensemble des éléments x de A pour lesquels il existe une suite $x_1, x_2, \ldots$ $(x_n \epsilon X)$ convergente vers x. Si la convergence considérée est du type (L) de Fréchet, c'est-à-dire si

(i) la suite $a, a, \ldots$ converge vers a,

(ii) toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite que la suite primitive,

il est facile de voir que

1º $\overline{X+Y}=\overline{X}+\overline{Y}$,

2º $X\subset\overline{X}$,

3º $\overline{O}=O$ (O — l'ensemble vide).

Une convergence du type (L) de Fréchet sera dite *topologique* lorsque, de plus,

4º $\overline{\overline{X}}=\overline{X}$ [5]).

Il est facile de vérifier que les deux convergences (I) et (II), considérées dans le paragraphe précédent sont du type (L) de Fréchet. La question naturelle si ces convergences sont topologiques [6]) s'impose. La réponse est négative:

Les convergences (I) *et* (II) *ne sont pas topologiques.*

La démonstration de cette proposition est le but de cet article.

3. Avant d'aborder la démonstration, nous établirons quelques formules.

Posons

$$(*)\qquad a_n=\{\max(0, t-n)\}\qquad (n=1,2,\ldots).$$

---

[4]) J. Mikusiński [3], p. 139.
[5]) K. Kuratowski [1], p. 45.
[6]) Cette question a été posée par J. Mikusiński.

Si $c_n=\dfrac{k}{a_n}\epsilon C$ $(k\epsilon C)$, on a

$$k(t)=\int_0^t c_n(t-\tau)a(\tau)\,d\tau \qquad (0\leqslant t<\infty)$$

et, par conséquent,

$$k(t)=0 \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant n.$$

Il s'ensuit que toute suite $k_1, k_2, \ldots$ $(k_n\epsilon C)$ telle que

$$\frac{k_n}{a_{p_n}}\epsilon C,$$

où $p_1, p_2, \ldots$ est une suite croissante de nombres naturels, converge vers zéro presque uniformément.

Posons $l=\{1\}$. Il est facile de démontrer que la suite $l, l^2, l^3, \ldots$ converge vers zéro presque uniformément. Il s'ensuit que, pour tout $a\epsilon C$ $(a\neq 0)$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l^n}{a}=0$$

au sens de la convergence (II) et, d'autant plus, au sens de la convergence (I).

Nous allons démontrer le lemme suivant:

Lemme. *Si $p_1, p_2, \ldots$, et $r_1, r_2, \ldots$ sont deux suites croissantes de nombres naturels, la suite*

$$(1)\qquad c_n=\frac{l^{r_n}}{a_{p_n}}+b_n \qquad (n=1,2,\ldots),$$

où $b_n\epsilon C$, n'est pas convergente (II).

Démonstration. Soit $k_1, k_2, \ldots$ $(k_n\epsilon C)$ une suite presque uniformément convergente et telle que

$$k_n c_n\epsilon C \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Comme $b_n\epsilon C$, on a, d'après (1),

$$(2)\qquad \frac{k_n l^{r_n}}{a_{p_n}}\epsilon C \qquad (n=1,2,\ldots).$$

On peut démontrer facilement que

$$\frac{\{e^{-1/t}\}}{l^n}\epsilon C \qquad (n=1,2,\ldots),$$

ce qui entraîne, en vertu de (2),

$$\frac{\{e^{-1/t}\}k_n}{a_{p_n}} \epsilon C \qquad (n=1,2,\ldots).$$

On conclut de là que $\{e^{-1/t}\}k_n$ tend vers zéro presque uniformément, ce qui entraîne la convergence de la suite $k_1, k_2, \ldots$ vers zéro. Cela prouve que la suite (1) n'est pas convergente (II).

Nous allons démontrer maintenant que les convergences (I) et (II) ne sont pas topologiques. Dans ce but, il suffit de construire un ensemble $X \subset A$ tel que $\overline{\overline{X}} \neq \overline{X}$. Soit X l'ensemble des éléments de la forme

$$c_{mn} = \frac{l^n}{a_m} + \left\{\frac{1}{m}\right\} \qquad (m, n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

où la suite $a_1, a_2, \ldots$ est définie par la formule (*).

Comme $l^n/a_m \overline{\epsilon} C$, on a

$$c_{mn} \neq 0$$

quels que soient les indices m et n (naturels).

D'après (3), on voit que, pour tout m fixe, la suite $c_{m1}, c_{m2}, \ldots$ converge (I) et, d'autant plus, converge (II) vers $\{1/m\}$. Donc, tous les éléments de la suite $\{1/1\}, \{1/2\}, \ldots$ appartiennent à $\overline{X}$. Or, la dernière suite converge (I) et (II) vers 0, donc $0 \epsilon \overline{\overline{X}}$. Pour démontrer que $\overline{\overline{X}} \neq \overline{X}$, il suffit de remarquer que 0 n'appartient pas à $\overline{X}$. Il résulte du lemme précédent que les seules suites d'éléments de X, convergentes (II), sont celles, dont tous les éléments, sauf un nombre fini au plus, appartiennent à la même ligne de la matrice (c_{mn}). Ces suites ne peuvent pas converger (II) vers zéro et, d'autant plus ne peuvent pas converger (I) vers zéro. Or, cela achève la démonstration.

Publications citées

[1] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa-Wrocław 1948.

[2] J. Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Math. 11 (1950), p. 41-70.

[3] — *Remarks on the moment problem and a theorem of Picone*, Colloquium Math. 2 (1951), p. 138-141.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE WROCŁAW

(Reçu par la Rédaction le 3. 10. 1953)

Sur le corps des opérateurs de Mikusiński

par

C. RYLL-NARDZEWSKI (Lublin)

Soit C l'anneau des fonctions $f = \{f(t)\}$ continues dans l'intervalle $0 \leqslant t < \infty$ avec l'addition habituelle et la multiplication au sens du produit de composition

$$\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

Cet anneau n'a pas de diviseurs de zéro et peut donc être étendu au corps quotient Q. Les éléments de Q seront dits *opérateurs*[1]).

Le but de cette note est de démontrer que le corps Q n'est pas algébriquement fermé. Plus précisément, nous démontrerons qu'il existe dans C des éléments f pour lesquels l'équation $x^2 = f$ n'est pas résoluble dans Q.

Posons par définition, pour $\lambda > 0$,

$$T_\lambda\{f(t)\} = \{\lambda f(\lambda t)\} \qquad (f \epsilon C);$$

il est facile de vérifier que

$$T_\lambda(fg) = (T_\lambda f)(T_\lambda g) \qquad (f, g \epsilon C). \tag{1}$$

La transformation T_λ s'étend aux éléments $x \epsilon Q$, en posant pour $x = f/g$ $(f, g \epsilon C)$

$$T_\lambda x = \frac{T_\lambda f}{T_\lambda g}.$$

La relation (1) permet de vérifier facilement que cette extension est univoque et compatible avec la définition dans C. De plus, la relation (1) est encore valable dans Q.

Il existe des fonctions réelles $f \epsilon C$ tels que

$$T_{\lambda_0} f = -\lambda_0^2 f, \tag{2}$$

1) J. Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica 11 (1950), p. 41-70.