Les inégalités entre les moments des variables aléatoires équivalentes

par

S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

B. de Finetti a introduit en 1930 les notions d'événements équivalents[1]) et de variables aléatoires équivalentes. Dans cette note je vais démontrer quelques inégalités entre leurs moments, qui ont un sens probabiliste intéressant. Elles sont une généralisation et en même temps une conséquence du théorème sur les inégalités entre les moments absolus d'une variable aléatoire. Mes théorèmes et leurs démonstrations sont exprimés dans le langage de la théorie de la mesure. On peut les traduire en le langage usuel de la théorie des probabilités, en lisant „probabilité" au lieu de „mesure", „événement" au lieu de „ensemble" et „variable aléatoire" au lieu de „fonction mesurable".

Les variables aléatoires indépendantes ont le coefficient de corrélation nul. Le coefficient de corrélation des variables aléatoires équivalentes peut être différent de zéro. Il résulte de mes inégalités que pour une suite de variables aléatoires équivalentes le coefficient de corrélation des variables de cette suite est nécessairement positif, s'il est différent de zéro.

A la fin je démontre à l'aide d'une des mes inégalités un théorème qui a une interprétation intéressante dans la méthode d'estimation de la composition végétale des champs avec une „règle de Levy".

1. J'appellerai un système fini $E_1,\ldots,E_n$ (ou une suite $E_1,E_2,\ldots$) d'ensembles mesurables L, situés sur une droite, *système* (ou *suite*) *d'ensembles équivalents m à m*, si pour tout $k\leqslant m$ la mesure ω_k du produit de k ensembles $E_{i_1},\ldots,E_{i_k}$, où les indices $i_1,\ldots,i_k$ sont différents, est un nombre dépendant de k seulement.

J'appellerai un système $E_1,E_2,\ldots,E_n$ d'ensembles équivalents n à n *système d'ensembles équivalents*.

[1]) Voir B. de Finetti [1]. Cf. aussi une série de trois notes du même auteur dans Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei 18 (1933).

J'appelerai une suite $E_1,E_2,\ldots$ d'ensembles équivalents m à m pour tout m *suite d'ensembles équivalents*. Je considère dans la suite seulement le cas, où tous les ensembles considérés sont situés sur le segment $(0,1)$.

THÉORÈME 1. *Pour un système $E_1,\ldots,E_n$ d'ensembles équivalents deux à deux et situés sur le segment $(0,1)$, on a l'inégalité*

$$\omega_2\geqslant\omega_1^2-\frac{\omega_1(1-\omega_1)}{n-1}. \tag{1}$$

Démonstration. Soit $h_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E_i. Considérons la variance σ^2 de la somme $h(t)=h_1(t)+h_2(t)+\ldots+h_n(t)$ définie par l'égalité

$$\sigma^2=\int_0^1\bigl(h(t)-M\bigr)^2\,dt,\qquad \text{où}\qquad M=\int_0^1 h(t)\,dt.$$

Un simple calcul montre que

$$\sigma^2=n\,\omega_1+n(n-1)\,\omega_2-(n\,\omega_1)^2. \tag{2}$$

En substituant cette expression dans l'inégalité $\sigma^2\geqslant 0$, on a (1), c. q. f. d.

L'inégalité (1) n'est pas la meilleure possible. Pour deux ensembles à mesure $1/2$ elle donne $\omega_2\geqslant 0$; si ces deux ensembles sont disjoints, l'égalité $\omega_2=0$ se réalisera. Mais pour trois ensembles à mesure $1/2$ supposés équivalents, l'inégalité (1) fournit $\omega_2\geqslant 1/8$; cependant il n'existe pas trois ensembles équivalents à mesure $1/2$, dont chaque paire ait une partie commune à mesure $1/8$. Cela résulte du fait que le produit du troisième de ces ensembles et du complément de la somme des deux autres devrait avoir la mesure $1/4$, ce qui est impossible parce que le complément de la somme de deux ensembles à mesure $1/2$ ayant une partie commune de mesure $1/8$ est de mesure $1/8$ et non de mesure $1/4$.

L'inégalité (1) se laisse améliorer de manière que pour tout ω_1 il existe un système d'ensembles équivalents réalisant l'égalité; c'est ce qu'affirment les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 2. *Pour un système $E_1,E_2,\ldots,E_n$ d'ensembles équivalents deux à deux et situés sur le segment $(0,1)$, on a l'inégalité*

$$\omega_2\geqslant\omega_1^2-\frac{\omega_1(1-\omega_1)}{n-1}+\frac{\bigl(n\,\omega_1-[n\,\omega_1]\bigr)\bigl(1-n\,\omega_1+[n\,\omega_1]\bigr)}{n(n-1)}, \tag{3}$$

où $[n\,\omega_1]$ est la partie entière de $n\omega_1$.

Dans la démonstration j'utilise le

LEMME 1. *La variance minima $\sigma^2_{\min}$ des fonctions définies dans l'intervalle $(0,1)$, à valeurs $0,1,\ldots,n$, ayant l'intégrale M_1, est égale à*

$$\sigma^2_{\min}=\bigl(M_1-[M_1]\bigr)\bigl(1-M_1+[M_1]\bigr). \tag{4}$$

Démonstration. D'après la définition on a

$$\sigma^2=\int_0^1 \big(s(t)-M_1\big)^2 dt.$$

Pour M_1 entier la fonction $s(t)$, qui est égale à M_1 partout, satisfait à la thèse du lemme 1.

Supposons que M_1 ne soit pas entier. Soit $s(t)$ une fonction satisfaisant à l'hypothèse du lemme 1. Alors $s(t)$ prend deux valeurs au moins sur les ensembles de mesure positive. Désignons par p_i la mesure de l'ensemble $E_t\{s(t)=i\}$ $(i=0,1,\ldots,n)$. Puisque

$$\int_0^1 \big(s(t)-M_1\big)^2 dt=\int_0^1 s^2(t)\,dt-M_1^2,$$

il suffit d'examiner quand l'intégrale du carré $s^2(t)$ est minimum. Je démontre que, si pour $i,j,\ j>i+1$, on a $p_i>0$ et $p_j>0$, il existe une autre fonction $s'(t)$, remplissant l'hypothèse du lemme 1, telle que

$$\int_0^1 s^2(t)dt-\int_0^1 s'^2(t)\,dt>0.$$

Pour $i,j,\ j>i+1$, on a l'inégalité

$$i^2+j^2>(i+1)^2+(j-1)^2. \tag{5}$$

Soit $s'(t)$ une fonction pour laquelle on a $p'_i=p_i-\varepsilon$, $p'_{i+1}=p_{i+1}+\varepsilon$, $p'_{j-1}=p_{j-1}+\varepsilon$, $p'_j=p_j-\varepsilon$, $p'_k=p_k$, $k\neq i,i+1,j-1,j$, où $\varepsilon=\min(p_i,p_j)$; dans le cas, où $i+1=j-1$, soit $p'_{i+1}=p_{i+1}+2\varepsilon$. Les fonctions $s(t)$ et $s'(t)$ ont les mêmes intégrales. De plus, en utilisant (5), on a

$$\int_0^1 s^2(t)\,dt-\int_0^1 s'^2(t)\,dt=\varepsilon\big(i^2+j^2-(i+1)^2-(j-1)^2\big)>0.$$

Il en résulte qu'une fonction à variance minima prend sur les ensembles de mesure positive deux valeurs seulement, dont la différence est égale à 1. Un simple calcul montre qu'une telle fonction prend la valeur $[M_1]+1$ sur un ensemble de mesure $M_1-[M_1]$ et la valeur $[M_1]$ sur un ensemble de mesure $1-M_1+[M_1]$. Alors sa variance est égale à $\big(M_1-[M_1]\big)\big(1-M_1+[M_1]\big)$, ce qui achève la démonstration.

Démonstration du théorème 2. Remarquons que la somme $h(t)$ des fonctions caractéristiques des ensembles considérés remplit l'hypothèse du lemme 1. Alors pour sa variance σ^2 on a l'inégalité $\sigma^2\geqslant\sigma^2_{\min}$. En transformant convenablement cette inégalité on obtient (3), c. q. f. d.

THÉORÈME 3. *Il existe pour tout* $\omega_1, 0\leqslant\omega_1\leqslant 1$, *un système* $E_1,E_2,\ldots,E_n$ *d'ensembles équivalents de mesure* ω_1, *situés sur le segment* $(0,1)$, *pour lequel dans l'inégalité* (3) *l'égalité se réalise.*

Cela résulte du lemme suivant:

LEMME 1. *Pour tout* n *et* $m\leqslant n$ *il existe sur chaque segment* (a,b) *donné d'avance un système* $E_1,E_2,\ldots,E_n$ *d'ensembles équivalents tel que tout point du segment* (a,b) *appartient exactement à* m *ensembles du système considéré.*

Démonstration. Je divise le segment (a,b) en $\binom{n}{m}$ parties égales $P_1,P_2,\ldots,P_k,\ldots,P_{\binom{n}{m}}$. J'arrange en ordre lexicographique de succession toutes les combinaisons $i_1,\ldots,i_m$ de m divers nombres d'entre $1,2,\ldots,n$. Je joint P_k à l'ensemble E_i si la k-tième combinaison contient le nombre i, dans le cas contraire je ne le joint pas à cet ensemble. Les ensembles E_i ainsi formés ont toutes les propriétés désirées, à savoir leur définition implique ce qu'il suit:

(a) pour tout k, $k=1,2,\ldots,\binom{n}{m}$, la partie P_k appartient à m divers ensembles E_i;

(b) pour tout $j\leqslant m$ et pour $i_1<i_2<\ldots<i_j\leqslant n$ quelconques, on a

$$|E_{i_1}E_{i_2}\ldots E_{i_j}|=\frac{\binom{n-j}{m-j}}{\binom{n}{m}}\,|(a,b)|$$

($|E|$ désigne ici la mesure de l'ensemble E).

La condition (a) assure que tout point du segment (a,b) appartient exactement à m ensembles E_i, tandis que la condition (b) implique leur équivalence, c. q. f. d.

Démonstration du théorème 3. Pour construire le système désiré d'ensembles équivalents je divise le segment $(0,1)$ en deux parties, à savoir l'une Z_1 à mesure $n\omega_1-[n\omega_1]$ et l'autre Z_2 à mesure $1-n\omega_1+[n\omega_1]$. En tenant compte du lemme 1, je construis sur la partie Z_1 un système $E'_1,E'_2,\ldots,E'_n$ d'ensembles équivalents la recouvrant $[n\omega_1]+1$ fois et sur la partie Z_2 un autre système $E''_1,E''_2,\ldots,E''_n$ d'ensembles équivalents la recouvrant $[n\omega_1]$ fois. Si on pose $E_i=E'_i+E''_i$, on obtient sur le segment $(0,1)$ un système $E_1,E_2,\ldots,E_n$ d'ensembles équivalents à mesure ω_1, pour lequel l'égalité dans (3) se réalise, c. q. f. d.

En négligeant les différences d'ordre $1/n$, on peut exprimer tout court le contenu des théorèmes démontrés en disant que *dans le système d'ensembles équivalents deux à deux la mesure* ω_2 *du produit des paires de ces ensembles doit surpasser la mesure carrée* ω_1^2. Une propriété analogue ont aussi les autres nombres ω_k, ce qu'assure le

THÉORÈME 4. *Pour un système $E_1, E_2, \ldots, E_n$ d'ensembles équivalents k à k, situés sur le segment* (0,1), *on a l'inégalité*

$$\omega_k \geqslant \frac{n^k}{n(n-1)\ldots(n-k+1)}\,\omega_1^k - \frac{n^k - n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n(n-1)\ldots(n-k+1)}. \tag{6}$$

Démonstration. Pour la somme $h(t)$ des fonctions caractéristiques $h_i(t)$ des ensembles E_i, subsiste l'inégalité

$$\int_0^1 h^k(t)\,dt \geqslant \Big\{\int_0^1 h(t)\,dt\Big\}^k.$$

En développant l'intégrale du côté gauche de cette inégalité et en substituant $n\omega_1$ pour l'intégrale du côté droit, on obtient l'inégalité

$$n(n-1)\ldots(n-k+1)\,\omega_k + \sum_{i=1}^{k-1} w_i(n)\,\omega_i \geqslant (n\omega_1)^k,$$

où les $\omega_i(n)$ sont des polynômes en n, de dégre $k-1$ au plus, à coefficients dépendant de k et tels que

$$\sum_{i=1}^{k-1} w_i(n) = n^k - n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

En transformant convenablement cette inégalité et en substituant l'unité pour tous les ω_i $(i=1,2,\ldots,k-1)$, on parvient à (6), c. q. f. d.

THÉORÈME 5. *Pour une suite $E_1, E_2, \ldots$ d'ensembles équivalents m à m, situés sur le segment* (0,1), *on a l'inégalité*

$$\omega_k \geqslant \omega_1^k \quad \textit{pour} \quad k \leqslant m. \tag{7}$$

Démonstration. Pour démontrer ce théorème il suffit de remarquer que dans ce cas l'inégalité (6) subsiste pour tout n, parce que les premiers n ensembles de la suite $E_1, E_2, \ldots$ forment un système d'ensembles équivalents m à m.

En allant avec n à l'infini, on obtient (7), ce qui achève la démonstration.

En suivant une voie indiquée par les démonstrations des théorèmes 4 et 5 on peut généraliser le théorème 5 à la forme du théorème 6 que j'énonce sans démonstration:

THÉORÈME 6. *Pour la suite $E_1, E_2, \ldots$ d'ensembles équivalents m à m situés sur le segment* (0,1), *on a l'inégalité*

$$\omega_k^l \geqslant \omega^k \quad \textit{pour} \quad l < k \leqslant m. \tag{8}$$

En tenant compte de la définition de la suite des ensembles équivalents on obtient le

THÉORÈME 7. *Pour la suite $E_1, E_2, \ldots$ d'ensembles équivalents, situés sur le segment* (0,1), *on a l'inégalité*

$$\omega_k^l \geqslant \omega_l^k \quad \textit{pour} \quad l < k. \tag{9}$$

Ce théorème admet aussi une autre démonstration, à savoir en utilisant un théorème de Khintchine [2] d'après lequel les nombres ω_k sont des moments d'une variable aléatoire à valeurs dans le segment (0,1). Cependant il serait difficile d'obtenir ces inégalités de la condition de Khintchine (loc. cit.) nécessaire et suffisante pour qu'une suite de nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots$ soit la suite des mesures des produits des ensembles d'une suite d'ensembles équivalents.

On voit que la notion d'ensembles équivalents est une généralisation de la notion d'ensembles indépendants. Les théorèmes démontrés, en particulier les théorèmes 1,4 et 5, expriment, en disant tout court, que, dans le cas des systèmes finis d'ensembles équivalents approximativement (avec une précision d'ordre $1/n$) et dans le cas des suites d'ensembles équivalents exactement, les mesures des produits des ensembles équivalents peuvent seulement surpasser les mesures respectives des produits des ensembles indépendants à la même mesure. Autrement dit, les ensembles équivalents ne peuvent être qu'indépendants ou dépendants positivement.

2. Une suite $E_1, E_2, \ldots$ d'ensembles est appelée une *suite stationnaire d'ensembles* si la distributrice du système $E_{k+1}, E_{k+2}, \ldots, E_{k+n}$ dépend de n seulement et non pas de k. Or, si $E_1, E_2, \ldots$ n'est qu'une suite stationnaire d'ensembles tout court sans être une suite d'ensembles équivalents, les inégalités (4) et (5) et même l'inégalité (1) peuvent ne pas subsister. On le voit en définissant une suite par les égalités suivantes:

$$E_{2n-1} = \Big\langle 0, \frac{1}{2}\Big\rangle, \quad E_{2n} = \Big\langle \frac{1}{2}, 1\Big\rangle.$$

Cette suite est une suite stationnaire d'ensembles et les produits de tous les deux ensembles consécutifs sont vides

3. Maintenant je donnerai une généralisation des théorèmes démontrés au cas des moments des fonctions mesurables L (ou des variables aléatoires dans le langage de la théorie des probabilités). Je considérerai tous les moments de ces fonctions ou bien seulement les moments de degré m au plus.

Suivant B. de Finetti appellons un système $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ (une suite $f_1(t), f_2(t), \ldots$) de fonctions mesurables *système* (*suite*) *de fonc-*

tions équivalentes m à m lorsque la distributrice m-dimensionnelle $F(a_1, a_2, \dots, a_m)$ du système $f_{i_1}(t), f_{i_2}(t), \dots, f_{i_m}(t)$ de fonctions dépend de m seulement et non pas du système $i_1, \dots, i_m$ d'indices.

Une suite $f_1(t), f_2(t), \dots$ de fonctions équivalentes m à m pour tout m sera appelée tout court *suite de fonctions équivalentes.*

Pour les démonstrations de mes théorèmes j'utiliserai seulement une propriété des fonctions équivalentes ainsi définies, à savoir l'égalité de certains moments.

On appellera un système $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ (une suite $f_1(t), f_2(t), \dots$) de fonctions mesurables, ayant les moments finis jusqu'au degré m, *système (suite) de fonctions faiblement équivalentes m à m*, si pour tout $k \leqslant m$ les moments de degré k, définis par les intégrales

$$\mu_{s_1, s_2, \dots, s_k} = \int_0^1 f_{i_1}^{s_1}(t) \cdot \ldots \cdot f_{i_k}^{s_k}(t)\, dt,$$

où $s_1 + s_2 + \dots + s_k = k$ et $i_1, \dots, i_k$ sont des indices divers, dépendent seulement du système $s_1, \dots, s_k$ d'exposants et non pas du système $i_1, \dots, i_k$ d'indices.

Une suite $f_1(t), f_2(t), \dots$ de fonctions mesurables ayant tous les moments finis sera appelée *suite de fonctions faiblement équivalentes*, si elle est une suite de fonctions faiblement équivalentes m à m pour tout m.

Les fonctions équivalentes sont évidemment faiblement équivalentes si elles ont les moments nécessaires finis.

Pour les moments des fonctions faiblement équivalentes se laissent démontrer toutes les inégalités analogues à celles entre les mesures des produits des ensembles équivalents. Les démonstrations sont formellement les mêmes que dans le cas des ensembles équivalents; il faut seulement remplacer dans le calcul les mesures des ensembles par les moments respectifs des fonctions considérées. J'énonce ces théorèmes généralisés en omettant leurs démonstrations:

THÉORÈME 8. *Pour un système $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ de fonctions faiblement équivalentes deux à deux, on a l'inégalité*

$$\mu_{1,1} \geqslant \mu_1^2 - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{n-1}. \tag{10}$$

THÉORÈME 9. *Pour le système $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ de fonctions non-négatives et faiblement équivalentes k à k, on a l'inégalité*

$$\mu_{\underbrace{1,1,\dots,1}_{k}} \geqslant \frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)}\, \mu_1^k - \frac{n^k - n(n-1)\dots(n-k+1)}{n(n-1)\dots(n-k+1)}\, M, \tag{11}$$

où M désigne le moment maximum de degré k.

THÉORÈME 10. *Pour une suite $f_1(t), f_2(t), \dots$ de fonctions non-négatives et faiblement équivalentes m à m, on a l'inégalité*

$$\mu^l_{\underbrace{1,1,\dots,1}_{k}} \geqslant \mu^k_{\underbrace{1,1,\dots,1}_{l}} \quad \text{pour} \quad l < k \leqslant m. \tag{12}$$

THÉORÈME 11. *Pour une suite $f_1(t), f_2(t), \dots$ de fonctions non-négatives et faiblement équivalentes, on a l'inégalité*

$$\mu^l_{\underbrace{1,1,\dots,1}_{k}} \geqslant \mu^k_{\underbrace{1,1,\dots,1}_{l}} \quad \text{pour} \quad l < k. \tag{13}$$

4. Voilà une application du théorème 2, ayant une interprétation dans la méthode d'estimation de la composition botanique des champs avec une „règle de Levy" (cf. [4]). Cette règle est une perche d'un mètre, divisée par des clous en décimètres. On jette cette règle au hasard sur le champ examiné et on compte les clous touchant une espèce botanique particulière. Il s'avère que pour toute paire de clous la probabilité de toucher avec les deux clous la même espèce sur un champ à deux espèces ne peut pas être moindre que 1/3.

Le sens precis de cet énoncé est le suivant:

Soit R un ensemble plan mesurable L, situé sur un plan euclidien (x, y) et ayant la propriété suivante: pour tout x, y les points $(x, y), (x+1, y), (x, y+1)$ appartiennent à l'ensemble R simultanément ou simultanément n'appartiennent pas à cet ensemble. La mesure de la partie de l'ensemble R, contenue dans le carré unitaire

$$Q = \underset{(x,y)}{E}\{0 \leqslant x < 1, 0 \leqslant y < 1\}$$

soit égale à ω_1. Désignons par Ω le cube

$$\underset{(x,y,\varphi)}{E}\{0 \leqslant x < 1, 0 \leqslant y < 1, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}.$$

On appellera *mesure* d'un sous-ensemble de Ω sa mesure lebesguienne divisée par 2π (pour avoir $|\Omega| = 1$). Considérons un segment AB de longueur $2r$ et centre S. Soient x, y les coordonnées du centre S, et φ l'angle entre l'axe des x et le vecteur $\overrightarrow{SA}$. Alors on aura $A = A(x, y, \varphi)$, $B = B(x, y, \varphi)$. Subsiste le suivant

THÉORÈME 12.

$$\Big|\underset{(x,y,\varphi)\in\Omega}{E}\{A(x,y,\varphi) \in R \ \text{ et } \ B(x,y,\varphi) \in R\}\Big| + \Big|\underset{x,y,\varphi)\in\Omega}{E}\{A(x,y,\varphi) \,\bar{\in}\, R \ \text{ et } \ B(x,y,\varphi) \,\bar{\in}\, R\}\Big| \geqslant \varphi(\omega_1), \tag{14}$$

où

$$\varphi(\omega_1)=\begin{cases}1-2\omega_1 & pour \quad 0\leqslant\omega_1\leqslant 1/3,\\ 1/3 & pour \quad 1/3\leqslant\omega_1\leqslant 2/3,\\ 2\omega_1-1 & pour \quad 2/3\leqslant\omega_1\leqslant 1.\end{cases}$$

D'abord je démontre deux lemmes. Pour un ensemble plan arbitraire E posons

$$E_{r,\varphi}=\underset{(x,y)}{E}\{(x+r\cos\varphi, y+r\sin\varphi)\epsilon E\}.$$

LEMME 2.

$$\Big|\underset{(x,y,\varphi)\epsilon\Omega}{E}\{A(x,y,\varphi)\epsilon R\}\Big|=|Q\cdot R|=\omega_1 \quad pour\ tout\ r.$$

Démonstration. Soit $h(x,y,\varphi)$ la fonction caractéristique de l'ensemble

$$I=\underset{(x,y,\varphi)\epsilon\Omega}{E}\{A(x,y,\varphi)\epsilon R\}.$$

Alors on a

$$|I|=\iiint_{\Omega} h(x,y,\varphi)\,dx\,dy\frac{d\varphi}{2\pi}=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1\int_0^1 h(x,y,\varphi)\,dx\,dy\right\}\frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Remarquons que, pour un φ fixé, $h(x,y,\varphi)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble plan $Q\cdot R_{r,\varphi}$. Puisque l'ensemble R est périodique, on a pour tout r,φ

$$\int_0^1\int_0^1 h(x,y,\varphi)\,dx\,dy=|Q\cdot R_{r,\varphi}|=|Q\cdot R|=\omega_1,$$

d'où il vient immédiatement

$$|I|=\omega_1, \qquad \text{c. q. f. d}$$

Désignons par ω_2 la mesure de l'ensemble

$$K=\underset{(x,y,\varphi)\epsilon\Omega}{E}\{A(x,y,\varphi)\epsilon R \quad \text{et} \quad B(x,y,\varphi)\epsilon R\}.$$

Considérons un triangle $A'B'S''$, dont le côté $A'B'$ a la longueur $2r$ et la hauteur $S''S'$, divisant au point S' le côté $A'B'$ en deux parties égales, a la longueur r'. Désignons par φ l'angle entre l'axe des x et le vecteur $\overrightarrow{S'A'}$, et par x,y les coordonnées du point S''. Posons

$$K_{r'}=\underset{(x,y,\varphi)\epsilon\Omega}{E}\{A'(x,y,\varphi)\epsilon R \quad \text{et} \quad B'(x,y,\varphi)\epsilon R\}.$$

LEMME 3. $|K_{r'}|=\omega_2$ *pour tout* r'.

Démonstration. Soit $k_{r'}(x,y,\varphi)$ la fonction caractéristique de l'ensemble $K_{r'}$. On peut écrire

$$|K_{r'}|=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1\int_0^1 k_{r'}(x,y,\varphi)\,dx\,dy\right\}\frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Remarquons que, pour un φ fixé, $k_{r'}(x,y,\varphi)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble

$$Z=Q\cdot\{R_{r,\varphi+\pi/2}\}_{r,\varphi}\cdot\{R'_{r,\varphi+\pi/2}\}_{r,\varphi+\pi}.$$

En utilisant la périodicité de l'ensemble R, on obtient

$$\int_0^1\int_0^1 k_{r'}(x,y,\varphi)\,dx\,dy=|Z|=|Q\cdot R_{r,\varphi}\cdot R_{r,\varphi+\pi}|=\int_0^1\int_0^1 k(x,y,\varphi)\,dx\,dy,$$

où $k(x,y,\varphi)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble K. Cela permet d'obtenir la thèse du lemme en intégrant par rapport à φ, ce qui achève la démonstration.

Démonstration du théorème 12. Considérons un triangle équilatéral $A''B''C''$, dont les côtés sont de longueur $2r$ et dont le centre est au point S'''. Soient x,y les coordonnées du centre S''' et φ l'angle entre l'axe des x et le vecteur $\overrightarrow{S'''A''}$. D'après le lemme 2, pour chaque sommet de ce triangle l'ensemble des $(x,y,\varphi)\epsilon\Omega$, pour lesquels le sommet respectif appartient à l'ensemble R, a la mesure ω_1; d'après le lemme 3, pour chaque paire de sommets de ce triangle, la mesure de l'ensemble des $(x,y,\varphi)\epsilon\Omega$, pour lesquels ces sommets appartiennent simultanément à l'ensemble R, est égale à ω_2. Alors les ensembles des $(x,y,\varphi)\epsilon\Omega$, pour lesquels respectivement le premier, le deuxième et le troisième sommet du triangle $A''B''C''$ appartiennent à l'ensemble R, forment un système de trois ensembles équivalents deux à deux. Il en résulte, à l'aide du théorème 2, que pour les nombres ω_1 et ω_2 subsiste l'inégalité (3) avec $n=3$, c'est-à-dire

$$\Big|\underset{(x,y,\varphi)\epsilon\Omega}{E}\{A(x,y,\varphi)\epsilon R \quad \text{et} \quad B(x,y,\varphi)\epsilon R\}\Big|$$

$$\geqslant\omega_1^2-\frac{\omega_1(1-\omega_2)}{2}+\frac{\big(3\omega_1-[3\omega_1]\big)\big(1-3\omega_1+[3\omega_1]\big)}{6}.$$

Un raisonnement analogue appliqué au complément $\bar{R}$ de l'ensemble R donne l'inégalité

$$\Big|\underset{(x,y,\varphi)\epsilon\Omega}{E}\{A(x,y,\varphi)\bar{\epsilon} R \quad \text{et} \quad B(x,y,\varphi)\bar{\epsilon} R\}\Big|$$

$$\geqslant(1-\omega_1)^2-\frac{\omega_1(1-\omega_1)}{2}+\frac{\big(3(1-\omega_1)-[3(1-\omega_1)]\big)\big(1-3(1-\omega_1)+[3(1-\omega_1)]\big)}{6}.$$

En ajoutant une inégalité à l'autre on obtient la thèse du théorème 12.

L'ensemble R composé de tous les (x,y) pour lesquels on a $x-[x]<1/2$, et le segment AB de longueur $2r=1/2\sin 60^0$ réalisent l'égalité dans l'inégalité (14) pour $\omega_1=1/2$. Je ne sais pas si l'inégalité (14) peut être améliorée pour d'autres ω_1.

Publications citées

[1] B. de Finetti, *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio*, Mem. R. Accad. Naz. Lincei, 6 série, 4 (1930), p. 86.

[2] A. Khintchine, *Sur les classes d'événements équivalents*, Математический Сборник 39.3 (1932), p. 40-42.

[3] А. Я. Хинчин, *О классах эквивалентных событий*, Доклады Академии Наук СССР 85 (1952), p. 713-714.

[4] E. B. Levy, *The point methods of pasture analysis*, New Zealand Journal of Agriculture 46 (1933).

(Reçu par la Rédaction le 23. 5. 53)

Sur la structure non topologique du corps des opérateurs

par

K. URBANIK (Wrocław)

1. Soit C l'anneau des fonctions complexes continues $a=\{a(t)\}$, définies pour $0\leqslant t<\infty$. L'addition et la multiplication sont données par les formules

$$a+b=\{a(t)+b(t)\},$$

$$a\cdot b=\{\int_0^t a(t-\tau)b(\tau)\,d\tau\}.$$

Soit A le corps quotient sur C; les éléments de A seront dits *opérateurs* [1]).

J. Mikusiński a introduit deux types de convergence des opérateurs:

(I) La suite d'opérateurs $a_1,a_2,\ldots$ converge vers l'opérateur a, lorsqu'il existe un élément $k\in C$ $(k\neq 0)$ tel que $ka_n\in C$ $(n=1,2,\ldots)$, $ka\in C$ et que la suite $ka_1,ka_2,\ldots$ converge vers ka presque uniformément (c'est-à-dire uniformément dans tout intervalle fini) [2]).

(II) La suite d'opérateurs $a_1,a_2,\ldots$ converge vers l'opérateur a, lorsqu'il existe une suite $k_1,k_2,\ldots$ $(k_n\in C)$ convergente presque uniformément vers un élément $k\in C$ $(k\neq 0)$, telle que $k_n a_n\in C$ $(n=1,2,\ldots)$, $ka\in C$, et que la suite $k_1a_1,k_2a_2,\ldots$ converge vers ka presque uniformément [3]).

Il est évident que la convergence (I) entraîne la convergence (II). L'implication inverse n'a pas lieu. Par exemple la suite $\{e^{nt}\}$ converge (II), mais diverge (I). En effet, on peut vérifier facilement que

$$\left\{\frac{1}{n}-t\right\}\{e^{nt}\}=\left\{\frac{1}{n}t\right\},$$

d'où la convergence (II). D'autre part supposons qu'il existe une fonction $k\in C$ telle que la suite $k\{e^{nt}\}$, c'est-à-dire la suite

$$\{\int_0^t e^{n\tau}k(t-\tau)\,d\tau\},$$

1) J. Mikusiński [2], p. 43-44.

2) Cf. loc. cit., p. 62.

3) Cette définition n'a pas encore été publiée.