Quelques remarques sur les expansions de Fourier

par

S. HARTMAN (Wrocław)

L'objet de ce travail consiste en étude de quelques propriétés des coefficients de Fourier de fonctions périodiques et presque périodiques, ainsi que des transformées de Fourier de fonctions définies sur la droite réelle. Les résultats exposés ici ne sont, pour la plupart, que des retouches au travail important de I. Gelfand, *Über absolut konvergente trigonometrische Reihen und Integrale*[1]), et les méthodes de démonstration sont dûes aux idées de cet auteur.

1. Soit R un anneau linéaire normé et complet, composé de suites de nombres complexes, l'addition et la multiplication étant définies par $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$ et par $\{a_n\}\cdot\{b_n\}=\{a_nb_n\}$. Si $x\in R$ et $y\in R$, on a d'après l'hypothèse $\|xy\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$. Admettons que toute suite de nombres complexes, dont les termes s'annulent, sauf un nombre fini, appartient à R et que l'ensemble E de toutes les suites de cette sorte est dense dans R. Alors on a le théorème suivant:

Théorème I. *Si h est un homomorphisme linéaire de l'algèbre R sur l'algèbre Z des nombres complexes, on a $h(\{a_n\})=a_\mu$ pour tout $\{a_n\}\in R$, où μ est un nombre naturel fixe qui caractérise l'homomorphisme h.*

Démonstration. On va désigner par R_μ la sous-algèbre de R composée d'éléments pour lesquels $n\neq\mu$ entraîne $a_n=0$. Il est évident que deux cas seulement sont possibles: ou bien (α) pour tout $\{a_n\}\in R_\mu$ on a $h(\{a_n\})=0$, ou bien (β) pour tout $\{a_n\}\in R_\mu$ on a $h(\{a_n\})=a_\mu$.

Nous allons prouver que, si pour h fixé et pour $\mu=\mu_0$ le cas (β) a lieu, alors pour tout $\mu\neq\mu_0$ c'est (α) qui se présente. En effet: admettons qu'on a (β) pour un $\mu\neq\mu_0$ et considérons des suites $\{a_n\}\in R_{\mu_0}$ et $\{b_n\}\in R_\mu$ telles que $a_{\mu_0}\neq 0$, $b_\mu\neq 0$; il vient $h(\{a_n\})=a_{\mu_0}$ et $h(\{b_n\})=b_\mu$, d'où il résulte que $h(\{a_nb_n\})=a_{\mu_0}b_\mu\neq 0$, ce qui est imposible vu que $a_nb_n=0$ pour tout n.

[1]) Matematičeskij Sbornik 9 (51): 1 (1941), p. 51-66.

Si $\vartheta=\{a_n\}\in E$, alors ϑ est la somme d'un nombre fini d'éléments $\{b_n^{(\mu)}\}\in R_\mu$, où $b_\mu^{(\mu)}=a_\mu$ (et $b_n^{(\mu)}=0$ pour $n\neq\mu$). Compte tenu de la relation

$$h(\{a_n\})=\sum_\mu h(\{b_n^{(\mu)}\}), \tag{1}$$

le cas (α) ne peut pas se présenter pour tout μ parce qu'on en déduirait que $h(E)=(0)$, d'où, en vertu de la densité de E et de la continuité de h, on aurait aussi $h(R)=(0)$, contrairement à la condition $h(R)=Z$. Il faut ainsi, pour un $\mu=\mu_0$, et précisément pour ce μ, que ce soit le cas (β) qui se présente. Or, en vertu de (1), il vient $h(\{a_n\})=a_{\mu_0}$ et cette relation subsiste pour n'importe quel élément de R, compte tenu encore une fois de ce que E est dense et que h est continu.

Si l'anneau R est dépourvu d'élément unité, on lui adjoindra un tel élément (abstrait) e et l'on considérera l'anneau élargi R^* composé d'éléments $ce+x$, où c est un nombre complexe quelconque et $x\in R$. La norme dans R^* sera définie comme $|c|+\|x\|$. Alors R^* est une algèbre de Banach. Le théorème I donne lieu au théorème que voici:

Théorème II. *Si h est un homomorphisme linéaire de l'algèbre R sur l'algèbre Z des nombres complexes, on a $h(ce+\{a_n\})=c$ pour tout élément de R^*, ou bien $h(ce+\{a_n\})=c+a_\mu$ pour tout élément de R^*, où μ est un nombre naturel fixe qui caractérise l'homomorphisme h.*

2. Nous allons appliquer le théorème II à l'étude des coefficients de Fourier de fonctions appartenant à de certaines classes.

Les fonctions presque périodiques B de Besicovitch. On appelle *fonction de Besicovitch* (*fonction B*) une fonction complexe $f(t)$ d'une variable réelle telle que pour une suite

$$s_k(t)=\sum_{n=1}^{N_k}a_n^{(k)}e^{i\lambda_n^{(k)}t}$$

de sommes trigonométriques ($\lambda_n^{(k)}$ réels, $a_n^{(k)}$ complexes) on a

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T|f(t)-s_k(t)|\,dt=0.$$

L'expression sous le signe $\lim\limits_{k\to\infty}$ sera dite la *distance de Besicovitch* des fonctions f et s_k, et elle sera désigné par $\varrho_B(f,s_k)$. Posons encore

$$M(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

Cette limite existe (finie) pour toute fonction B et s'appelle la *valeur moyenne* de f.

A chaque fonction B on fait correspondre d'une manière univoque (jusqu'à l'ordre des termes) la série de Fourier:

$$f(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{i\lambda_n t}, \tag{2}$$

ce qui veut dire que

$$a(\lambda)=M\big(f(t)e^{-i\lambda t}\big)=\begin{cases}a_n, & \text{si}\quad \lambda=\lambda_n,\\ 0, & \text{si}\quad \lambda\neq\lambda_n\end{cases}\qquad (n=1,2,\ldots).$$

Cette définition n'est pas dépourvue de sens, puisque, d'après un théorème connu, l'on a $a(\lambda)=0$ sauf pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de λ.

Soit Λ un ensemble de nombres réels et soit R l'ensemble de toutes les suites de nombres complexes $a_1, a_2, \ldots$ telles qu'il existe une fonction B satisfaisant à (2) avec $\lambda_n\,\epsilon\,\Lambda$. Nous définissons l'addition et la multiplication d'éléments de R comme l'addition et la multiplication de suites au sens ordinaire.

THÉORÈME III. *Si l'on introduit comme norme de l'élément $\{a_n\}\,\epsilon\,R$ l'expression $M(|f|)$, où la fonction f correspond à la suite $\{a_n\}$ selon* (2), *alors R devient un anneau satisfaisant aux conditions du* § 1.

Démonstration. 1^0 R est un espace linéaire complet; on n'a qu'à faire l'usage du théorème d'après lequel, si la suite $\{f_n\}$ de fonctions B, dont les exposants de Fourier appartiennent à un ensemble Λ, satisfait à la condition de Cauchy selon ϱ_B, elle converge selon ϱ_B vers une fonction B, dont tous les exposants appartiennent également à Λ. Il reste à prouver que 2^0 le produit de deux éléments de R appartient à R et que 3^0 la norme du produit ne surpasse pas le produit des normes des facteurs. Ces propositions forment l'objet des deux lemmes suivants:

LEMME 1. *Si $\{a_n\}\,\epsilon\,R$ et $\{b_n\}\,\epsilon\,R$, alors $\{a_nb_n\}\,\epsilon\,R$.*

LEMME 2. *Si*

$$f(t)\sim\sum_n a_n e^{i\lambda_n t},\qquad g(t)\sim\sum_n b_n e^{i\lambda_n t},\qquad h(t)\sim\sum_n a_nb_n e^{i\lambda_n t},$$

alors

$$M(|h|)\leqslant M(|f|)\cdot M(|g|).$$

Ces lemmes résultent du lemme que voici:

LEMME 3. *Si $f(t)$ et $g(t)$ sont des sommes trigonométriques finies et si*

$$h(t)=\lim_{U\to\infty}\frac{1}{U}\int_0^U f(t-u)g(u)\,du=f\circ g(t),$$

on a

$$M(|h|)\leqslant M(|f|)\cdot M(|g|).$$

Remarque. Il est connu dans la théorie des fonctions presque périodiques que la fonction $h=f\circ g$ existe, ainsi que $|f|\circ|g|$, et que ce sont des fonctions presque périodiques de Bohr.

Démonstration du lemme 3. On a

$$\begin{aligned} M(|h|)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\Big|\lim_{U\to\infty}\frac{1}{U}\int_0^U f(t-u)g(u)\,du\Big|\,dt\\ &\leqslant\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\lim_{U\to\infty}\frac{1}{U}\int_0^U|f(t-u)g(u)|\,du\,dt \\ &=\lim_{T\to\infty}\lim_{U\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{U}\int_0^U|f(t-u)g(u)|\,du\,dt,\end{aligned}\tag{3}$$

la dernière égalité étant une conséquence de ce que, pour tout U et t,

$$\frac{1}{U}\int_0^U|f(t-u)g(u)|\,du\leqslant\sup_t|f(t)|\sup_t|g(t)|.$$

Or, en désignant l'expression sous le signe $\lim\limits_{T\to\infty}\lim\limits_{U\to\infty}$ dans (3) par $P(T,U)$, on a

$$P(T,U)=\frac{1}{U}\int_0^U\Big\{|g(u)|\frac{1}{T}\int_0^T|f(t-u)|\,dt\Big\}\,du$$

et l'on déduit

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ U\to\infty}}P(T,U)=M(|f|)M(|g|),\tag{4}$$

compte tenu de ce que

$$\frac{1}{T}\int_0^T|f(t-u)|\,dt$$

converge avec $T\to\infty$ uniformément par rapport à u vers $M(|f|)$. La thèse du lemme 3 subsiste à cause de (3) et (4).

Démonstration du lemme 1. Soient $f(t)$ et $g(t)$ des fonctions B pour lesquelles

$$f(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{i\lambda_nt},\qquad g(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_ne^{i\lambda_nt},$$

et soient encore

$$\begin{gathered} s_k^{(1)}(t)=\sum_{n=1}^{N_k}a_n\gamma_n^{(k)}e^{i\lambda_nt},\qquad s_k^{(2)}(t)=\sum_{n=1}^{N_k}b_n\gamma_n^{(k)}e^{i\lambda_nt},\\ \lim_k\varrho_B(f,s_k^{(1)})=\lim_k\varrho_B(g,s_k^{(2)})=0,\qquad \lim_k\gamma_n^{(k)}=1\qquad (n=1,2,\ldots).\end{gathered}\tag{5}$$

De telles suites de sommes trigonométriques existent et peuvent être construites moyennant l'algorithme bien connu de Fejér et Bochner. Alors les suites

$$s_k^{(3)}(t)=s_k^{(1)}\circ s_k^{(2)}(t)=\sum_{n=1}^{N_k}a_nb_n(\gamma_n^{(k)})^2e^{i\lambda_nt} \tag{6}$$

satisfont à la condition de Cauchy selon ϱ_B, ce qu'on déduit aisément de l'inégalité

$$\varrho_B(s_k^{(3)},s_l^{(3)})=M\left(|s_k^{(3)}-s_l^{(3)}|\right)\leqslant M\left(|s_k^{(1)}-s_l^{(1)}|\circ|s_k^{(2)}|\right)+M\left(|s_k^{(2)}-s_l^{(2)}|\circ|s_l^{(1)}|\right)$$

et du lemme 3. Compte tenu de ce que l'espace des fonctions B avec la métrique ϱ_B est complet, la suite $s_k^{(3)}$ converge vers une fonction B:

$$\lim_k \varrho_B(h,s_k^{(3)})=0. \tag{7}$$

Les formules (5)-(7) impliquent que

(i) *les coefficients de Fourier de $h(t)$ sont a_nb_n.*

Le lemme 1 est ainsi démontré.

Pour démontrer le lemme 2 on doit attribuer à $s_k^{(1)},s_k^{(2)}$ et $s_k^{(3)}$ la même signification que leur donnent (5) et (6), puis appliquer le lemme 3 à ces fonctions pour $k=1,2,\dots$ et enfin passer à la limite avec $k\to\infty$, en tenant compte de (7), de (i) et de ce que les coefficients de Fourier déterminent bien la norme.

Ainsi la démonstration du théorème II est achevée. L'anneau R est dépourvu d'élément unité, car la suite $1,1,1,\dots$ n'appartient pas à R, vu que

$$\lim_n a_n=0$$

pour toute fonction B. Ainsi nous élargissons R par l'adjonction d'un nouvel élément e et nous obtenons une algèbre R^* de la manière qui fût expliquée dans le § 1. Il est connu[2]) que, $f(z)$ étant une fonction holomorphe dans un domaine G, si pour un élément x d'une algèbre de Banach la condition $h(x)\epsilon G$ est satisfaite par tout homomorphisme h de cette algèbre sur le corps des nombres complexes, il existe un élément y pour lequel on a toujours $h(y)=f(h(x))$. Si l'on prend pour f la fonction $1/z$ (ou bien $\sqrt{z}$, par exemple), on déduit à l'aide des théorèmes II et III, par un calcul banal, la proposition suivante:

(ii) *sous la condition $c\neq 0$ et $c+a_n\neq 0$ $(n=1,2,\dots)$ la suite $\dfrac{a_n}{c+a_n}$ (ou $\sqrt{c+a_n}-\sqrt{c}$) est une suite des coefficients de Fourier d'une fonction B, si a_n en est une.*

[2]) I. Gelfand, *Normierte Ringe*, loc. cit.[1]), p. 3-24.

On peut substituer dans la proposition (ii) au lieu de la classe B beaucoup d'autres classes de fonctions admettant une expansion de Fourier. On n'à qu'à s'assurer chaque fois que

(iii) *par l'introduction d'une norme appropriée l'espace des suites des coefficients de Fourier correspondant aux fonctions de la classe donnée devient un anneau linéaire satisfaisant aux conditions du* § 1.

Voilà plusieurs exemples.

Les fonctions B^p $(p>1)$. Ce sont les limites des suites de sommes trigonométriques $s_k(t)$ selon la norme

$$\varrho_{B^p}(f)=\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T|f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}.$$

On fixera un ensemble d'exposants de Fourier qui seront „permis", c'est-à--dire qu'on n'admettra pas de fonctions ayant d'autres exposants. Si l'on prend $\varrho_{B^p}(f)$ comme norme d'une suite $\{a_n\}$ qui correspond à f, le postulat (iii), donc aussi la proposition (ii) se trouvent satisfaits.

Les fonctions S^p $(p\geqslant 1)$ de Stepanoff. Ce sont les limites des suites de sommes trigonométriques $s_k(t)$ selon la norme

$$\varrho_{S^p}(f)=\left\{\sup_x\int_x^{x+1}|f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}.$$

Cette expression étant prise comme norme de la suite des coefficients de Fourier de f, l'espace des suites correspondant aux fonctions S^p et à un ensemble donné d'exposants satisfait au postulat (iii), vu que l'espace des fonctions S^p est complet par rapport à ϱ_{S^p}.

Les fonctions intégrables L^p dans $(0,2\pi)$. C'est un cas particulier du cas précédent, l'ensemble d'exposants étant celui de tous les nombres entiers.

Les fonctions mesurables L bornées dans $(0,2\pi)$. Ici la propriété d'être un anneau est assurée parce que le produit de composition de deux fonctions bornées est borné lui-même.

Les fonctions presque périodiques sur un groupe abélien G. Un ensemble X de caractères de G étant donné, on considère les fonctions presque périodiques dont les expansions de Fourier ne contiennent pas d'autres caractères. Si $f(t)\sim\sum a_n\chi_n(t)$ $(\chi_n\epsilon X)$, on pose la norme de la suite $\{a_n\}$ égale à $\sup_{t\epsilon G}|f(t)|$. Ces suites satisfont à (iii), vu que la multiplication $\{a_n\}\{b_n\}=\{a_nb_n\}$ correspond ici encore au produit de composition $M_t\left(f(x-t)g(t)\right)$, $M_t\left(f(t)\right)$ étant la valeur moyenne de f, et compte tenu du théorème d'approximation pour les fonctions presque périodiques.

Les fonctions de Bohr. C'est un cas particulier du cas précédent, le groupe G étant celui des nombres réels et les caractères χ étant continus (donc de la forme $e^{i\lambda t}$).

Les fonctions périodiques continues. Comme auparavant, les caractères étant e^{ipnt} (q constant).

Les fonctions périodiques de la classe C_k. On prendra pour norme l'expression $\max\limits_t |f(t)| + \max\limits_t |f'(t)| + \ldots + \max\limits_t |f^{(k)}(t)|$.

Les fonctions périodiques satisfaisant à la condition de Lipschitz-Hölder avec un exposant $a \leqslant 1$. La norme sera de nouveau égale à $\sup\limits_t |f(t)|$. Les propriétés algébriques de l'anneau résultent de ce que

$$\Big|\int_0^1 f(x_2-t)\,g(t)\,dt - \int_0^1 f(x_1-t)\,g(t)\,dt\Big|$$
$$\leqslant \sup_t |g(t)| \int_0^1 |f(x_2-t)-f(x_1-t)|\,dt \leqslant \sup_t |g(t)| \cdot |x_2-x_1|^a.$$

Dans certains cas mentionnés ci-dessus on peut parvenir à la même conclusion, c'est-à-dire à la proposition (ii), par une méthode directe, purement analytique. Par exemple, admettons que a_n et b_n sont les suites des coefficients de Fourier des fonctions intégrables L dans $(0,2\pi)$ f et g respectivement. Soit $c \neq 0$ et $c+a_n \neq 0$ $(n=1,2,\ldots)$. On peut supposer que $|a_n| < |c|$ pour tout n, en négligeant un nombre fini de termes, si cela est nécessaire. Alors on a

$$\frac{b_n}{c+a_n} = \frac{1}{c}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{a_n}{c}\right)^k b_n \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Or, pour un k fixé quelconque et pour n variable, les sommandes à droite constituent la suite des coefficients d'une fonction intégrable h_k (qui est à une constante près le produit de composition de k facteurs égaux à f et d'un facteur égal à g). La convergence de toutes les séries à droite est uniforme par rapport à n. Ainsi, compte tenu de ce que les approximantes de Fejér convergent fortement dans l'espace $L(0,2\pi)$, on peut constater que les sommes de ces séries sont elles-même les coefficients d'une fonction intégrable, à savoir de la limite forte de la suite $\{h_k\}$. Ce résultat est même plus fort que le résultat analogue formulé dans la proposition (ii)[3].

3. Théorème IV. *$\{a_j\}$ étant une suite des coefficients de Fourier d'une fonction $f(t)$ à période 1, on a*

$$\lim_n \sqrt[n]{\int_0^1 |f^n|\,dt} = \max_j |a_j|, \quad \text{où } f^n \text{ désigne } \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}. \tag{8}$$

[3]) Cette méthode me fut suggérée par M. P. Turán.

D'après un théorème de Gelfand[4]) tout élément r d'un anneau normé satisfait à l'égalité $\lim\limits_n \sqrt[n]{\|r^n\|} = \max\limits_h |h(r)|$, où h parcourt tous les homomorphismes de l'anneau sur l'algèbre des nombres complexes. Pour en tirer le théorème IV on n'a qu'à employer le théorème II. Evidemment, on peut obtenir des résultats analogues en appliquant le théorème ci-dessus de Gelfand à d'autres anneaux considérés au § 2. En particulier, son application à l'anneau correspondant aux fonctions L^2 donne la formule classique

$$\lim_n \sqrt[2n]{\sum_j |a_j|^{2n}} = \max_j |a_j|.$$

Nous passons aux transformées de Fourier-Stieltjes. Les fonctions complexes, dont la variation est bornée sur toute la droite et qui sont absolument continues dans tout intervalle fini, constituent un anneau normé S, l'addition y étant définie au sens ordinaire, la multiplication comme

$$f_1 \times f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-s)\,df_2(s),$$

et la norme $\|f\|$ étant égale à $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |df(t)|$[5]). Comme l'a démontré Gelfand[6]), tout homomorphisme de S sur l'algèbre des nombres complexes transforme chaque fonction $f \in S$ en $F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,df(t)$, où le nombre réel λ caractérise l'homomorphisme. Ainsi, le théorème de Gelfand employé dans la démonstration du théorème IV donne lieu à la proposition suivante qui n'est pas nouvelle[7]):

(iv) *En posant $W_n = \|f \times f \times \ldots \times f\|$, on a pour tout $f \in S$*

$$\lim_n \sqrt[n]{W_n} = \max_\lambda |F(\lambda)|.$$

Cette formule devient banale, si la fonction $f(t)$ est réelle et monotone. En effet, on a alors

$$\max_\lambda |F(\lambda)| = |F(0)| = \|f\| \qquad \text{et} \qquad W_n = |F(0)|^n.$$

La première de ces relations est évidente et la seconde résulte 1° de ce que les transformées de Fourier-Stieltjes se multiplient pour le produit

[4]) Loc. cit.[2])
[5]) Loc. cit.[1])
[6]) Loc. cit.[1])
[7]) Mentionnée, par exemple, par A. Beurling et H. Helson, *Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers*, Mathem. Scand. 1 (1953), p. 120-126.

de composition et 2° de ce que le produit de composition de deux fonctions monotones est encore une fonction monotone. On peut donner à (iv) un énoncé modifié, mais équivalent, moyennant le passage aux dérivées, à savoir: En posant

$$\varphi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\,dt,$$

il vient, pour toute fonction $f \epsilon L(-\infty,\infty)$,

$$\lim_{n} \sqrt[n]{W_n^*}=\max_{\lambda} |\varphi(\lambda)|,$$

où

$$W_n^*=\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_n(t)|\,dt, \qquad \Phi_1(t)=f(t),$$

$$\Phi_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)f(s)\,ds, \qquad \Phi_3(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(t-s)f(s)\,ds \qquad \text{etc.}$$

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

(Reçu par la Rédaction le 1. 6. 1953)

Fourier transforms on perfect sets

by

HENRY HELSON [1]) (Yale University)

It is a classical fact that not every continuous periodic function has an absolutely convergent Fourier series. The purpose of this note is to establish a stronger theorem of the same kind. For convenience we shall consider Fourier *integrals* instead of Fourier *series*. Let P be a bounded perfect set on the line, and $f(x)$ a summable function. The Fourier transform of $f(x)$

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{ixy}\,dy$$

is a continuous function, and its restriction to the set P considered as a topological space is continuous on P. Our result states for perfect sets P of a certain type that not every continuous function on P is thus obtained as the restriction of a Fourier transform.

The theory of the Fourier transform has been extended to arbitary locally compact abelian groups [5]. The result above on Fourier series, which can be considered as a theorem about the compact circle group, was stated and proved for arbitrary compact abelian groups by Segal [4]. Interesting generalizations of Segal's work by E. Hewitt and by R. E. Edwards are to appear in the near future. In a different direction, but still on a general type of group, H. Reiter discusses in a forthcoming paper the restrictions of Fourier transforms to a set P composed of denumerably many linearly independent group elements.

The theorem to be proved could be stated in a more general context; since, however, it is new for the line and its main interest is for that case, we shall not indulge in greater generality.

THEOREM. *Let P be a bounded perfect set on the line, such that for every function φ defined and continuous on P, there exists a summable function f with*

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{ixy}\,dy$$

[1]) Jewett Fellow of the Bell Telephone Laboratories.