Sur les méthodes continues de limitation (II)

(Limitation des suites bornées)

par

L. WŁODARSKI (Łódź).

J'emploierai ici les notations et définitions de la partie I[1]). Voici les principaux résultats de ce travail.

Si le domaine d'une méthode continue est un espace complet du type F avec deux normes telles que la convergence suivant la norme entraîne la convergence suivant les coordonnées, ces normes sont équivalentes (théorème XIV). La métrique du domaine d'une méthode plus générale est plus faible (théorème XV).

Dans la suite les méthodes seront toujours supposées continues et permanentes. Toute suite bornée est un point d'accumulation de suites convergentes (théorème XVII). Si, dans la classe des suites convergentes, la métrique du domaine d'une méthode M est plus faible que la métrique du domaine d'une méthode Λ, la méthode M est plus générale que la méthode Λ dans la classe des suites bornées, et compatible avec elle dans cette classe (théorème XVIII). Les suites bornées, limitables par une méthode donnée, forment un espace complet du type B avec une norme de l'espace (m) des suites bornées. Toute autre norme, entraînant la convergence suivant les coordonnées, avec laquelle ces suites forment un espace complet du type F, est équivalente à la norme dans l'espace (m) (théorème XIX). Si une méthode ne limite que des suites bornées, elle limite seulement les suites convergentes (théorème XX). Si une méthode est plus générale dans la classe des suites bornées, elle est compatible dans cette classe (théorème XXII).

Les théorèmes XX, XXI, XXII et le lemme 11 généralisent aux méthodes continues les théorèmes de Mazur et Orlicz [3] sur les méthodes de Toeplitz. Les démonstrations de ces théorèmes sont en partie semblables aux démonstrations de Mazur et Orlicz [4]. Altman [1], le premier a généralisé le théorème XXI à la large classe des méthodes fonctionnelles. Les théorèmet XIV et XV résultent du théorème de Zeller [7].

[1]) Ce volume, p. 33-59.

§ 4.

Remarque 14. Si Λ est une méthode continue, la suite de pseudonormes dans Λ^{**} (lemme 2) induit une métrique équivalente à celle induite par la norme

$$|x|_{\Lambda}^{**}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}\frac{|x|_{\Lambda,m}}{1+|x|_{\Lambda,m}},$$

où

$$|x|_{\Lambda,m}=\sup_n\Big|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(\tau_m)\,\xi_k\Big|.$$

De même, si Λ est une méthode continue, la suite de pseudonormes dans Λ^* (théorème IV) induit une métrique équivalente à celle induite par la norme

$$|x|_{\Lambda}^{*}=|x|_{\Lambda}^{**}+|x|_{\Lambda}=|x|_{\Lambda}^{**}+\sup_{0\leqslant t<T}|\Lambda(t;x)|.$$

Avec des normes ainsi déterminées, les espaces Λ^{**} et Λ^* sont du type F (voir [2], p. 35 et les suivantes).

Définition 13. *La norme $|x|_1$ est dite plus forte que la norme $|x|_2$ dans l'ensemble X si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un $\delta>0$ tel que*

$$|x|_1<\delta \textit{ implique } |x|_2<\varepsilon \textit{ pour tous les } x\in X.$$

La norme $|x|_1$ est dite plus faible que la norme $|x|_2$ dans l'ensemble X si la norme $|x|_2$ est plus forte que la norme $|x|_1$ dans l'ensemble X.

La norme $|x|_1$ est dite équivalente à la norme $|x|_2$ dans l'ensemble X si la norme $|x|_1$ est plus forte et plus faible que la norme $|x|_2$ dans l'ensemble X.

Remarque 15. Pour la méthode de Toeplitz identique I, déterminée par la suite $I(m;x)=\xi_m$, on a

$$|x|_{I,m}=|x|_m=|\xi_m| \quad \text{et} \quad |x|_I=\sup_n|\xi_m|.$$

Vu que la norme $|x|_I$ est plus forte que les pseudonormes restantes, on admet

$$|x|_I^*=|x|_I=\sup_m|\xi_m|.$$

Evidemment le domaine I^* de la méthode identique est l'ensemble des suites convergentes.

Définition 14. *La norme $|x|$, déterminée dans l'ensemble X de suites $x=\{\xi_n\}$, a la propriété* W *si, pour tout $\varepsilon>0$ et tout entier nonnégatif n, il existe un $\delta>0$ tel que*

$$|x|<\delta \quad \textit{implique} \quad |\xi_n|<\varepsilon,$$

c'est-à-dire si la convergence suivant la norme entraîne la convergence suivant les coordonnées.

Lemme 9 (de K. Zeller). *Soient A et B des ensembles de suites $x=\{\xi_n\}$ formant des espaces complets du type F respectivement avec les normes $|x|_A$ et $|x|_B$ ayant la propriété* W *(définition 14). Si l'ensemble A est contenu dans l'ensemble B, la norme $|x|_A$ est plus forte (définition 13) que la norme $|x|_B$ dans l'ensemble A.*

Démonstration. Considérons l'opération $y=U(x)$ identique, déterminée dans l'ensemble A avec la norme $|x|_A$, et examinons l'ensemble des valeurs de l'opération y avec la norme $|x|_B$. Alors

$$\lim_{p\to\infty}|x_p-\bar{x}|_A=0 \quad \text{avec} \quad \lim_{p\to\infty}|x_p-\bar{\bar{x}}|_B=0 \quad \text{implique} \quad \bar{x}=\bar{\bar{x}},$$

car les normes $|x|_A$ et $|x|_B$ ont la propriété W. La thèse du lemme résulte donc du théorème de Banach suivant[2]):

Si l'opération additive $y=U(x)$, dont le domaine est un espace complet du type F et le contredomaine est contenu dans un espace complet du type F, a la propriété que

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0 \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to\infty}U(x_n)=y_0 \quad \text{implique} \quad y_0=U(x_0),$$

l'opération $U(x)$ est continue.

Théorème XIV. *Toute norme, ayant la propriété* W *(définition 14), avec laquelle le domaine Λ^* (définition 2) d'une méthode continue Λ (définition 8) est un espace complet du type F, est équivalente (définition 13) à la norme $|x|_\Lambda^*$ mentionnée dans la remarque 13.*

Toute norme, ayant la propriété W*, avec laquelle le pseudo-domaine Λ^{**} (définition 10) d'une méthode continue Λ est un espace complet du type F, est équivalente à la norme $|x|_\Lambda^{**}$ mentionnée dans la remarque 14.*

Démonstration. La première partie de la thèse résulte du lemme 9 en admettant $A=B=\Lambda^*$, $|x|_A=|x|_\Lambda^*$ et $|x|_B$ égale à la norme satisfaisant aux conditions de l'hypothèse. La démonstration de la deuxième partie de la thèse est analogue.

[2]) [1], théorème 7, p. 41.

Théorème XV. *Soient Λ et M des méthodes continues.*

(a) *Si la méthode M est plus générale (définition 3) que la méthode Λ, c'est-à-dire $\Lambda^*\subset M^*$, la norme $|x|_\Lambda^*$ (remarque 13) est plus forte (définition 13) que la norme $|x|_M^*$.*

(b) *Si $\Lambda^{**}\subset M^{**}$* (définition 10), *la norme $|x|_\Lambda^{**}$ est plus forte que la norme $|x|_M^{**}$.*

Démonstration. La thèse (a) résulte du lemme 9 en admettant $A=\Lambda^*, B=M^*$, $|x|_A=|x|_\Lambda^*$, $|x|_B=|x|_M^*$. La thèse (b) de même.

Remarque 16. De la thèse (a) résulte la remarque 7, car, pour toute méthode permanente, on a $I^*\subset M^*$, où I est une méthode identique (voir remarque 15).

Nous allons examiner ci-dessous quand une suite x_0 est-elle un point d'accumulation de suites convergentes dans le domaine d'une méthode continue et permanente Λ. La méthode Λ est alors parfaite au point x_0 (définition 6), ce qui résulte du théorème VI(a) sans qu'on profite de la forme de la fonctionnelle dans Λ^* (théorème V).

Lemme 10. *Si le pseudo-domaine Λ^{**} d'une méthode continue Λ contient les suites convergentes vers zéro et la suite $x_0=\{\xi_n^0\}$, et si x_p désigne une suite de la forme $(\xi_0^0,\dots,\xi_p^0,\eta_{p-1}^{(p)},\eta_{p-2}^{(p)},\dots)$, où $\eta_k^{(p)}$ sont des nombres arbitraires, conjointement bornés $(p,k=0,1,2,\dots)$, alors x_p tend vers x_0 au sens de la métrique du pseudo-domaine* (voir lemme 2).

Démonstration. Si le pseudo-domaine Λ^{**} contient l'ensemble c_0 (suites convergentes vers zéro), alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n(t)|<\infty \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t<T. \tag{1}$$

Remarquons ensuite que

$$|x_0-x_p|_n=0 \quad \text{pour} \quad p\geqslant n. \tag{2}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}|x_0-x_p|_{\Lambda,m}&=\sup_{k>p}\Big|\sum_{n=p}^{k}\lambda_n(t_m)(\xi_n^0-\eta_n^{(p)})\Big|\\&=\sup_{k>p}\Big|\sum_{n=p}^{k}\lambda_n(t_m)\,\xi_n^0\Big|+\eta\sup_{k>p}\sum_{n=p}^{k}|\lambda_n(t_m)|,\end{aligned}$$

où

$$\eta=\sup_{p,k}|\eta_k^{(p)}|.$$

On voit que

$$\lim_{p\to\infty}\sup_{k>p}\Big|\sum_{n=p}^{k}\lambda_n(t_m)\,\xi_n^0\Big|=0,$$

parce que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(t_m)\,\xi_n^0$$

est convergente. On a aussi

$$\lim_{p\to\infty} \sup_{k>p} \sum_{n=p}^{k} |\lambda_n(t_m)| = 0,$$

parce que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(t_m)|$$

est convergente. Donc

$$\lim_{p\to\infty} |x-x_p|_{A,m} = 0. \tag{3}$$

La thèse du lemme résulte des égalités (2) et (3).

THÉORÈME XVI. *Soient A une méthode continue et permanente, $x_0=\{\xi_n^0\}$ une suite limitable par A. S'il existe des nombres $\{\eta_k^{(p)}\}$ conjointement bornés qui, pour p fixé, forment des suites convergentes, et tels que*

$$\lim_{p\to\infty} |x-x_p|_A = 0,$$

où x_p est une suite déterminée comme au lemme 10, *alors la méthode A est parfaite au point x_0 (définition 6).*

La démonstration résulte des lemmes 10 et 6.

LEMME 11. *Soient A une méthode continue limitant vers zéro les suites convergentes vers zéro, et $x=\{\xi_n\}$ une suite bornée, limitable vers zéro par la méthode A. Pour tout $\varepsilon>0$ et tout nombre naturel n', il existe alors une suite $y=\{\eta_n\}$ et un nombre naturel n'' tels que*

$$|x-y|_A = \sup_{0\leqslant t<T} |A(t;x)-A(t;y)| < \varepsilon, \tag{4}$$

$$\eta_n = \begin{cases} \xi_n & \textit{pour} \quad n<n' \\ \Theta_n\xi_n & \textit{pour} \quad n'\leqslant n<n'', \textit{ où } 0\leqslant\Theta_n\leqslant 1 \\ 0 & \textit{pour} \quad n\geqslant n''. \end{cases} \qquad (n=0,1,\ldots),$$

Démonstration. Nous allons déterminer par induction une suite croissante de nombres $t_k\to T$ $(0\leqslant t_k<T)$ et une suite croissante d'indices $\{n_k\}$. Admettons $n_1=n'$ et t_1 tel que l'inégalité

$$\Big|\sum_{n=n_1}^{\infty} \lambda_n(t)\,\xi_n\Big| < \frac{1}{2}$$

soit satisfaite pour $t>t_1$ (ceci est possible en raison de $A(x)=0$ et de la condition 2° du corollaire 1 du théorème II). Supposons que l'on ait déjà déterminé $n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},t_1,t_2,\ldots,t_{k-1}$; d'après la définition des méthodes continues, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(t)\,\xi_n$$

est uniformément convergente dans l'intervalle $\langle 0;t_{k-1}\rangle$, donc il existe un $n_k>n_{k-1}$ tel que l'inégalité

$$\Big|\sum_{n=n_k}^{\infty} \lambda_n(t)\,\xi_n\Big| < \frac{1}{2^k}$$

soit satisfaite pour $0\leqslant t\leqslant t_{k-1}$. On détermine ensuite un $t_k>t_{k-1}$ tel que l'inégalité

$$\Big|\sum_{n=n_k}^{\infty} \lambda_n(t)\,\xi_n\Big| < \frac{1}{2^k}$$

ait lieu pour $t>t_k$. Ces deux suites déterminées, il est facile de voir que, pour tous les t de l'intervalle $\langle 0;T)$, on a l'inégalité

$$\Big|\frac{1}{p}\sum_{n=n_1}^{\infty} \lambda_n(t)\,\xi_n + \frac{1}{p}\sum_{n=n_2}^{\infty} \lambda_n(t)\,\xi_n + \ldots + \frac{1}{p}\sum_{n=n_p}^{\infty} \lambda_n(t)\,\xi_n\Big| < \frac{1+K\bar{\xi}}{p}, \tag{5}$$

où

$$K = \sup_{0\leqslant t<T} \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(t)|, \qquad \bar{\xi} = \sup_n |\xi_n|.$$

En supposant p suffisamment grand pour que $(1+K\bar{\xi})/p<\varepsilon$, on obtient la thèse du lemme, car le côté gauche de l'inégalité (5) est égal à $|A(t;x)-A(t;y)|$, où y est déterminé comme dans la thèse et

$$n''=n_p, \quad \Theta_n = 1-\frac{k}{p} \quad \text{pour} \quad n_k\leqslant n<n_{k+1}.$$

THÉORÈME XVII. *Soient A une méthode continue et permanente, et $x_0=\{\xi_n^0\}$ une suite bornée limitable vers le nombre ξ par la méthode A. Pour tout $\varepsilon>0$ et tout nombre naturel n', il existe alors une suite $y_0=\{\eta_n^0\}$ et un nombre n'' tels que*

$$|x_0-y_0|_A^* < \varepsilon$$

et

$$\eta_n^0 = \begin{cases} \xi_n^0 & \textit{pour} \quad n<n', \\ \Theta_n\xi_n^0+(1-\Theta_n)\,\xi & \textit{pour} \quad n'\leqslant n<n'' \\ \xi & \textit{pour} \quad n\geqslant n'', \end{cases} \qquad (0\leqslant\Theta_n\leqslant 1),$$

$|x|_A^*$ étant compris comme dans la remarque 14.

Démonstration. Soit

$$\bar{\xi}=\sup_n|\xi_n^0| \quad \text{et} \quad x_1=x_0-\xi e=\{\xi_n-\xi\}.$$

On a alors $A(x_1)=0$. En vertu du lemme 10 il existe un nombre n_0 tel que

$$|x_1-\bar{y}|_A^{**}<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{6}$$

si $\bar{y}$ a les n_0 premières coordonnées égales aux coordonnées correspondantes x_1, et les coordonnées restantes — arbitraires, bornées par le nombre $\bar{\xi}+|\xi|$. En vertu du lemme 11, il existe un nombre nàturel $n''>n_0$ et une suite $y_1=|\eta_n'|$ tels que

$$|x_1-y_1|_A<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \eta_n'=\begin{cases}\xi_n-\xi & \text{pour} \quad n<n_0,\\ \Theta_n(\xi_n-\xi) & \text{pour} \quad n_0\leqslant n<n'' \quad (0\leqslant\Theta_n\leqslant 1),\\ 0 & \text{pour} \quad n\geqslant n''.\end{cases} \tag{7}$$

Des inégalités (6) et (7) résulte l'inégalité

$$|x_1-y_1|_A^{*}<\varepsilon, \tag{8}$$

parce que y_1 est une suite du type $\bar{y}$. Posons $x_1=x_0-\xi e$ dans l'inégalité (8), ensuite $y_0=y_1+\xi e=\{\eta_n'+\xi\}$; on aura alors la thèse du théorème.

Corollaire. *Dans le domaine d'une méthode continue et permanente, toute suite bornée, limitable vers le nombre ξ, est un point d'accumulation de suites convergentes vers le nombre ξ.*

Remarque 17. Une suite non bornée peut être, sans toutefois l'être nécessairement, un point d'accumulation de suites convergentes dans le domaine d'une méthode continue et permanente. Par exemple, la méthode d'Abel est parfaite (théorème XII), donc, en vertu du lemme 6, toute suite limitable par cette méthode est dans son domaine un point d'accumulation de suites convergentes; or, il existe des suites non bornées, limitables par la méthode d'Abel; par exemple la suite

$$x_1=\{(-1)^n(n+1)\}$$

est limitable vers zéro par cette méthode. On voit par contre, d'après l'exemple, dû à S. Mazur, de méthodes A' et M mentionnées à la remarque 10, que la suite $x_2=\{3^n\}$ n'est pas un point d'accumulation de suites convergentes dans le domaine des méthodes A' et M, car, en cas contraire, ces méthodes, étant permanentes et ayant des domaines identiques, en vertu du lemme 6, devraient être compatibles pour x_2, ce qui justement n'a pas lieu.

Remarque 18. Du théorème XVII et du lemme 6 résulte le théorème X sans la nécessité de tirer parti de la forme de la fonctionnelle (théorème V et IX).

Théorème XVIII. *Soient A et M des méthodes continues et permanentes.*

(a) *Si la métrique $|x|_A^{**}$ (remarque 13) est plus forte (définition 13) que la métrique $|x|_M^{**}$ dans le domaine des suites convergentes, alors $A^{**}\subset M^{**}$.*

(b) *Si la métrique $|x|_A^{*}$ est plus forte que la métrique $|x|_M^{*}$ dans le domaine des suites convergentes, toute suite bornée, limitable par la méthode A vers le nombre ξ, est limitable par la méthode M vers le nombre ξ.*

Démonstration. Soit x_0 une suite quelconque appartenant au pseudo-domaine A^{**}. En vertu de la remarque 3 il existe alors des suites convergentes x_k telles que x_k converge vers x_0 au sens de la métrique du pseudo-domaine A^{**}. La suite des éléments $\{x_k\}$ satisfait donc à la condition de Cauchy dans A^{**}, et, en vertu de (a), elle satisfait aussi à la condition de Cauchy dans M^{**}. Comme M^{**} est complet (lemme 2), il s'ensuit que la limite de la suite des éléments $\{x_k\}$ doit appartenir à M^{**}. Cette limite doit être x_0 parce que les normes $|x|_A^{**}$ et $|x|_M^{**}$ ont la propriété W (définition 14). Donc $x_0\in M^{**}$, ce qui prouve la thèse (a).

Supposons maintenant $\bar{x}$ une suite quelconque bornée, appartenant au domaine A^{*} et limitable vers le nombre ξ par la méthode A. La suite $\bar{x}$ appartient aussi au domaine M^{*}, ce qu'on prouve comme ci-dessus, avec la seule différence qu'on tient compte maintenant du théorème XVII au lieu de la remarque 3. Il résulte de ce théorème que tous les x_k sont des suites convergentes vers ξ. Comme la méthode M est permanente, il s'ensuit que $M(x_k)=\xi$ $(k=1,2,\ldots)$. $M(x)$ est une fonctionnelle continue dans M^{*} (théorème VI (a)), x_k converge vers $\bar{x}$ dans M^{*}, donc $M(\bar{x})=\xi$, ce qui prouve la thèse (b).

Corollaire. *Si les normes des domaines de deux méthodes continues et permanentes sont équivalentes (définition 13) dans le domaine des suites convergentes, toute suite bornée, limitable par l'une quelconque de ces méthodes est limitable par l'autre vers le même nombre.*

Définition 15. *A_0^{*} désigne l'ensemble des suites bornées, limitables par la méthode A.*

Théorème XIX. *L'ensemble A_0^{*} d'une méthode continue et permanente est un espace complet du type B avec la norme*

$$|x|^{*}=\sup_n|\xi_n|.$$

Toute autre norme, ayant la propriété W (définition 14), avec laquelle l'ensemble A_0^{*} forme un espace complet du type F, est équivalente à la norme $|x|^{*}$.

Démonstration. Considérons une suite $\{x_p\}$ telle que $x_p \epsilon \Lambda_0^*$. Supposons que cette suite satisfasse à la condition de Cauchy avec la norme $|x|^*$. Comme $|x|^*$ est une norme dans l'espace (m) des suites bornées, la limite x_0 de la suite $\{x_k\}$ existe et doit être aussi une suite bornée. Il s'ensuit, de la permanence de la méthode et en vertu de la remarque 7, que la suite $\{x_k\}$ satisfait à la condition de Cauchy dans Λ^* aussi, donc $x_0 \epsilon \Lambda^*$ et, d'après ce qui précède, $x_0 \epsilon \Lambda_0^*$.

La deuxième partie du théorème sur l'équivalence des normes résulte du lemme 9 en admettant $A = B = \Lambda_0^*$, $|x|_A = |x|^*$, et $|x|_B$ égale à la norme satisfaisant aux conditions de l'hypothèse.

THÉORÈME XX. *Si une méthode continue et permanente Λ ne limite que des suites bornées, elle limite seulement les suites convergentes.*

Démonstration. Pour une telle méthode on a $\Lambda^* = \Lambda_0^*$ (définition 15). En vertu des théorèmes IV et XIX la norme $|x|_\Lambda^*$ de cette méthode doit être équivalente à la norme

$$|x|^* = \sup_n |\xi_n|,$$

donc à la norme de la méthode identique I (voir remarque 15). Du corollaire du théorème XVIII résulte la thèse.

COROLLAIRE. *Si une méthode continue et permanente limite une suite divergente, elle limite une suite non bornée.*

Dans la suite nous allons démontrer un théorème pour les méthodes continues et permanentes d'après lequel une méthode plus générale dans le domaine des suites bornées est compatible dans ce domaine. Du théorème XIX résulte que l'on ne peut faire usage des méthodes de démonstration employées jusqu'ici; l'ensemble Λ_0^* n'est un espace complet du type F qu'avec la norme

$$|x|^* = \sup_n |\xi_n|;$$

avec cette norme les suites convergentes forment un ensemble fermé, donc, toute suite bornée et divergente ne peut être avec cette norme un point d'accumulation de suites convergentes.

Pour la méthode fonctionnelle Λ conservant la convergence (c'est-à-dire limitant les suites convergentes) sont déterminés les nombres

$$\Lambda(e) = \lim_{t\to T-} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(t), \qquad \Lambda(e_n) = \lim_{t\to T-} \lambda_n(t) \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

où e est une suite composée seulement d'unités, e_n une suite ayant la n-ième coordonnée égale à 1, et les coordonnées restantes nulles. Le terme

$$\text{(a)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\Lambda(e_n)|$$

est aussi déterminé pour les méthodes conservant la convergence, en vertu du corollaire 2 du théorème II.

DÉFINITION 16. *On appelle*

$$\Delta(\Lambda) = \Lambda(e) - \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda(e_n)$$

discriminant $\Delta(\Lambda)$ de la méthode fonctionnelle Λ conservant la convergence.

LEMME 11. *Si une méthode fonctionnelle Λ limite toutes les suites bornées, son discriminant est nul.*

Démonstration. Si $\Delta(\Lambda) \neq 0$, la méthode M, déterminée par

$$\text{(a)} \qquad \mu_n(t) = \frac{\lambda_n(t) - \Lambda(e_n)}{\Delta(\Lambda)} \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

devrait être permanente, car elle satisfairait aux conditions du corollaire du théorème III. D'autre part, d'après (a), la méthode M ainsi que la méthode Λ limiterait toutes les suites bornées. En vertu de la remarque de Steinhaus [3], on a contradiction.

THÉORÈME XXI. *Soient Λ et M des méthodes continues limitant vers zéro les suites convergentes vers zéro. Si toute suite bornée, limitable vers zéro par la méthode Λ, est limitable par la méthode M, elle est limitable vers zéro par la méthode M.*

Démonstration. Soit $x_0 = \{\xi_n^0\}$ une suite bornée, limitable vers zéro par la méthode Λ. Déterminons par induction une suite d'éléments $x_k \epsilon \Lambda^*$. En vertu du théorème XVII il existe une suite

$$x_1 = \{\Theta_1 \xi_1^0, \ldots, \Theta_{n_1} \xi_{n_1}^0, 0, 0, \ldots\}$$

telle que $|x_0 - x_1|_\Lambda^* < 1/2$, et une suite

$$x_2 = \{\xi_1^0, \ldots, \xi_{n_1}^0, \Theta_{n_1+1} \xi_{n_1+1}^0, \ldots, \Theta_{n_2} \xi_{n_2}^0, 0, 0, \ldots\}$$

telle que $|x_0 - x_2|_\Lambda^* < 1/4$. Après avoir déterminé $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ et par la même les nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$, déterminons l'élément x_k de manière que $|x_0 - x_k|_\Lambda^* < 1/2^k$. Considérons la série

$$\text{(9)} \qquad a_0 x_1 + a_1(x_2 - x_1) + a_2(x_3 - x_2) + \ldots,$$

où $a = \{a_n\}$ est une suite bornée. D'après l'inégalité $|x_0 - x_k|_\Lambda^* < 1/2^k$

$(k=1,2,\ldots)$, la série satisfait à la condition de Cauchy dans l'espace Λ^* et converge vers l'élément

$$(10)\qquad x_a=\{[a_0\Theta_1+a_1(1-\Theta_1)]\,\xi_1^0,\ldots,[a_0\Theta_{n_1}+a_1(1-\Theta_{n_1})]\,\xi_{n_1}^0,\\ [a_1\Theta_{n_1+1}+a_2(1-\Theta_{n_1+1})]\,\xi_{n_1+1}^0,\ldots\}$$

qui appartient aussi à Λ^*, car Λ^* est complet. En vertu de (9), on a

$$(11)\qquad \Lambda(x_a)=a_0\Lambda(x_1)+a_1\Lambda(x_2-x_1)+a_2\Lambda(x_3-x_2)+\ldots,$$

parce que $\Lambda(x)$ est une fonctionnelle continue dans Λ^* (théorème VI (a)) De la permanence de la méthode Λ résulte que $\Lambda(x_1)=\Lambda(x_2-x_1)=\ldots=0$, donc, en vertu de (11), on a aussi $\Lambda(x_a)=0$. D'autre part, en vertu de (10), on voit que x_a est une suite bornée; x_a est donc une suite bornée, limitable par la méthode Λ vers zéro, d'où, d'après l'hypothèse du théorème, x_a est aussi limitable par la méthode M. Du lemme 9 il résulte que la série (9) converge vers x_a dans M^{**} aussi. En vertu du lemme 3, $M(t,x)$ est, pour tout t, une fonctionnelle continue dans M^{**}, donc

$$(12)\qquad M(t;x_a)=a_0M(t;x_1)+a_1M(t;x_2-x_1)+a_2M(t;x_3-x_2)+\ldots$$

Puisque $x_a\epsilon M^*$,

$$\lim_{t\to T-}M(t;x_a)$$

existe pour toute suite $a=\{a_n\}$ bornée. La méthode Ω déterminée par

$$(13)\qquad \omega_0(t)=M(t;x_1);\qquad \omega_n(t)=M(t;x_{n+1}-x_n)\qquad (n=1,2,\ldots),$$

limite toute suite bornée $a=\{a_n\}$. Donc, en vertu du lemme 11, son discriminant $\Delta(\Omega)=0$. D'autre part, il résulte de la permanence de la méthode M que

$$\Omega(e_n)=\lim_{t\to T-}\omega_n(t)=0\qquad (n=1,2,\ldots),$$

parce que x_k sont des suites convergentes vers zéro. On a donc

$$0=\Delta(\Omega)=\Omega(e)=\lim_{t\to T-}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n(t)=\lim_{t\to T-}M(t;x_0)=M(x_0),$$

c. q. f. d.

THÉORÈME XXII. *Soient Λ et M des méthodes continues et permanentes. Si toute suite bornée, limitable par la méthode Λ est limitable par la méthode M, elle est limitable par la méthode M vers le même nombre que par la méthode Λ.*

Démonstration. Soit $x=\{\xi_n\}$ une suite bornée, limitable par la méthode Λ vers le nombre ξ. La suite $x_1=x-\xi e$ est alors limitable vers zéro par la méthode Λ, donc, en vertu du théorème précédent, $M(x-\xi e)=0$, d'où $M(x)=\xi$, c. q. f. d.

De ce théorème résulte de manière évidente le théorème X [6].

Bibliographie

[1] M. Альтман, *Обобщение одной теоремы Мазура-Орлича из теории суммирования*, Studia Mathematica 13 (1953), p. 233-243.

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[3] S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les méthodes linéaires de sommation*, Comptes Rendus 196 (1933), p. 32-34.

[4] S. Mazur et Orlicz, *On linear methods of summability*, Studia Mathematica 14 (1954), p. 1-32.

[5] H. Steinhaus, *Kilka słów o uogólnieniu pojęcia granicy*, Prace matematyczno-fizyczne 22 (1911), p. 121-134.

[6] L. Włodarski, *Sur les méthodes continues de limitation (I)*, Studia Mathematica, ce volume.

[7] K. Zeller, *Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren*, Math. Zeitschrift 53 (1950), p. 463-487.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHEMATIQUE DE L'ACADEMIE POLONAISE DES SCIENCES

(Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1953)