Proof. The condition (D) is necessary because

$$Z^{-1}[z(x,u)]+Z^{-1}[z(y,v)]=Z^{-1}[z(x,v)]+Z^{-1}[z(y,u)].$$

On the other hand, if (D) holds then

$$\begin{vmatrix} z_1(x,u) & 0 & z_2(x,u) & 0 \\ z_1(x,v) & 0 & 0 & z_2(x,v) \\ 0 & z_1(y,u) & z_2(y,u) & 0 \\ 0 & z_1(y,v) & 0 & z_2(y,v) \end{vmatrix}=0,$$

and taking $u=y$ this becomes

$$z_1(x,y)\,z_2(x,v)\,z_2(y,y)\,z_1(y,v)=z_2(x,y)\,z_1(x,v)\,z_1(y,y)\,z_2(y,v).$$

If v is constant, we arrive at (12) with

$$X'(x)=\frac{z_1(x,v)}{z_2(x,v)},\qquad Y'(y)=\frac{z_1(y,v)}{z_2(y,v)}\cdot\frac{z_2(y,y)}{z_1(y,y)}.$$

Thus really

$$z(x,y)=Z[X(x)+Y(y)],\qquad \text{q. e. d.}$$

(Reçu par la Rédaction le 15. 5. 1953)

Sur certains corollaires du théorème de Titchmarsh

par

W. WOLIBNER (Wrocław)

Désignons respectivement par $f(x)$ et $g(x)$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, deux fonctions complexes, intégrables avec leurs carrés,

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

$$g(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)\qquad (b_0=d_0=0),$$

où les séries

$$(1)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2,\quad \sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^2,\quad \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2,\quad \sum_{n=0}^{\infty}|d_n|^2$$

sont convergentes.

Les coefficients de Fourier A_n et B_n de la fonction

$$h(x)=\int_0^x f(y)g(x-y)\,dy$$

sont alors

$$A_0=\pi a_0c_0+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_0d_m+c_0b_m}{m}-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_md_m+b_mc_m}{m},$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} A_n=\frac{\pi}{2}(a_nc_n-b_nd_n)-\frac{c_nb_n+a_nd_n}{4n}+\sum_{n\neq m=0}^{\infty}\frac{m(a_md_m+c_mb_m)}{n^2-m^2}\\ +\sum_{n\neq m=0}^{\infty}\frac{n(a_md_n+c_mb_n)+m(a_nd_m+c_nb_m)}{m^2-n^2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n=\frac{\pi}{2}(a_nd_n+c_nb_n)+\frac{a_nc_n+3b_nd_n}{4n}-\frac{2a_0c_0}{n}\\ +\sum_{n\neq m=1}^{\infty}\frac{n(a_mc_m-b_md_m)}{m^2-n^2}+\sum_{n\neq m=0}^{\infty}\frac{m(b_nd_m-b_md_n)-n(a_nc_m-a_mc_n)}{m^2-n^2}\end{aligned}$$

pour $n>0$.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait presque partout

$$h(x)=0, \qquad 0\leqslant x\leqslant 2\pi,$$

est que les équations

$$(3) \qquad A_n=0, \qquad B_n=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

soient vérifiées.

D'après (2), ces équations sont linéaires par rapport à a_n et b_n si l'on suppose c_n et d_n des constantes données.

En développant la partie impaire de $f(x)$ en une série de cosinus dans l'intervalle $0\leqslant x\leqslant\pi$, on trouve facilement que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait presque partout

$$f(x)=0, \qquad 0\leqslant x\leqslant\pi,$$

est que l'on ait

$$(4) \qquad \begin{aligned} a_0 &= -\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_{2k+1}}{2k+1}, \\ a_{2m} &= -\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)b_{2k+1}}{(2k+1)^2-4m^2}, \\ a_{2m+1} &= -\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\,b_{2k}}{4k^2-(2m+1)^2}. \end{aligned}$$

Le théorème de Titchmarsh[1]) est équivalent au théorème suivant:

Si les fonctions complexes $f(x), g(x), 0\leqslant x\leqslant\lambda$, sont intégrables L et

$$\int_0^x f(y)g(x-y)\,dy=0, \qquad 0\leqslant x\leqslant\lambda,$$

l'une au moins des fonctions $f(x)$, $g(x)$ est presque partout nulle pour $0\leqslant x\leqslant\lambda/2$ [2]).

Le théorème de Titchmarsh peut donc prendre la forme suivante:

Si les constantes b_n, c_n, d_n satisfont à la condition (1), *et les constantes c_n, d_n ne satisfont pas à* (4) *(où l'on remplacera a_n par c_n et b_n par d_n), le système* (3) *d'équations linéaires sur un nombre infini d'inconnues a_n ne peut avoir que la solution* (4), *lorsqu'on exige que les a_n vérifient la condition* (1).

Si $g(x)\neq 0$ dans un voisinage de zéro, le théorème de Titchmarsh devient banal. On peut en obtenir, pareillement que ci-dessus, le théorème suivant:

[1]) E. C. Titchmarsh, *Fourier Integral II*, 1948, p. 324, th. 151.

[2]) J. G.-Mikusiński, *A new proof of Titchmarsh's theorem on convolution*, Studia Mathematica 13 (1953), p. 56-58.

Si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|c_n|+|d_n|)$$

est convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\neq 0,$$

le système (3) *d'équations linéaires sur un nombre infini d'inconnues a_n, b_n n'a aucune solution non nulle, lorsqu'on suppose que les a_n, b_n vérifient la condition* (1).

Il semble qu'à l'heure actuelle on ne peut démontrer directement aucun de ces théorèmes, même le second.

Si l'on suppose $b_n=d_n=0$ (les fonctions $f(x), g(x)$ sont paires), le système d'équations (3) prend la forme simple

$$(5) \qquad \begin{aligned} a_nc_n &= 0 \qquad (n=0,1,2,\ldots), \\ \sum_{n\neq m=0}^{\infty}\frac{a_nc_m+c_na_m}{m^2-n^2} &= 0 \qquad (n=1,2,\ldots), \end{aligned}$$

et les formules (4) prennent la forme

$$a_n=0, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Désignons par $p_k, k=1,2,\ldots$, les valeurs n pour lesquelles $a_n\neq 0$, et par q_k les valeurs n telles que $c_n\neq 0$. Le système d'équations (5) se réduit donc à la condition que les suites p_k, q_k soient disjointes et au système d'équations

$$\sum_k\frac{a_{p_k}}{p_k^2-q_l^2}=0 \qquad (l=1,2,\ldots),$$

$$\sum_l\frac{c_{q_l}}{q_l^2-p_k^2}=0 \qquad (k=1,2,\ldots).$$

On en tire le théorème:

Il n'existe pas deux suites partielles p_k, q_k de la suite $0,1,2,\ldots$, disjointes, non vides toutes les deux, pour lesquelles les systèmes d'équations

$$\sum_k\frac{x_k}{p_k^2-q_l^2}=0 \qquad (l=1,2,\ldots),$$

$$\sum_l\frac{y_l}{q_l^2-p_k^2}=0 \qquad (k=1,2,\ldots),$$

aient des solutions non nulles telles que les séries

$$\sum_{k}^{\infty} |x_k|^2, \qquad \sum_{l}^{\infty} |y_l|^2$$

soient convergentes.

Au cas où les deux suites p_k, q_k sont infinies, le théorème prend une forme purement arithmétique, grâce au théorème de E. Schmidt:

Si p_k et q_k désignent deux suites partielles de la suite $0, 1, 2, \ldots$, disjointes et infinies, on aura soit

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{r1} & a_{1i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1r} & \ldots & a_{rr} & a_{ri} \\ a_{1j} & \ldots & a_{rj} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{r1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1r} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}} = \delta_i^j,$$

soit

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\begin{vmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{r1} & \alpha_{i1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{1r} & \ldots & \beta_{rr} & \alpha_{ir} \\ \alpha_{j1} & \ldots & \alpha_{jr} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{r1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{1r} & \ldots & \beta_{rr} \end{vmatrix}} = \delta_i^j,$$

ou bien

$$a_{kl} = \frac{1}{p_k^2 - q_l^2}, \qquad \alpha_{ij} = \sum_{s=1}^{\infty} a_{is} a_{js}, \qquad \beta_{ij} = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{st} \alpha_{sj}.$$

(Reçu par la Rédaction le 15. 12. 1952)

The limiting distributions of sums of arbitrary independent and equally distributed *r*-point random variables

by

M. FISZ (Warszawa) *.

1. Let us consider a sequence X_n $(n=1,2,\ldots)$ of random variables, where X_n is for each value of n a sum of n independent and equally distributed r-point $(r \geqslant 2)$ random variables Y_{nk} $(k=1,2,\ldots,n)$. Let A_n and $B_n \neq 0$ be sequences of real constants and let the sequence $F_n(z)$ of distribution functions of the random variables

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_{nk}}{B_n} - A_n \tag{1.1}$$

converge with $n \to \infty$ to a distribution function $F(z)$. We can ask what limiting distribution functions are possible. The answer to this question is given in § 2, namely by theorems 2.1-2.3 which are proved in § 4. Some notions and theorems used in the proofs of the theorems given in this paper are quoted in § 3. In theorems 5.1 and 5.2, given in § 5, certain specified sequences A_n and B_n are considered, and sufficient conditions for the convergence of the sequence $F_n(z)$ to a given distribution function $F(z)$ are found. Finally the question of extending the results of § 2 to the case when the random variables Y_{nk} can, with positive probability, take infinitely many values is discussed in § 6.

2. THEOREM 2.1. *Let X_n $(n=1,2,\ldots)$ be defined by the formula*

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_{nk}, \tag{2.1}$$

where the random variables Y_{nk} $(k=1,2,\ldots,n)$ are, for each n, independent and equally distributed according to the distribution law

$$P(Y_{nk} = a_{nl}) = p_{nl} \qquad (l=1,2,\ldots,r), \tag{2.2}$$

* The author expresses his thanks to H. Steinhaus and C. Ryll-Nardzewski for their valuable remarks.