Contents of Volume 139, Number 1

Y. Y. Hu et M. Mellouk, Régularité Besov–Orlicz du temps local Brownien . . . 1–7
C.-P. Chen and D.-C. Luor, Two-parameter Hardy–Littlewood inequality and its variants . . . 9–27
W. V. Li and W. Linde, Metric entropy of convex hulls in Hilbert spaces . . . 29–45
K.-G. Grosse-Erdmann, Hypercyclic and chaotic weighted shifts . . . 47–68
X. X. Tao, The L^p solvability of the Dirichlet problems for parabolic equations . . . 69–80
J. J. Koliha, Elements of C^*-algebras commuting with their Moore–Penrose inverse . . . 81–90
R. Drnovšek, L. Livshits, G. W. MacDonald, B. Mathes, H. Radjavi and P. Šemrl, On operator bands . . . 91–100

STUDIA MATHEMATICA

Executive Editors: **Z. Ciesielski, A. Pełczyński, W. Żelazko**

The journal publishes original papers in English, French, German and Russian, mainly in functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and probability theory. Usually 3 issues constitute a volume.

Detailed information for authors is given on the inside back cover. Manuscripts and correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA
Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-6293997
E-mail: studia@impan.gov.pl

Subscription information (2000): Vols. 138–143 (18 issues); $33.50 per issue.

Correspondence concerning subscription, exchange and back numbers should be addressed to

Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Publications Department
Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, fax 48-22-6293997
E-mail: publ@impan.gov.pl

Published by the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Typeset using TEX at the Institute
Printed and bound by

drukarnia herman & herman

PRINTED IN POLAND

ISSN 0039-3223

Régularité Besov–Orlicz du temps local Brownien

par

YUEYUN HU et MOHAMED MELLOUK (Paris)

Abstract. Let $(B_t,\ t\in[0,1])$ be a linear Brownian motion starting from 0 and denote by $(L_t(x),\ t\ge 0,\ x\in\mathbb{R})$ its local time. We prove that the spatial trajectories of the Brownian local time have the same Besov–Orlicz regularity as the Brownian motion itself (i.e. for all $t>0$, a.s. the function $x\mapsto L_t(x)$ belongs to the Besov–Orlicz space $B^{1/2}_{M_2,\infty}$ with $M_2(x)=e^{|x|^2}-1$). Our result is optimal.

1. Introduction, notations et définitions. Pour la théorie de base des espaces de Besov–Orlicz nous renvoyons à [6]. Cependant nous présentons un bref aperçu sur ces espaces.

Espaces Besov–Orlicz. Une fonction $M:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ est appelée $\mathcal{N}$*-fonction* si elle est nulle en 0, paire et convexe. Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. L'*espace d'Orlicz* $L^*_M(I)$ associé à la $\mathcal{N}$-fonction M est l'espace des fonctions $f:I\to\mathbb{R}$ mesurables telles que

$$\|f\|_M:=\inf_{\lambda>0}\frac{1}{\lambda}\Big[1+\int_I M(\lambda f(t))\,dt\Big]<\infty.$$

Le module de continuité de f en norme d'Orlicz est

$$\omega_M^{(I)}(f;\delta)=\sup\{\|\Delta_h f\|_M : 0<h<\delta\},\qquad \delta\le 1,$$

où $\Delta_h f(x)=I_h(x)[f(x+h)-f(x)]$ avec I_h fonction indicatrice de $I\cap(I-h)$. Soit $\omega_\alpha(t)=|t|^\alpha$ pour $t\in I$, $\alpha\in\,]0,1[$. L'*espace de Besov–Orlicz* $B^\alpha_{M,\infty}(I)$ est l'espace des fonctions f de $L^*_M(I)$ telles que

$$\|f\|_{\alpha,M,\infty}=\|f\|_M+\sup_{0<t<|I|}\omega_M^{(I)}(f;t)/\omega_\alpha(t)<\infty,$$

où $|I|>0$ désigne la mesure de Lebesgue de l'intervalle I. C'est un espace de Banach non séparable qui possède un sous-espace fermé séparable $B^{\alpha,0}_{M,\infty}(I)$ constitué de fonctions vérifiant en plus $\omega_M^{(I)}(f;t)=o(\omega_\alpha(t))$ lorsque $t\to 0^+$.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 41A15, 60J55, 60J65.

L'espace $L^p(I)$, $1 \le p < \infty$, est l'espace de Lebesgue classique muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(I)} = \Big(\int_I |f(t)|^p\,dt\Big)^{1/p}.$$

REMARQUE 1.1. Lorsque $M(x) = |x|^p/p$, $p \ge 1$, l'espace $\mathcal{B}^\alpha_{M,\infty}(I)$ coïncide avec l'espace de Besov standard $\mathcal{B}^\alpha_{p,\infty}(I)$ muni de la norme

$$\|f\|_{\alpha,p,\infty} = \|f\|_{L^p(I)} + \sup_{0<t<|I|} \omega_p^{(I)}(f;t)/\omega_\alpha(t),$$

avec $\omega_p^{(I)}(f;t) = \sup\{\|\Delta_h f\|_{L^p(I)} : 0 < h < t\}$, dont le sous-espace séparable correspondant est noté $\mathcal{B}^{\alpha,0}_{p,\infty}(I)$. Lorsque $p = \infty$, l'espace $\mathcal{B}^\alpha_{\infty,\infty}(I)$ est equivalent à l'espace $\mathcal{C}_\alpha(I)$ des fonctions Höldériennes d'ordre α sur I. Voir [11] ou [8] pour plus de details sur les espaces de Besov.

Espaces de Besov–Orlicz associés à des $\mathcal{N}$-fonctions exponentielles. Considérons les $\mathcal{N}$-fonctions $(M_\beta)_{0<\beta<\infty}$ définies par

$$M_\beta(x) = \begin{cases} e^{|x|^\beta} - 1 & \text{si } 1 \le \beta < \infty,\\ E_\beta(x) - E_\beta(0) & \text{si } 0 < \beta < 1,\end{cases}$$

où $E_\beta(-x) = E_\beta(x)$ est l'extension de la partie convexe de e^{x^β} sur (x_β, ∞) par sa tangente en $x_\beta > 0$ (e^{x^β} change de concavité au point x_β; $E_\beta(x) \ge \exp(x^\beta)$ pour tout x). Le théorème 3.4 de Ciesielski [5] nous donne une caractérisation de la norme $\|\cdot\|_{M_\beta}$ en terme de normes L^p, c'est-à-dire que pour tout β, $0 < \beta < \infty$, il existe une constante $0 < C_\beta < \infty$ telle que pour tout $f \in L^*_{M_\beta}(I)$ on a

$$\frac{1}{C_\beta}\sup_{p\ge1}\frac{\|f\|_{L^p(I)}}{p^{1/\beta}} \le \|f\|_{M_\beta} \le C_\beta \sup_{p\ge1}\frac{\|f\|_{L^p(I)}}{p^{1/\beta}}.$$

Il s'ensuit l'équivalence des normes suivantes :

$$\|f\|_{\alpha,M_\beta,\infty} \sim |f|_{\alpha,M_\beta} := \sup_{p\ge1}\frac{\|f\|_{L^p(I)}}{p^{1/\beta}} + \sup_{0<t<|I|}\sup_{p\ge1}\frac{\omega_p^{(I)}(f;t)}{\omega_\alpha(t)p^{1/\beta}}, \tag{1}$$

où $\omega_p^{(I)}(f;t)$ est défini dans la remarque 1.1.

Le mouvement Brownien, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, est un processus stochastique gaussien $(B_t,\ t \ge 0)$, à trajectoires continues, caractérisé par sa covariance et sa moyenne

$$\operatorname{cov}(B_s, B_t) = \min(s,t) \quad \text{et} \quad E(B_t) = 0 \quad \text{pour } s,t \ge 0.$$

Les espaces de Besov–Orlicz associés à ces $\mathcal{N}$-fonctions sont isomorphes à des espaces de suites réelles, ce qui permet de lire de manière simple les propriétés trajectorielles de certains processus gaussiens sur la covariance de la suite de variables aléatoires gaussiennes; ainsi Ciesielski a montré dans [5] :

THÉORÈME A (Ciesielski). *Pour le mouvement Brownien $(B_t,\ t \in [0,1])$ on a*

$$P(B_\cdot \in \mathcal{B}^{1/2}_{M_2,\infty}([0,1])) = 1 \quad \textit{et} \quad P(B_\cdot \in \mathcal{B}^{1/2,0}_{M_2,\infty}([0,1])) = 0.$$

Pour $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$, si l'on cherche à mesurer le nombre de visites du mouvement Brownien en x, il ne sert à rien de considérer le temps passé en x puisque $\int_0^t \mathbf{1}_{(B_s = x)}\,ds = 0$, presque sûrement, $\mathbf{1}$ étant la fonction indicatrice. La bonne approche sera d'étudier la densité de temps d'occupation en x, définie par la limite suivante :

$$\text{presque sûrement} \quad L_t(x) = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \mathbf{1}_{(x-\varepsilon\le B_s\le x+\varepsilon)}\,ds, \qquad t > 0.$$

Pour l'existence et les propriétés de cette limite nous renvoyons à Revuz–Yor [10]. La variable $L_t(x)$ est appelée *temps local* au niveau x, à l'instant t du mouvement Brownien B. On note $(L_t(x), t \ge 0,\ x \in \mathbb{R})$ une version presque sûrement continue du temps local (voir Trotter [12] pour son existence).

La section suivante montre que la trajectoire spatiale du temps local Brownien admet la même régularité que le Brownien lui même, c'est-à-dire qu'elle appartient presque sûrement à l'espace de Besov–Orlicz $\mathcal{B}^{1/2}_{M_2,\infty}$ (espace modelé sur l'espace d'Orlicz associé à la $\mathcal{N}$-fonction $M_2(x) = e^{|x|^2} - 1$ pour le module de continuité $\omega(t) = \sqrt{t}$, voir [6]; c'est un espace de Banach contenu dans l'ensemble des fonctions Höldériennes d'ordre $\alpha < 1/2$, s'injectant dans une classe d'espace de Besov $\mathcal{B}^\alpha_{p,q}$, $\alpha < 1/2$, voir [11]), ce qui généralise à la fois le résultat de Boufoussi–Roynette dans [4], à savoir que cette trajectoire appartient presque sûrement à l'espace de Besov $\mathcal{B}^{1/2}_{p,\infty}$, et celui de Boufoussi [3] qui étend ceci à l'espace de Besov–Orlicz $\mathcal{B}^{1/2}_{M_1,\infty}$ avec $M_1(x) = e^{|x|} - 1$.

REMARQUE 1.2. Notons les injections continues suivantes :

$$\mathcal{C}_{1/2} \hookrightarrow \mathcal{B}^{1/2}_{M_2,\infty} \hookrightarrow \mathcal{B}^{1/2}_{M_1,\infty} \hookrightarrow \mathcal{B}^{1/2}_{p,\infty},$$

qui montrent que notre résultat améliore clairement celui de Boufoussi [3] et par suite celui de Boufoussi–Roynette [4].

2. Régularité Besov–Orlicz en la variable espace du temps local Brownien. Soit $(B_t, t \ge 0)$ un mouvement Brownien réel défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, issu de 0, et $(\mathcal{F}_t)$ la filtration canonique de B ($\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par $(B_u,\ 0 \le u \le t)$); soit $(L_t(x),\ t \ge 0,\ x \in \mathbb{R})$ une version presque sûrement continue de son temps local.

THÉORÈME 2.1. *Pour tout $t > 0$, la trajectoire $x \mapsto L_t(x)$ appartient presque sûrement à l'espace de Besov–Orlicz $\mathcal{B}^{1/2}_{M_2,\infty}(I)$ pour chaque intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$.*

Preuve. Soit $T_{1/2}$ un temps exponentiel, de paramètre $1/2$ et indépendant du mouvement Brownien B. La propriété de scaling pour le temps local permet d'écrire

$$(L_{T_{1/2}}(x), x \in \mathbb{R}) \stackrel{\text{(loi)}}{=} (\sqrt{T_{1/2}} L_1(x/\sqrt{T_{1/2}}),\ x \in \mathbb{R}).$$

Pour prouver le théorème 2.1 il suffit de montrer que $x \mapsto L_{T_{1/2}}(x)$ appartient presque sûrement à $\mathcal{B}^{1/2}_{M_2,\infty}(I)$ pour chaque intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$. Pour ce faire, il suffit de travailler avec un intervalle I de la forme $I = [-b, c]$ avec $b, c > 0$. Rappelons le théorème de D. R. Ray [9] pour le processus $(L_{T_{1/2}}(x),\ x \in \mathbb{R})$, dont la version qui suit est due à Biane–Yor [1].

Théorème B (Biane–Yor). (i) *Les variables $L_{T_{1/2}}(0)$ et $B_{T_{1/2}}$ sont indépendantes, et ont pour distribution respectivement $P(L_{T_{1/2}}(0) \in ds) = e^{-s}ds$ et $P(B_{T_{1/2}} \in dx) = \frac{1}{2}e^{-|x|}dx$, $s > 0$, $x \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Conditionnellement à $L_{T_{1/2}}(0) = s$ et $B_{T_{1/2}} = a > 0$, le processus $(L_{T_{1/2}}(x),\ x \in \mathbb{R})$ est un processus de Markov inhomogène de générateur $2xd^2/dx^2 - 2(x - \mathbf{1}_{(0 \le x \le a)})d/dx$.*

Nous allons utiliser ce théorème pour établir que

$$P(x \mapsto L_{T_{1/2}}(x) \in \mathcal{B}^{1/2}_{M_2,\infty}(I) \mid L_{T_{1/2}}(0) = s,\ B_{T_{1/2}} = a) = 1$$

pour tous $s > 0$, $a \in \mathbb{R}$, ce qui implique $P(x \mapsto L_{T_{1/2}}(x) \in \mathcal{B}^{1/2}_{M_2,\infty}(I)) = 1$, et par conséquent le théorème 2.1.

Sans perte de généralité on suppose que $a > 0$. Le résultat de Biane–Yor montre que la loi conditionnelle de $(L_{T_{1/2}}(t),\ t \in \mathbb{R})$ sachant $(L_{T_{1/2}}(0) = s$, $B_{T_{1/2}} = a)$ est exactement celle de $(X_t, t \in \mathbb{R})$, l'unique solution (positive) de l'équation différentielle stochastique (avec la convention $\int_0^t := -\int_t^0$ si $t \le 0$)

$$X_t = s + 2\int_0^t \sqrt{X_u}\, dY_u - 2\int_0^t (X_u - \mathbf{1}_{(0 \le X_u \le a,\ u > 0)})\, du, \qquad t \in \mathbb{R},$$

où $(Y_u,\ u \in \mathbb{R})$ est un mouvement Brownien réel issu de 0, défini sur $\mathbb{R}$ tout entier, c'est-à-dire $(Y_u,\ u \ge 0)$ et $(Y_{-u},\ u \ge 0)$ sont deux mouvements Browniens réels indépendants issus de 0. Remarquons que le processus $(X_t,\ t \ge 0)$ (resp. $(X_{-t},\ t \ge 0)$) est adapté à la filtration naturelle de $(Y_t,\ t \ge 0)$ (resp. $(Y_{-t},\ t \ge 0)$. Ainsi tout le problème consiste à montrer que

$$P(t \mapsto X_t \in \mathcal{B}^{1/2}_{M_2,\infty}(I)) = 1.$$

Rappelons que $I = [-b, c]$, et comme $\sup_{s \in [-b,c]} X_s < \infty$ presque sûrement (X_t étant positive et continue), la partie drift $\int_0^t$ est Lipschitzienne, donc a fortiori appartient à $\mathcal{B}^{1/2}_{M_2,\infty}(I)$; quant à la partie intégrale stochastique, i.e. $\int_0^t \sqrt{X_s}\, dY_s$, pour $-b \le t \le c$, son appartenance à l'espace $\mathcal{B}^{1/2}_{M_2,\infty}([-b, c])$ est

une conséquence immédiate du résultat suivant dont Boufoussi [2] a montré une version différente pour les espaces des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Proposition. *Soit $(H_t,\ t \ge 0)$ (resp. $(H_{-t},\ t \ge 0)$) un processus réel progressivement mesurable par rapport à la filtration naturelle de $(Y_t,\ t \ge 0)$ (resp. $(Y_{-t},\ t \ge 0)$) tel que pour tout $T > 0$, $\sup_{-T \le t \le T} |H_t| < \infty$, presque sûrement, où $(Y_u,\ u \in \mathbb{R})$ est un mouvement Brownien réel issu de 0, défini sur $\mathbb{R}$ tout entier. Alors la trajectoire $s \mapsto \int_0^s H_u\, dY_u$ appartient presque sûrement à $\mathcal{B}^{1/2}_{M_2,\infty}(I)$ pour chaque intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$.*

Preuve. L'idée de la preuve se base sur le changement du temps (voir aussi [2]) et sur le lemme suivant :

Lemme 2.2. *Soit $\alpha \in]0, 1[$, $0 < \beta < \infty$ et $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement croissante telle que pour chaque $T > 0$, $0 < \inf_{-T \le x \le T} \sigma'(x) \le \sup_{-T \le x \le T} \sigma'(x) < \infty$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{B}^{\alpha}_{M_\beta,\infty}(I)$ pour chaque intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$, alors la fonction $f \circ \sigma$ vérifie la même régularité.*

Preuve. La présente preuve est issue d'une suggestion du referee. D'après l'équivalence (1), il suffit de travailler avec la norme $|f|_{\alpha, M_\beta}$, définie dans (1), et établir l'existence d'une constante C_σ ne dépendant pas de $1 \le p < \infty$ telle que pour $J = \sigma^{-1}(I)$ et pour tout $f \in L^p(I)$,

$$\frac{1}{C_\sigma}\|f\|_{L^p(I)} \le \|f \circ \sigma\|_{L^p(J)} \le C_\sigma \|f\|_{L^p(I)} \tag{2}$$

et pour $0 < t \le t_0$ (t_0 indépendant de p),

$$\frac{1}{C_\sigma}\omega_p^{(I)}(f; t) \le \omega_p^{(J)}(f \circ \sigma; t) \le C_\sigma \omega_p^{(I)}(f; t). \tag{3}$$

Les deux inégalités de (2) sont immédiates en utilisant le changement de variable $\sigma(t) = s$. Pour montrer (3), nous allons utiliser l'équivalence entre $\omega_p^{(I)}(f; t)$ et la K-fonctionnelle $K(f, t, L^p(I), W_p^1(I))$ définie par

$$K(f, t, L^p(I), W_p^1(I)) = \inf_{g \in W_p^1(I)} \{\|f - g\|_{L^p(I)} + t\|g\|_{W_p^1(I)}\}, \qquad t \ge 0,$$

où $W_p^1(I)$ est l'espace de Sobolev d'ordre 1 correspondant à l'exposant p (espace de fonctions définies sur I absolument continues dont la dérivée est dans L^p), muni de la norme

$$\|g\|_{W_p^k(I)} = \|g\|_{L^p(I)} + \|g'\|_{L^p(I)}.$$

On se refère à R. A. DeVore et G. G. Lorentz [7] (Chap. 6) pour les K-fonctionnelles.

Le théorème de Johnen (voir [7], Theorem 2.4, p. 177), montre l'existence de $C_1 > 0$ et de $t_0 > 0$ ne dépendant pas de p telles que pour tout $0 < t \le t_0$,

$$\frac{\omega_p^{(I)}(f;t)}{C_1} \le K(f,t,L^p(I),W_p^1(I)) \le C_1\omega_p^{(I)}(f;t).$$

Ainsi, pour prouver (3), il suffit d'établir l'existence d'une constante $C_\sigma > 0$ ne dépendant que de σ telle que

$$(4)\qquad \frac{K(f,t,L^p(I),W_p^1(I))}{C_\sigma} \le K(f\circ\sigma,t,L^p(J),W_p^1(J)) \le C_\sigma K(f,t,L^p(I),W_p^1(I)).$$

Or, $h \in W_p^1(J)$ équivaut à $\widetilde{h} := h\circ\sigma^{-1} \in W_p^1(I)$, sous l'hypothèse sur σ, et par suite

$$\begin{aligned}K(f\circ\sigma,t,L^p(J),W_p^1(J)) &= \inf_{h\in W_p^1(J)}\{\|f\circ\sigma-h\|_{L^p(J)}+t\|h'\|_{L^p(J)}\}\\ &= \inf_{\widetilde{h}\in W_p^1(I)}\{\|(f-\widetilde{h})\circ\sigma\|_{L^p(J)}+t\|(\widetilde{h}'\circ\sigma)\cdot\sigma'\|_{L^p(J)}\}\\ &\le \max\{1,\|\sigma'\|_{L^\infty(I)}\}\|1/\sigma'\|_{L^\infty(I)}K(f,t,L^p(I),W_p^1(I)).\end{aligned}$$

On obtient l'inégalité à droite de (4); quant à l'inégalité à gauche, elle s'obtient de façon similaire en remplaçant le maximum par l'infimum. Ceci achève alors la démonstration du lemme 2.2.

Reprenons maintenant les notations du théorème ci-dessus. Par un argument de localisation, on peut supposer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\sup_{-\infty<t<\infty}|H_t| \le C$. Ensuite remarquons que par la représentation de Dubins–Schwarz (voir Revuz–Yor [10], p. 173), on a

$$\int_0^t H_s\,dB_s + (C+1)B_t = \beta_{\sigma(t)}, \qquad t\in\mathbb{R},$$

avec un mouvement Brownien réel $(\beta_u,\ u\in\mathbb{R})$ issu de 0 défini sur $\mathbb{R}$ tout entier, et $\sigma(t) = \int_0^t (H(s)+(C+1))^2\,ds,\ t\in\mathbb{R}$ (avec la convention $\int_0^t = -\int_t^0$ si $t<0$). Alors le résultat cherché découle du lemme 2.2, en notant que le mouvement Brownien $(\beta_u,\ u\in\mathbb{R})$ défini sur $\mathbb{R}$ tout entier appartient presque sûrement à $\mathcal{B}^{1/2}_{M_2,\infty}(I)$ pour chaque intervalle compact $I\subset\mathbb{R}$. En fait, prenons sans perte de généralité $I=[-b,c]$ avec $b,c>0$; l'appartenance de $(\beta_s,\ -b\le s\le c)$ à $\mathcal{B}^{1/2}_{M_2,\infty}([-b,c])$ est une conséquence directe du théorème A et de la remarque que $t\in[0,1]\mapsto(\beta_{-b+(b+c)t}-\beta_{-b})/\sqrt{b+c}$ est un mouvement brownien défini sur $[0,1]$.

REMARQUE 2.3. Boufoussi–Roynette [4] ont montré que pour tout $p>2$ et $a>0$, $P(L_1(\cdot)\in\mathcal{B}^{1/2,0}_{p,\infty}([0,a]))=0$. Comme $\mathcal{B}^{1/2,0}_{M_2,\infty}([0,a])\subset\mathcal{B}^{1/2,0}_{p,\infty}([0,a])$, on a

$$P(L_1(\cdot)\in\mathcal{B}^{1/2,0}_{M_2,\infty}([0,a]))=0.$$

Notre résultat est donc optimal.

Remerciements. Nous tenons à remercier le referee anonyme pour ses nombreux commentaires et suggestions pour la rédaction de ce papier, et ses diverses remarques judicieuses dont la démonstration du lemme 2.2 provient.

References

[1] P. Biane et M. Yor, *Sur la loi des temps locaux Browniens pris en un temps exponentiel*, dans : Séminaire de Probabilités XXII, Lecture Notes in Math. 1321, Springer, 1988, 454–466.

[2] B. Boufoussi, *Espaces de Besov: Caractérisations et applications*, Thèse de l'Université Henri-Poincaré Nancy-I, 1994.

[3] —, *Régularité du temps local Brownien dans les espaces de Besov–Orlicz*, Studia Math. 118 (1996), 145–156.

[4] B. Boufoussi et B. Roynette, *Le temps local Brownien appartient presque sûrement à l'espace de Besov* $\mathcal{B}^{1/2}_{p,\infty}$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 316 (1993), 843–848.

[5] Z. Ciesielski, *Orlicz spaces, spline systems, and Brownian motion*, Constr. Approx. 9 (1993), 191–222.

[6] Z. Ciesielski, G. Kerkyacharian et B. Roynette, *Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens*, Studia Math. 107 (1993), 171–204.

[7] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer, 1993.

[8] J. Peetre, *New Thoughts on Besov spaces*, Duke Univ. Math. Ser. I, 1976.

[9] D. Ray, *Sojourn times of diffusion processes*, Illinois J. Math. 7 (1963), 615–630.

[10] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 2nd ed., Springer, 1994.

[11] B. Roynette, *Mouvement Brownien et espaces Besov*, Stochast. Stochast. Rep. 43 (1993), 221–260.

[12] H. Trotter, *A property of Brownian motion paths*, Illinois J. Math. 2 (1958), 425–433.

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires
UMR 7599, Case 188
Université Pierre et Marie Curie
4, Place Jussieu
F-75252 Paris Cedex 05, France
E-mail: hu@ccr.jussieu.fr
mellouk@proba.jussieu.fr

Received March 25, 1997 (3862)
Revised version September 29, 1997 and March 13, 1998