STUDIA MATHEMATICA 136 (3) (1999)

Les opérateurs semi-Fredholm sur des espaces de Hilbert non séparables

par

HAÏKEL SKHIRI (Lille)

Abstract. The aim of this paper is to study the α-semi-Fredholm operators in a nonseparable Hilbert space H for all cardinals α with $\aleph_0 \le \alpha \le \dim H$.

In the first part, we find the relation between $\gamma_\alpha(T)$ and $c(\pi_\alpha(T))$ for all $\aleph_0$-regular cardinals α, where γ_α is the reduced minimum modulus of weight α, c is the reduced minimum modulus (in a C^*-algebra) and π_α is the canonical surjection from $B(H)$ onto $C_\alpha(H) = B(H)/K_\alpha(H)$. We study the continuity points of the maps $c_\alpha : T \mapsto c(\pi_\alpha(T))$ and $\gamma_\alpha : T \mapsto \gamma_\alpha(T)$.

In the second part, we prove some approximation results for semi-Fredholm operators. We show that all connected components of semi-Fredholm operators of at most countable index have the same topological boundary. We show that this is not true for indices strictly greater than $\aleph_0$.

1. Préliminaires. Soit H un espace de Hilbert complexe non nécessairement séparable de dimension infinie et $B(H)$ l'algèbre des opérateurs bornés de H dans lui-même.

Pour $T \in B(H)$, notons T^*, $N(T)$ et $R(T)$ respectivement l'adjoint, le noyau et l'image de T.

Soit $\Theta = \{\alpha \text{ un cardinal} : \aleph_0 \le \alpha \le \dim H\}$ avec $\aleph_0 = \mathrm{card}(\mathbb{N})$. Il est bien connu que Θ est un ensemble totalement ordonné et pour $\alpha, \beta \in \Theta$, on a $\alpha + \beta = \alpha\beta = \sup\{\alpha, \beta\}$ (voir [7, Corollaire 4, page 73]). Par $-\Theta$, nous désignons l'ensemble $\{-\beta : \beta \in \Theta\}$. Tout au long de ce travail, α est supposé un élément de Θ.

Notons $J_\alpha(H) = \{T \in B(H) : \dim \overline{R(T)} < \alpha\}$. D'après [23, Théorème 6.1], $J_\alpha(H)$ est un idéal bilatère autoadjoint de $B(H)$. En général $J_\alpha(H)$ n'est pas un fermé de $B(H)$, il est donc naturel de considérer $K_\alpha(H) = \overline{J_\alpha(H)}$, la fermeture de $J_\alpha(H)$ dans $B(H)$. Alors, $K_\alpha(H)$ est un idéal bilatère autoadjoint de $B(H)$ (cf. [8, 11, 23]) et c'est un idéal propre de $B(H)$ tout simplement parce que $I \notin J_\alpha(H)$. En plus d'après [23, Corollaire 6.1 et Théorème 6.4], tout idéal bilatère fermé propre de $B(H)$ est de la forme

1991 *Mathematics Subject Classification*: 47A53, 47A55, 47A58.

$K_\alpha(H)$ pour un certain α de Θ. Puisque $K_\alpha(H) \subseteq K_\beta(H)$ pour $\alpha \le \beta$, il s'ensuit que $K_{\dim H}(H)$ est l'idéal bilatère fermé maximal de $B(H)$. Enfin, on remarque que $J_{\aleph_0}(H)$ n'est autre que $J(H)$, l'idéal des opérateurs de rang finis, et $K_{\aleph_0}(H)$ celui des opérateurs compacts $K(H)$.

Nous notons $C_\alpha(H)$ l'algèbre quotient $B(H)/K_\alpha(H)$ et $\pi_\alpha : B(H) \to C_\alpha(H)$ la surjection canonique. Alors, il est bien connu que $C_\alpha(H)$ muni de l'involution $*$, $\pi_\alpha(T)^* = \pi_\alpha(T^*)$, est une C^*-algèbre. Remarquons que $C_{\aleph_0}(H) = C(H) = B(H)/K(H)$ n'est autre que l'algèbre de Calkin. Pour alléger la notation on note, pour tout opérateur T de $B(H)$, $\|T\|_\alpha$ au lieu de $\|\pi_\alpha(T)\|$ la norme de $\pi_\alpha(T)$ dans $C_\alpha(H)$.

Nous posons

$$\sigma_\alpha(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \pi_\alpha(T - \lambda I) \text{ n'est pas inversible dans } C_\alpha(H)\},$$

le *spectre de poids* α de T. Alors, on voit facilement que pour tout $K \in K_\alpha(H)$,

$$\sigma_\alpha(T + K) = \sigma_\alpha(T)$$

et pour α, β tels que $\aleph_0 \le \alpha \le \beta \le \dim H$,

$$\sigma_\beta(T) \subseteq \sigma_\alpha(T) \subseteq \sigma_{\aleph_0}(T) = \sigma_e(T) \subseteq \sigma(T)$$

où $\sigma_e(T)$ désigne le spectre essentiel de T.

Rappelons que la *conorme* de T, notée $\gamma(T)$, est définie par

$$\gamma(T) = \inf\{\|T(x)\| : x \in N(T)^\perp \text{ et } \|x\| = 1\} \quad (\gamma(T) = +\infty \text{ si } T = 0).$$

Alors (cf. [1, 14, 21]) $\gamma(T) = \gamma(T^*)$; $\gamma(T) > 0$ si et seulement si $R(T)$ est fermé, et $\gamma(T) = \inf\{\sigma(|T|) \setminus \{0\}\}$ où $|T| = (T^*T)^{1/2}$.

Dans [11], G. Edgar, D. Ernest et S. G. Lee ont défini la notion d'un sous-espace α-fermé : un sous-espace X de H est dit $\underline{\alpha\text{-fermé}}$ si il existe un sous-espace fermé M de H tel que $M \subseteq X$ et $\dim \overline{X \cap M^\perp} < \alpha$. Il est clair que, si X est un sous-espace α-fermé, alors X est aussi un sous-espace β-fermé pour tout $\beta \in \Theta$ tel que $\beta \ge \alpha$. Dans [11, Lemme 2.3], on montre qu'un sous-espace X est $\aleph_0$-fermé si et seulement si X est un sous-espace fermé de H.

Soient $T \in B(H)$ et M un sous-espace de H. On considère la quantité $\varrho(M,T)$ définie par

$$\varrho(M,T) = \begin{cases} \inf\{\|T(x)\| : x \in M \text{ et } \|x\| = 1\} & \text{si } M \ne \{0\}, \\ +\infty & \text{si } M = \{0\}. \end{cases}$$

Alors, on remarque d'une part que $\varrho(M,T) \le \|T\|$ si $M \ne \{0\}$, et $\varrho(M,T) = \infty$ si et seulement si $M = \{0\}$, et d'autre part que la conorme $\gamma(T)$ est égale à $\varrho(N(T)^\perp, T)$.

Pour un opérateur T de $B(H)$, la *conorme de poids* α (the reduced minimum modulus of weight α), notée $\gamma_\alpha(T)$, est définie par

$$\gamma_\alpha(T) = \sup\{\varrho(X,T) : X \text{ est un sous-espace fermé de } N(T)^\perp \text{ et } \dim(X^\perp \cap N(T)^\perp) < \alpha\}.$$

Alors, on remarque que pour tout T de $B(H)$,

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{aligned} \gamma_\alpha(T) &\le \|T\| \quad \text{si } \alpha \le \dim \overline{R(T)}, \\ \gamma_\alpha(T) &= +\infty \quad \text{si } \alpha > \dim \overline{R(T)}. \end{aligned}$$

Cette conorme de poids α a été étudiée par L. Burlando [8]. Elle a montré notamment que comme pour la conorme, la conorme de poids α vérifie

$$\text{(1.2)} \qquad \gamma_\alpha(T) = \gamma_\alpha(T^*).$$

D'autre part, elle a prouvé que cette conorme de poids α caractérise exactement les opérateurs à image α-fermée; de manière plus précise,

$$\text{(1.3)} \qquad \gamma_\alpha(T) > 0 \quad \text{si et seulement si} \quad R(T) \text{ est } \alpha\text{-fermé}.$$

On peut encore remarquer que pour $\alpha, \beta \in \Theta$ tels que $\alpha \le \beta$,

$$\text{(1.4)} \qquad \gamma(T) \le \gamma_\alpha(T) \le \gamma_\beta(T).$$

Notons, pour $T \in B(H)$, $m_\alpha(T) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_\alpha(|T|)\}$ (voir [8, Définition 3.5]). On observe que pour tout K de $K_\alpha(H)$, $m_\alpha(T) = m_\alpha(T + K)$, et que $m_{\aleph_0}(T) = m_e(T)$, le module minimal essentiel de T (voir [2, 13] pour plus de détails sur les propriétés de $m_e(T)$).

Pour $T \in B(H)$, on définit $\operatorname{ind}(T)$, l'indice de T, de la façon suivante :

$$\operatorname{ind}(T) = \begin{cases} \dim N(T) - \dim N(T^*) & \text{si } \dim N(T) < \aleph_0 \text{ et } \dim N(T^*) < \aleph_0, \\ \dim N(T) & \text{si } \dim N(T) > \dim N(T^*) \text{ et } \\ & \dim N(T) \ge \aleph_0, \\ -\dim N(T^*) & \text{si } \dim N(T^*) > \dim N(T) \text{ et } \\ & \dim N(T^*) \ge \aleph_0, \\ 0 & \text{si } \dim N(T) = \dim N(T^*) \ge \aleph_0. \end{cases}$$

Nous notons $\operatorname{ind}_\alpha$ la fonction de $B(H)$ à valeurs dans $(-\Theta) \cup \mathbb{Z} \cup \Theta$ qui à $T \in B(H)$ associe

$$\operatorname{ind}_\alpha(T) = \begin{cases} \operatorname{ind}(T) & \text{si } \begin{cases} \alpha > \aleph_0 \text{ et } \max\{\dim N(T), \dim N(T^*)\} \ge \alpha, \text{ ou} \\ \alpha = \aleph_0, \end{cases} \\ 0 & \text{si } \alpha > \aleph_0 \text{ et } \max\{\dim N(T), \dim N(T^*)\} < \alpha. \end{cases}$$

D'après [9, Théorème 1], l'application $\operatorname{ind}_\alpha$ est constante sur chaque composante connexe de $\Phi_\pm^\alpha$ où

$$\Phi_\pm^\alpha = \{T \in B(H) : R(T) \text{ est } \alpha\text{-fermé et } \min\{\dim N(T), \dim N(T^*)\} < \alpha\},$$

l'ensemble des opérateurs *α-semi-Fredholm*. On montre également que $\Phi_\pm^\alpha = \{T \in B(H) : \pi_\alpha(T) \text{ est semi-inversible dans } C_\alpha(H)\}$ (cf. [11, Théorème

2.6]). Remarquons aussi que $\Phi_{\pm}^{\aleph_0}$ n'est autre que l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm.

Notons

$$\Phi_+^\alpha = \{T \in B(H) : R(T) \text{ est } \alpha\text{-fermé et } \dim N(T) < \alpha\}$$
$$= \{T \in B(H) : \pi_\alpha(T) \text{ est semi-inversible à gauche dans } C_\alpha(H)\},$$

l'ensemble des opérateurs *α-semi-Fredholm à gauche*. On remarque que $\Phi_+^{\aleph_0}$ n'est autre que l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm à gauche.

Les opérateurs α-semi-Fredholm à gauche sont ceux qui vérifient $m_\alpha(T) > 0$; de manière plus précise, L. Burlando (cf. [8, page 236]) a montré que $T \in \Phi_+^\alpha$ si et seulement si $m_\alpha(T) > 0$.

Pour simplifier les notations on note F (resp. F_+) à la place de $\Phi_\pm^{\aleph_0}$ (resp. $\Phi_+^{\aleph_0}$) l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm (resp. semi-Fredholm à gauche).

2. Les opérateurs points de continuité pour la conorme de poids α. Dans toute la suite on va utiliser les notations suivantes : pour $L \in B(H)$, on note $E_L(\cdot)$ (resp. $E_L^*(\cdot)$) la mesure spectrale de $|L| = (L^*L)^{1/2}$ (resp. $|L^*| = (LL^*)^{1/2}$).

Pour alléger les notations, on pose $E_T(\cdot) = E(\cdot)$ et $E_T^*(\cdot) = E^*(\cdot)$ sans ambiguïté pour la suite. $\mathcal{B}(T,r) = \{L \in B(H) : \|T - L\| < r\}$ désigne la boule ouverte de centre T et de rayon r.

R. Harte et M. Mbekhta (cf. [18, 24]) ont défini la *conorme* d'un élément $\pi_\alpha(T)$ de la C^*-algèbre $C_\alpha(H)$ de la façon suivante :

$$c(\pi_\alpha(T)) = \inf\{\sigma_\alpha(|T|) \setminus \{0\}\} \quad (\text{avec } c(0) = +\infty). \tag{2.1}$$

Pour γ un cardinal on pose $\Theta_\gamma = \{\beta \text{ cardinal} : 0 \le \beta < \gamma\}$ et

$$\Lambda_0 = \{\gamma : 0 \le \gamma \le \dim H \text{ et } \gamma = \sup(A) \text{ pour un } A \subseteq \Theta_\gamma \text{ avec } \operatorname{card}(A) = \aleph_0\}.$$

B. Gramsch [15] a introduit la notion de $\aleph_0$-irrégularité des cardinaux infinis. Un cardinal est dit *$\aleph_0$-irrégulier* s'il est la somme dénombrable des cardinaux qui lui sont tous strictement inférieurs. Un cardinal *$\aleph_0$-régulier* est un cardinal qui n'est pas $\aleph_0$-irrégulier. On remarque que l'ensemble $\{\alpha \ge \aleph_0 : \alpha \notin \Lambda_0\}$ coïncide avec l'ensemble des cardinaux $\aleph_0$-réguliers et que $\aleph_0 \in \Lambda_0$. On peut encore remarquer que si α admet un prédécesseur alors α est $\aleph_0$-régulier. On rappelle aussi que si $\alpha \notin \Lambda_0$, alors $K_\alpha(H) = J_\alpha(H)$ (cf. [11, Lemme 5.8]). Seulement dans ce paragraphe, on suppose en plus que $\alpha = \aleph_0$ ou bien $\alpha \notin \Lambda_0$.

Dans ce paragraphe nous étudierons la relation entre la conorme de poids α de T et la conorme de $\pi_\alpha(T)$. Pour cela, nous prouverons d'abord dans le théorème qui suit que la conorme de poids α de T s'exprime d'une manière très simple à l'aide du spectre de poids α de $|T|$.

THÉORÈME 2.1. *Soit $T \in B(H)$ et supposons que $T \notin K_\alpha(H)$.*

(i) *Si $\alpha \notin \Lambda_0$, alors*

$$\gamma_\alpha(T) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_\alpha(|T|) \setminus \{0\}\}.$$

(ii) *Si $R(T)$ est un fermé, alors*

$$\gamma_{\aleph_0}(T) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_e(|T|) \setminus \{0\}\}.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que $\delta = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_\alpha(|T|) \setminus \{0\}\}$ existe car $T \notin K_\alpha(H)$.

(i) Supposons que $\delta > \gamma_\alpha(T)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma_\alpha(T) + \varepsilon < \delta$. Par définition de δ, on a

$$]0, \gamma_\alpha(T) + \varepsilon] \cap \sigma_\alpha(|T|) = \emptyset. \tag{1}$$

On va montrer que

$$\dim E(]0, \gamma_\alpha(T) + \varepsilon[)H < \alpha. \tag{2}$$

D'abord, d'après (1) et [8, Lemme 3.6], on constate que pour tout $\lambda \in]0, \gamma_\alpha(T) + \varepsilon[$ il existe ε_λ tel que

$$]\lambda - \varepsilon_\lambda, \lambda + \varepsilon_\lambda[\subseteq]0, \gamma_\alpha(T) + \varepsilon[\quad \text{et} \quad \dim E(]\lambda - \varepsilon_\lambda, \lambda + \varepsilon_\lambda[)H < \alpha.$$

Ainsi, il existe deux suites $(\lambda_n)_{n>0}$ et $(\varepsilon_n)_{n>0}$ telles que $\varepsilon_n > 0$, $\lambda_n \in]0, \gamma_\alpha(T) + \varepsilon[$, $]0, \gamma_\alpha(T) + \varepsilon[= \bigcup_{n>0}]\lambda_n - \varepsilon_n, \lambda_n + \varepsilon_n[$ et $\dim E(]\lambda_n - \varepsilon_n, \lambda_n + \varepsilon_n[)H < \alpha$. Il en résulte que $\dim E(]0, \gamma_\alpha(T) + \varepsilon[)H < \alpha\aleph_0 = \alpha$ (voir [7, Corollaire 4, page 73]). Ceci prouve (2).

Maintenant, si on utilise [8, Théorème 3.1], on constate que $\gamma_\alpha(T) + \varepsilon \le \gamma_\alpha(T)$, ce qui est absurde. Par conséquent, $\delta \le \gamma_\alpha(T)$.

Montrons l'inégalité inverse. On peut supposer que $\gamma_\alpha(T) > 0$, car sinon l'inégalité est évidente. Soit $0 < \lambda < \gamma_\alpha(T)$. Alors d'après [8, Théorème 3.1], il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\dim E(]0, \lambda + \varepsilon[)H < \alpha$. D'autre part, en utilisant [8, Lemme 3.6], on conclut que

$$]0, \lambda[\cap \sigma_\alpha(|T|) = \emptyset.$$

Donc $\delta \ge \lambda$ et par conséquent $\delta \ge \gamma_\alpha(T)$.

(ii) D'après [11, Lemme 2.3], on sait que $R(T)$ est fermé si et seulement si $R(T)$ est $\aleph_0$-fermé. D'où, d'après la relation (1.3), on constate que $\gamma_{\aleph_0}(T) > 0$. Supposons que $\delta > \gamma_{\aleph_0}(T)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma_{\aleph_0}(T) + \varepsilon < \delta$. Alors d'après la définition de δ, on a

$$]0, \gamma_{\aleph_0}(T) + \varepsilon] \cap \sigma_{\aleph_0}(|T|) = \emptyset. \tag{3}$$

On va montrer que

$$\dim E(]0, \gamma_{\aleph_0}(T) + \varepsilon[)H < \aleph_0. \tag{4}$$

Comme $R(T)$ est un fermé, d'après [10, Proposition 4.5, page 359], on conclut que 0 est un point isolé de $\sigma(|T|)$. D'où il existe $a \in]0, \gamma_{\aleph_0}(T)+\varepsilon[$ tel que $]0,a] \cap \sigma(|T|) = \emptyset$. Or, $\sigma_{\aleph_0}(|T|) = \sigma_e(|T|)$, d'où par (3) on obtient $[a, \gamma_{\aleph_0}(T)+\varepsilon] \cap \sigma_e(|T|) = \emptyset$. Donc, par [10, Proposition 4.6, page 359], on conclut que chaque $\lambda \in [a, \gamma_{\aleph_0}(T)+\varepsilon] \cap \sigma(|T|)$ est un point isolé de $\sigma(|T|)$ et que λ est de multiplicité finie. Par conséquent, $[a, \gamma_{\aleph_0}(T)+\varepsilon] \cap \sigma(|T|) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $\dim E(\{\lambda_i\}) = \dim N(T-\lambda_i I) = m_i < \aleph_0$ pour tout $i = 1, \ldots, k$. Donc

$$\dim E(]0, \gamma_{\aleph_0}(T)+\varepsilon[)H \le \sum_{i=1}^{k} \dim E(\{\lambda_i\}) = \sum_{i=1}^{k} m_i < \aleph_0.$$

Maintenant, en utilisant [8, Théorème 3.1], on conclut que $\gamma_{\aleph_0}(T)+\varepsilon \le \gamma_{\aleph_0}(T)$, ce qui est absurde. Par conséquent, $\delta \le \gamma_{\aleph_0}(T)$. Enfin, comme en (i) on montre l'inégalité inverse, c'est-à-dire que $\delta \ge \gamma_{\aleph_0}(T)$. Ceci achève la preuve du Théorème 2.1. ∎

Remarquons qu'au cours de la démonstration du Théorème 2.1, on a prouvé le résultat suivant.

COROLLAIRE 2.2. *Soit* $T \in B(H)$. *Alors* $\gamma_\beta(T) \le \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_\beta(|T|) \setminus \{0\}\} = c(\pi_\beta(T))$ *pour tout* $\beta \in \Theta$.

Si T est un opérateur de $B(H)$ tel que $R(T)$ n'est pas un sous-espace fermé, on peut avoir $\gamma_{\aleph_0}(T) \ne c(\pi_{\aleph_0}(T)) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_e(|T|) \setminus \{0\}\}$. En effet, dans l'exemple qui suit on va construire un opérateur $T \in B(H)$ tel que $\gamma_{\aleph_0}(T) = 0$ mais $c(\pi_{\aleph_0}(T)) = 1/2$.

EXEMPLE. Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie et soit $(e_j)_{j\in J}$ une base orthonormale de H. Fixons un sous-ensemble J_1 de J tel que $\mathrm{card}(J_1) = \aleph_0$ et $\mathrm{card}(J \setminus J_1) = \dim H$, et considérons une bijection $\varphi : J_1 \to \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Définissons $T \in B(H)$ sur les éléments de la base par

$$T(e_j) = \begin{cases} \varphi(j)e_j & \text{si } j \in J_1, \\ \frac{1}{2}e_j & \text{si } j \in J \setminus J_1. \end{cases}$$

Alors, on vérifie sans difficulté que T est un opérateur autoadjoint et $\sigma(T) = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Donc T est un opérateur positif, d'où $T = |T|$. Comme 0 n'est pas un point isolé de $\sigma(T)$, on en déduit que $\gamma(T) = 0$; ceci implique que $R(T)$ n'est pas fermé. Donc $\gamma_{\aleph_0}(T) = 0$. D'autre part, on montre facilement que $T - (1/n)I$ est Fredholm pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2\}$ et puisque T et $T - 1/2$ ne sont pas Fredholm, il s'ensuit que $\sigma_e(T) = \{0, 1/2\}$. Ceci nous permet de conclure que $c(\pi_{\aleph_0}(T)) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_e(|T|) \setminus \{0\}\} = 1/2 \ne \gamma_{\aleph_0}(T)$.

REMARQUE. Soit $\beta \in \Theta$. D. Ernest a montré (cf. [12, Proposition 3]) qu'un opérateur $T \in K_\beta(H)$ est à image β-fermée si et seulement si $T \in J_\beta(H)$. Donc, compte tenu de l'assertion (1.3) on conclut que $\gamma_\beta(T) = 0$ pour tout $T \in K_\beta(H) \setminus J_\beta(H)$. D'autre part, il est évident d'après (1.1) que $\gamma_\beta(T) = +\infty$ pour tout $T \in J_\beta(H)$. Il résulte de tout ce qui précéde et du fait que $K_\beta(H) = J_\beta(H)$ pour tout $\beta \notin \Lambda_0$ que si $\alpha \notin \Lambda_0$, alors

$$\gamma_\alpha(T) = \begin{cases} \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_\alpha(|T|) \setminus \{0\}\} & \text{si } T \notin K_\alpha(H), \\ +\infty & \text{si } T \in K_\alpha(H) = J_\alpha(H). \end{cases}$$

Le corollaire qui suit découle immédiatement du Théorème 2.1 et de la remarque précédente.

COROLLAIRE 2.3. *Supposons que* $\alpha \notin \Lambda_0$.

(i) $\gamma_\alpha(T) = c(\pi_\alpha(T))$ *pour tout* $T \in B(H)$.
(ii) $\gamma_\alpha(T) = \gamma_\alpha(T+K)$ *pour tout* $K \in K_\alpha(H) = J_\alpha(H)$.

COROLLAIRE 2.4. *Si T est un opérateur de $B(H)$ à image fermée, alors*

$$\gamma_{\aleph_0}(T) = c(\pi_{\aleph_0}(T)).$$

Démonstration. Si $T \in J(H)$, alors T est de rang fini, d'où en utilisant (1.1) on voit que $\gamma_{\aleph_0}(T) = +\infty$. D'autre part, il est clair que $\sigma_e(|T|) = \{0\}$, donc d'après (2.1), $c(\pi_{\aleph_0}(T)) = +\infty$.

Si $T \notin J(H)$, alors $T \notin K(H)$, ainsi l'assertion résulte immédiatement de la relation (2.1) et du Théorème 2.1. ∎

COROLLAIRE 2.5. *Soit $T \in B(H)$ et supposons que $\alpha \notin \Lambda_0$. Alors*

$$\gamma_\alpha(T) = c(\pi_\alpha(T)) = \sup_{K \in K_\alpha(H)} \gamma(T+K),$$

et ce supremum est atteint.

Démonstration. La première égalité est exactement l'assertion (i) du Corollaire 2.3. La deuxième égalité est une conséquence de [27, Théorème 7]. Montrons que ce supremum est atteint.

Si $c(\pi_\alpha(T)) = 0$, alors $\gamma(T) = 0$; dans ce cas, il suffit de prendre $K = 0$.

Si $c(\pi_\alpha(T)) = +\infty$, alors $T \in K_\alpha(H)$; dans ce cas, il suffit de prendre $K = -T$.

Supposons donc $0 < c(\pi_\alpha(T)) < +\infty$. D'abord, d'après le Corollaire 2.3, $c(\pi_\alpha(T)) = \gamma_\alpha(T)$. D'autre part, d'après la deuxième égalité il existe $K_0 \in K_\alpha(H)$ tel que $\gamma(T+K_0) > 0$. Posons $L = T + K_0$. Par le Corollaire 2.3, on a $\gamma_\alpha(L) = c(\pi_\alpha(L))$. Or, $c(\pi_\alpha(L)) = c(\pi_\alpha(T))$, d'où $\gamma_\alpha(L) = \gamma_\alpha(T) > 0$. Posons $K_1 = E_L(]0, \gamma_\alpha(T)[)(-|L| + \gamma_\alpha(T)I)$ où on rappelle que $E_L(\cdot)$ désigne la mesure spectrale de $|L|$. Alors $K_1 \in K_\alpha(H)$. En effet, pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$K_\varepsilon = (-|L| + \gamma_\alpha(T)I)E_L(]0, \gamma_\alpha(T) - \varepsilon[).$$

Alors, en utilisant [8, Théorème 3.1], on voit facilement que $K_\varepsilon \in J_\alpha(H)$. Par ailleurs, comme $\|K_1 - K_\varepsilon\| \le \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et compte tenu du fait que $K_\alpha(H)$ est un fermé de $B(H)$, on conclut que $K_1 \in K_\alpha(H)$.

Par ailleurs, on a

$$|L| + K_1 = \gamma_\alpha(T)E_L(]0,\gamma_\alpha(T)[) + |L|E_L([\gamma_\alpha(T),+\infty[),$$

et on montre sans aucune difficulté que

$$\gamma(|L| + K_1) = \gamma_\alpha(T).$$

Maintenant, écrivons L sous sa forme polaire $L = W|L|$ avec W une isométrie ou co-isométrie (voir [16, Problème 106]). Par symétrie de l'adjoint on peut supposer que W est une isométrie. Posons $K = K_0 + WK_1$; alors $K \in K_\alpha(H)$ et on voit également que la conorme de $T+K$ vérifie

$$\gamma(T+K) = \gamma(L + WK_1) = \gamma(|L| + K_1) = \gamma_\alpha(T). \blacksquare$$

Nous allons maintenant nous intéresser aux points de continuité des deux applications suivantes : $c_\alpha : S \mapsto c(\pi_\alpha(S))$ et $\gamma_\alpha : S \mapsto \gamma_\alpha(S)$.

D'abord, nous montrons le lemme suivant.

LEMME 2.6. *Si $T \in \Phi_\pm^\alpha$ et $S \in B(H)$ tel que $\|T - S\| < c(\pi_\alpha(T))$, alors*

$$|c(\pi_\alpha(T)) - c(\pi_\alpha(S))| \le \|T - S\|.$$

Démonstration. Remarquons d'abord qu'on peut supposer que $T \in \Phi_+^\alpha$; sinon on passe à l'adjoint. Maintenant, en utilisant [18, Théorème 2], on obtient

$$\|T - S\|_\alpha < \|T - S\| < c(\pi_\alpha(T)) = \|\pi_\alpha(T)^\dagger\|^{-1},$$

où $\pi_\alpha(T)^\dagger$ désigne l'inverse de Moore–Penrose de $\pi_\alpha(T)$ dans $C_\alpha(H)$. Il en résulte que

$$\|\pi_\alpha(T)^\dagger(\pi_\alpha(T) - \pi_\alpha(S))\| < 1. \tag{1}$$

Ceci implique que $I - \pi_\alpha(T)^\dagger(\pi_\alpha(T) - \pi_\alpha(S)) = \pi_\alpha(T)^\dagger\pi_\alpha(S)$ est inversible. Par conséquent $S \in \Phi_+^\alpha$. Finalement, d'après (1) et [18, Théorème 5], on constate que

$$|c(\pi_\alpha(T)) - c(\pi_\alpha(S))| \le \|T - S\|_\alpha \le \|T - S\|. \blacksquare$$

REMARQUE. Le Lemme 2.6 est vrai pour tout cardinal α tel que $\aleph_0 \le \alpha \le \dim H$.

THÉORÈME 2.7. *Soit $T \in B(H)$. Alors, T est un point de continuité pour l'application $c_\alpha : B(H) \to [0,+\infty]$ donnée par $c_\alpha : S \mapsto c(\pi_\alpha(S))$ si et seulement si $c(\pi_\alpha(T)) = 0$ ou $T \in \Phi_\pm^\alpha$.*

Démonstration. "$\Leftarrow$" Quand $c(\pi_\alpha(T)) = 0$, la continuité de c_α découle de sa semi-continuité supérieure (cf. [18, Théorème 7]). Si $c(\pi_\alpha(T)) > 0$ et $T \in \Phi_\pm^\alpha$, alors la continuité de c_α se déduit du Lemme 2.6.

"$\Rightarrow$" Supposons que c_α est continue au point T et que $c(\pi_\alpha(T)) > 0$. D'où, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\|T - S\| < \varepsilon$, alors $c(\pi_\alpha(S)) \ge \delta = \frac{1}{2}c(\pi_\alpha(T))$.

D'autre part, comme l'ensemble des opérateurs semi-inversibles est dense dans $B(H)$ (voir [16, Problème 109]), il existe une suite $(T_n)_n$ de $\Phi_\pm^\alpha$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|T_n - T\| = 0$. D'où, pour $\theta = \min\{\varepsilon, \delta\} > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_{n_0} - T\| < \theta$. Donc $c(\pi_\alpha(T_{n_0})) \ge \delta$. Par conséquent,

$$\|T_{n_0} - T\| < c(\pi_\alpha(T_{n_0})). \tag{1}$$

Comme $T_{n_0} \in \Phi_\pm^\alpha$, en utilisant les Corollaires 2.3 et 2.4 et en tenant compte de [8, Théorème 3.7], on en déduit que

$$c(\pi_\alpha(T_{n_0})) = \gamma_\alpha(T_{n_0}) = \max\{m_\alpha(T_{n_0}), m_\alpha((T_{n_0})^*)\}.$$

Donc, en utilisant (1) et [26, Théorème 4.2.5], on conclut que $T \in \Phi_\pm^\alpha$. $\blacksquare$

Pour $T \in B(H)$, on note $\varrho_\alpha(T) = (\sigma_\alpha(T))^c = \mathbb{C} \setminus \sigma_\alpha(T)$.

COROLLAIRE 2.8. *Soit $T \in B(H)$ tel que $c(\pi_\alpha(T)) > 0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *T est un point de continuité pour $c_\alpha : B(H) \to [0,+\infty]$.*

(ii) *Il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $S \in B(H)$,*

$$\|T - S\| < a \Rightarrow c(\pi_\alpha(S)) \ge b.$$

(iii) *Il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $S \in B(H)$,*

$$\|T - S\| < a \Rightarrow]0,b[\subseteq \varrho_\alpha(|S|).$$

(iv) *Il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $S \in B(H)$,*

$$\|T - S\| < a \Rightarrow]0,b[\subseteq \varrho_\alpha(|S^*|).$$

(v) *$T \in \Phi_\pm^\alpha$.*

Démonstration. Les implications (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) sont faciles à voir.

Les conditions (iii) et (iv) sont équivalentes : ceci découle simplement du théorème de l'application spectrale et du fait

$$]0,b[\subseteq \varrho_\alpha(T^*T) \Leftrightarrow]0,b[\subseteq \varrho_\alpha(TT^*).$$

Pour l'implication (iii)$\Rightarrow$(v), comme l'ensemble des opérateurs semi-inversibles est dense dans $B(H)$ (voir [16, Problème 109]), il existe $S \in \Phi_\pm^\alpha$ tel que $\|T - S\| < \min\{a, b\}$. D'où, en utilisant l'hypothèse (iii), on obtient

$$\|T - S\| < c(\pi_\alpha(S)). \tag{$*$}$$

D'autre part, comme $S \in \Phi_\pm^\alpha$, en utilisant les Corollaires 2.3 et 2.4 et en tenant compte de [8, Théorème 3.7], on conclut que

$$c(\pi_\alpha(S)) = \gamma_\alpha(S) = \max\{m_\alpha(S), m_\alpha(S^*)\}. \tag{$**$}$$

Donc par $(*)$, $(**)$ et [26, Théorème 4.2.5], on en déduit que $T \in \Phi_\pm^\alpha$.

L'implication (v)$\Rightarrow$(i) résulte immédiatement du Théorème 2.7. $\blacksquare$

REMARQUE. D'après le Corollaire 2.3, on peut remarquer que le Théorème 2.7 et le Corollaire 2.8 sont vrais si on remplace l'application $c_\alpha : S \mapsto c(\pi_\alpha(S))$ par $\gamma_\alpha : S \mapsto \gamma_\alpha(S)$ et ceci seulement pour $\alpha \notin \Lambda_0$.

Pour terminer ce paragraphe, nous allons déterminer les points de continuité pour $\gamma_{\aleph_0} : B(H) \to [0, +\infty]$. Nous allons montrer d'abord le lemme suivant.

LEMME 2.9. *Soit $T \in B(H)$ tel que $R(T)$ n'est pas fermé et $c_{\aleph_0}(T) > 0$. Alors T n'est pas un point de continuité pour $\gamma_{\aleph_0} : B(H) \to [0, +\infty]$.*

Démonstration. Soit $0 < \delta < c_{\aleph_0}(T)$. On va prouver qu'il existe un opérateur $T_\delta \in B(H)$ tel que $0 < \|T - T_\delta\| < \delta$ mais $|\gamma_{\aleph_0}(T) - \gamma_{\aleph_0}(T_\delta)| \geq c_{\aleph_0}(T)$. Ceci prouve que T ne peut pas être un point de continuité pour $\gamma_{\aleph_0}$.

Posons $L_\delta = |T|E([\delta/2, +\infty[)$. Comme $0 \in \sigma(|T|)$ et 0 n'est pas un point isolé de $\sigma(|T|)$ car $R(T)$ n'est pas fermé (voir [10, Proposition 4.5, page 359]), on en déduit que $\sigma(|T|) \cap]0, \delta/2[\neq \emptyset$. Par conséquent, $L_\delta \neq |T|$. D'autre part, puisque L_δ est un opérateur positif et $\sigma(L_\delta) \subseteq \{0\} \cup [\delta/2, +\infty[$, il s'ensuit d'après [1] que $\gamma(L_\delta) \geq \delta/2 > 0$. Ceci implique que $R(L_\delta)$ est un fermé. On vérifie sans difficulté que

$$\sigma_e(L_\delta) = \{0\} \cup (\sigma_e(|T|) \cap [\delta/2, +\infty[) \subseteq \{0\} \cup [c_{\aleph_0}(T), +\infty[.$$

Par conséquent, $c_{\aleph_0}(L_\delta) = \inf\{\sigma_e(L_\delta) \setminus \{0\}\} = c_{\aleph_0}(T)$ (car $c_{\aleph_0}(T) \in \sigma_e(L_\delta)$). Et comme $R(L_\delta)$ est un fermé, d'après le Théorème 2.1, $\gamma_{\aleph_0}(L_\delta) = c_{\aleph_0}(L_\delta) = c_{\aleph_0}(T)$. Soit $T = V|T|$ la décomposition polaire de T et posons $T_\delta = VL_\delta$. Alors, on a

$$\|T - T_\delta\| = \| |T| - L_\delta\| = \| |T|E([0, \delta/2[)\| \leq \delta/2 \quad \text{et} \quad \gamma_{\aleph_0}(T_\delta) = \gamma_{\aleph_0}(L_\delta)$$

car $R(L_\delta) = E([\delta/2, +\infty[)H \subseteq N(T)^\perp$ et $V : N(T)^\perp \to \overline{R(T)}$ est une isométrie. Par contre $|\gamma_{\aleph_0}(T) - \gamma_{\aleph_0}(T_\delta)| = \gamma_{\aleph_0}(T_\delta) = c_{\aleph_0}(T)$. ■

THÉORÈME 2.10. *T est un point de continuité pour $\gamma_{\aleph_0} : B(H) \to [0, +\infty]$ si et seulement si $T \notin K(H)$ et $c_{\aleph_0}(T) = 0$ ou T est semi-Fredholm.*

Démonstration. Montrons d'abord l'assertion suivante :

(∗) si $T \in K(H)$, alors T n'est pas un point de continuité de $\gamma_{\aleph_0}$.

En effet, pour tout voisinage borné ϑ de T on a $\vartheta \cap J(H) \neq \emptyset$ et $\vartheta \cap G_\pm \neq \emptyset$ (car $G_\pm$ est dense dans $B(H)$) où $G_\pm$ désigne l'ensemble des opérateurs semi-inversibles. Ainsi, d'une part, on aurait

$$\gamma_{\aleph_0}(S) = +\infty \quad \text{si } S \in \vartheta \cap J(H),$$

et d'autre part,

$$0 < \gamma(S) \leq \gamma_{\aleph_0}(S) \leq \|S\| < +\infty \quad \text{si } S \in \vartheta \cap G_\pm,$$

ce qui est absurde. Donc, on conclut que T ne peut pas être un point de continuité de $\gamma_{\aleph_0}$.

"$\Leftarrow$" Si $T \notin K(H)$ et $c_{\aleph_0}(T) = 0$, alors d'après le Théorème 2.7, T est un point de continuité pour $c_{\aleph_0}$ et donc l'assertion découle directement du Corollaire 2.2.

Si T est semi-Fredholm, alors il existe un voisinage ouvert ϑ de T tel que $\vartheta \subseteq F$. D'où, par le Corollaire 2.4, on a $\gamma_{\aleph_0}(S) = c_{\aleph_0}(S)$ pour tout $S \in \vartheta$. Maintenant le Théorème 2.7 nous permet de conclure.

"$\Rightarrow$" Soit T un point de continuité de $\gamma_{\aleph_0}$ et supposons que $c_{\aleph_0}(T) > 0$. Alors, d'une part par (∗) $T \notin K(H)$ et d'autre part d'après le Lemme 2.9, $R(T)$ doit être fermé. D'où, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $S \in \mathcal{B}(T, \varepsilon)$, $S \notin K(H)$ et $\gamma_{\aleph_0}(S) \geq \frac{1}{2}\gamma_{\aleph_0}(T) > 0$. Alors, comme $c_{\aleph_0} = \gamma_{\aleph_0}$ sur $\mathcal{B}(T, \varepsilon)$ (voir Corollaire 2.4), on en déduit que T est un point de continuité de $c_{\aleph_0}$ et que $c_{\aleph_0}(T) = \gamma_{\aleph_0}(T) > 0$. Par suite, par le Théorème 2.7, on conclut que T est semi-Fredholm. ■

COROLLAIRE 2.11. *Soit $T \in B(H)$ tel que $\gamma_{\aleph_0}(T) > 0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est un point de continuité pour $\gamma_{\aleph_0} : B(H) \to [0, +\infty]$.*

(ii) *Il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $S \in B(H)$,*
$$\|T - S\| < a \Rightarrow \gamma_{\aleph_0}(S) \geq b \text{ et } S \notin K(H).$$

(iii) *Il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $S \in B(H)$,*
$$\|T - S\| < a \Rightarrow]0, b[\subseteq \varrho_{\aleph_0}(|S|) \text{ et } S \notin K(H).$$

(iv) *Il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $S \in B(H)$,*
$$\|T - S\| < a \Rightarrow]0, b[\subseteq \varrho_{\aleph_0}(|S^*|) \text{ et } S \notin K(H).$$

(v) *$T \in \Phi^\alpha_\pm$.*

Démonstration. L'implication (i)$\Rightarrow$(ii) est facile à voir. L'implication (ii)$\Rightarrow$(iii) découle immédiatement du Théorème 2.1. Pour l'équivalence (iii)$\Leftrightarrow$(iv) voir Corollaire 2.8. L'implication (iii)$\Rightarrow$(v) est similaire à l'implication (iii)$\Rightarrow$(v) de la démonstration du Corollaire 2.8. L'équivalence (v)$\Leftrightarrow$(i) est une conséquence directe du Théorème 2.10. ■

3. Approximation par les opérateurs semi-Fredholm. Notons $\mathcal{X}$ un sous-ensemble de $B(H)$, et $\operatorname{int}(\mathcal{X})$, $\overline{\mathcal{X}}$ et $\partial(\mathcal{X})$ respectivement l'intérieur, l'adhérence et la frontière de $\mathcal{X}$. On rappelle que la distance de T à $\mathcal{X}$ est définie par

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{X}) = \inf\{\|T - L\| : L \in \overline{\mathcal{X}}\}.$$

Nous reprenons quelques notations de [3, 4, 5] :

$$\operatorname{ess\,nul} T = \inf\{\dim E([0, \varepsilon[)H : \varepsilon > 0\}, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{ess\,def} T = \operatorname{ess\,nul} T^*, \tag{3.2}$$

$$\Im(T) = \max\{\aleph_0, \operatorname{ess\,nul} T, \operatorname{ess\,def} T\}, \tag{3.3}$$

$$(3.4)\qquad \tau(T)=\sup\{\lambda>0 : \dim E([0,\lambda[)H<\Im(T)\},$$

$$(3.5)\qquad \mu(T)=\max\{\tau(T),\tau(T^*)\}.$$

R. Bouldin a énoncé quelques propriétés de $\tau(T)$ et $\Im(T)$ (cf. [5, Théorème 2]). Il les a caractérisées en fonction de la mesure spectrale $E(\cdot)$ de $|T|$. Malheureusement, l'assertion (ii) de son théorème est inexacte. Cependant elle serait vraie si on remplaçait $E(]\lambda,\lambda+\varepsilon[)$ par $E(]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[)$ et les mêmes techniques utilisées au cours de cette démonstration s'appliqueraient aussi à $E(]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[)$. Ainsi, on obtient :

THÉORÈME 3.1 [5, Théorème 2]). (i) $\tau(T)\ge m_e(T)\ge 0$.

(ii) $\tau(T)=\inf\{\lambda>0 : \dim E(]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[)H\ge\Im(T),\ \forall\varepsilon>0\}$ *et* $\dim E(]\tau(T)-\varepsilon,\tau(T)+\varepsilon[)H\ge\Im(T),\ \forall\varepsilon>0$.

(iii) $\tau(T)=0\Leftrightarrow \operatorname{ess\,nul} T\ge \operatorname{ess\,def} T$ *et* $\operatorname{ess\,nul} T\ge\aleph_0$.

(iv) *Si* $\tau(T)=\tau(T^*)$, *alors* $\operatorname{ess\,nul} T=\operatorname{ess\,def} T$ *et par conséquent* T *est dans la fermeture des opérateurs inversibles.*

(v) *Si* $\tau(T)>0$ *et* $\tau(T^*)>0$, *alors* $\tau(T)=\tau(T^*)$.

Si $\alpha=\aleph_0$, on sait d'après les travaux de P. Y. Wu [28], sur les opérateurs semi-Fredholm dans un espace de Hilbert séparable, que la distance d'un opérateur T à l'ensemble des opérateurs non semi-Fredholm est égale au $\max\{m_e(T),\ m_e(T^*)\}$; le théorème suivant étend ce résultat aux espaces de Hilbert non séparables et aux opérateurs non α-semi-Fredholm.

THÉORÈME 3.2. *Pour* $T\in B(H)$ *et* $\alpha\in\Theta$,

$$\operatorname{dist}(T,(\Phi^\alpha_\pm)^c)=\max\{m_\alpha(T),m_\alpha(T^*)\}.$$

Démonstration. Tout d'abord, d'après [26, Théorème 4.2.5], on remarque facilement que

$$m_\alpha(T)\le\operatorname{dist}(T,(\Phi^\alpha_+)^c).$$

Inversement, soit $T=V|T|$ la décomposition polaire de T et posons $L=V(|T|-m_\alpha(T)I)$. Comme $|T|-m_\alpha(T)I\notin\Phi^\alpha_+$, L lui aussi n'appartient pas à Φ^α_+. Il en résulte que

$$\operatorname{dist}(T,(\Phi^\alpha_+)^c)\le\|T-L\|=m_\alpha(T).$$

D'où

$$(1)\qquad \operatorname{dist}(T,(\Phi^\alpha_+)^c)=m_\alpha(T),$$

et par adjoint,

$$(2)\qquad \operatorname{dist}(T,(\Phi^\alpha_-)^c)=m_\alpha(T^*),$$

où $\Phi^\alpha_-=(\Phi^\alpha_+)^*$ désigne l'ensemble des opérateurs α-semi-Fredholm à droite.

Donc les formules (1) et (2) donnent

$$\operatorname{dist}(T,(\Phi^\alpha_\pm)^c)\ge\max\{m_\alpha(T),m_\alpha(T^*)\}.$$

Montrons maintenant l'inégalité inverse. On peut supposer que $T\in\Phi^\alpha_\pm$ (sinon l'inégalité est évidente) et que $\max\{m_\alpha(T),m_\alpha(T^*)\}=m_\alpha(T)>0$ (sinon on passe à l'adjoint). Soit $T=V|T|$ la décomposition polaire de T. A chaque $\varepsilon>0$, on associe l'idempotent $E_\varepsilon=E(]m_\alpha(T)-\varepsilon,m_\alpha(T)+\varepsilon[)$. Alors, d'après [8, Lemme 3.6], on voit que $H_\varepsilon=R(E_\varepsilon)$ est un sous-espace de dimension supérieure ou égale à α.

Dans un premier temps, nous allons construire une suite d'opérateurs $(S_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de $(\Phi^\alpha_\pm)^c$ vérifiant $\|T-S_\varepsilon\|<m_\alpha(T)+\varepsilon$. Posons $S_\varepsilon=T(I-E_\varepsilon)$; alors $H_\varepsilon\subseteq N(S_\varepsilon)$, ce qui implique que $\dim N(S_\varepsilon)\ge\alpha$. Par conséquent, $S_\varepsilon\notin\Phi^\alpha_+$.

D'autre part, $S_\varepsilon\notin\Phi^\alpha_-$. En effet, si $S_\varepsilon\in\Phi^\alpha_-$, alors $V\in\Phi^\alpha_-$ puisque $V|T|(I-E_\varepsilon)$ est semi-inversible à droite modulo K_α.

D'ailleurs, puisque $T\in\Phi^\alpha_+$ (car $m_\alpha(T)>0$), il s'ensuit que $\dim N(V)=\dim N(T)<\alpha$. Il en résulte que $V\in\Phi^\alpha$. Or, $S_\varepsilon=V|T|(I-E_\varepsilon)\in\Phi^\alpha_-$, par suite $|T|(I-E_\varepsilon)\in\Phi^\alpha_-$, ce qui est équivalent à dire que $\pi_\alpha(|T|(I-E_\varepsilon))$ est semi-inversible à droite dans $C_\alpha(H)$. Comme $\pi_\alpha(|T|(I-E_\varepsilon))$ est un élément positif, on en déduit que $\pi_\alpha(|T|(I-E_\varepsilon))$ est inversible dans $C_\alpha(H)$. Donc $S_\varepsilon=V|T|(I-E_\varepsilon)\in\Phi^\alpha$, ce qui contredit le fait que $S_\varepsilon\notin\Phi^\alpha_+$. Il en résulte que $S_\varepsilon\notin\Phi^\alpha_\pm$.

Finalement, on en déduit que

$$\operatorname{dist}(T,(\Phi^\alpha_\pm)^c)\le\|T-S_\varepsilon\|=\|TE_\varepsilon\|=\|\,|T|E_\varepsilon\|\le m_\alpha(T)+\varepsilon,$$

ce qui donne

$$\operatorname{dist}(T,(\Phi^\alpha_\pm)^c)\le m_\alpha(T)=\max\{m_\alpha(T),m_\alpha(T^*)\}.\ \blacksquare$$

On va déterminer la distance de T à plusieurs classes d'opérateurs; avant cela nous montrons les deux lemmes suivants.

LEMME 3.3. *Soit* $T\in B(H)$. *Alors* ($\tau(T)>0$ *et* $\tau(T^*)=0$) *si et seulement si* ($\dim N(T)\le\operatorname{ess\,nul} T<\Im(T)$ *et* $\dim N(T^*)=\operatorname{ess\,def} T=\Im(T)$).

Démonstration. "$\Leftarrow$" Résulte immédiatement du Théorème 3.1.

"$\Rightarrow$" Soit $0<\lambda<\tau(T)$ tel que

$$\operatorname{ess\,nul} T=\dim E([0,\lambda[)H\quad\text{et}\quad\operatorname{ess\,def} T=\dim E^*([0,\lambda[)H.$$

Alors, par le Théorème 3.1, on voit que

$$(1)\qquad \dim N(T)\le\operatorname{ess\,nul} T<\Im(T)\quad\text{et}\quad\operatorname{ess\,def}(T)=\Im(T).$$

Or, d'après [5, Lemme 1], $\dim E(]0,\lambda[)H=\dim E^*(]0,\lambda[)H$; par suite, en tenant compte de (1), on conclut que

$$\dim N(T^*)=\dim E^*(\{0\})H=\dim E^*([0,\lambda[)H=\operatorname{ess\,def} T=\Im(T).\ \blacksquare$$

Du Lemme 3.3 résulte immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.4. *Si $T \in B(H)$ tel que $\tau(T) > 0$ et $\tau(T^*) = 0$, alors* $\operatorname{ind}(T) = -\Im(T)$.

LEMME 3.5. *Si $T \in B(H)$ tel que $\tau(T) > 0$ et $\tau(T^*) > 0$, alors*

$$\tau(T) = \tau(T^*) = m_e(T) = m_e(T^*).$$

Démonstration. Tout d'abord, d'après le Théorème 3.1, on a $\tau(T) = \tau(T^*)$. D'autre part, soit $\lambda \in]0, \tau(T)[$ tel que

$$(*) \qquad \operatorname{ess\,nul} T = \dim E([0,\lambda[)H \quad \text{et} \quad \operatorname{ess\,def} T = \dim E^*([0,\lambda[)H.$$

Alors, par définition de $\tau(T)$ et $\tau(T^*)$

$$\dim E([0,\lambda[)H < \Im(T) \quad \text{et} \quad \dim E^*([0,\lambda[)H < \Im(T).$$

Donc, par $(*)$ et en tenant compte de la relation (3.3), on conclut que $\Im(T) = \aleph_0$. Enfin, en utilisant [19, Proposition 6.10], on constate que

$$\tau(T) = \tau(T^*) = m_e(T) = m_e(T^*). \ \blacksquare$$

REMARQUE 3.6. *Si $T \in B(H)$, alors $\tau(T) = m_{\Im(T)}(T)$.*

Cette remarque découle immédiatement de [8, Théorème 3.7], parce que

$$m_{\Im(T)}(T) = \sup\{\lambda \ge 0 : \dim E([0,\lambda[)H < \Im(T)\}.$$

Pour un cardinal β vérifiant $-\dim H \le \beta \le \dim H$, on note

$$I_\beta = \{T \in B(H) : \operatorname{ind}(T) = \beta\},$$

l'ensemble des opérateurs d'indice β.

A $T \in B(H)$, on associe les ensembles $\Theta(T) = \{\beta \text{ un cardinal} : 0 \le \beta \le \Im(T)\}$ et $\Theta_-(T) = \{-\beta : \beta \in \Theta(T)\}$.

Nous notons G (resp. G_+, G_-) l'ensemble des opérateurs inversibles (resp. semi-inversibles à gauche, semi-inversibles à droite).

THÉORÈME 3.7. *Soit $T \in B(H)$.*

(i) *Pour $J \subseteq \Theta(T)$,*

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta \in J} (G_- \cap I_\beta)\Big) = \begin{cases} \mu(T) & \text{si } \operatorname{ind}(T) \notin J, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) *Pour β un cardinal vérifiant $\Im(T) < \beta \le \dim H$,*

$$\operatorname{dist}(T, G_- \cap I_\beta) = \max\{m_\beta(T), m_\beta(T^*)\}.$$

Pour la démonstration du Théorème 3.7, on aura besoin du lemme suivant.

LEMME 3.8. *Soient $T \in B(H)$, $\varepsilon > 0$ et $\lambda \ge \mu(T)$. Notons $H_\varepsilon = E([0, \lambda+\varepsilon[)H$. Si ε est suffisamment petit, alors*

$$\dim H_\varepsilon = \dim [T(H_\varepsilon^\perp)]^\perp.$$

Démonstration. Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T. Tout d'abord, en utilisant [16, Problème 106], on obtient

$$(1) \qquad R(U) = \overline{R(T)} = N(T^*)^\perp = N(|T^*|)^\perp = E^*(]0, +\infty[)H.$$

D'autre part, on voit que

$$\begin{aligned} [T(H_\varepsilon^\perp)]^\perp &= [U|T|E([\lambda+\varepsilon, +\infty[)H]^\perp \\ &= [UE([\lambda+\varepsilon, +\infty[)H]^\perp \\ &= [E^*([\lambda+\varepsilon, +\infty[)UH]^\perp \qquad \text{(d'après [5, Lemme 1])} \\ &= [E^*([\lambda+\varepsilon, +\infty[)H]^\perp \qquad \text{(d'après (1))} \\ &= E^*([0, \lambda+\varepsilon[)H. \end{aligned}$$

Maintenant, si $\lambda = 0$, alors pour ε suffisamment petit on a

$$(2) \qquad \dim E([0,\varepsilon[)H = \operatorname{ess\,nul} T \quad \text{et} \quad \dim E^*([0,\varepsilon[)H = \operatorname{ess\,def} T.$$

Ainsi, en utilisant le Théorème 3.1 et le fait que $\mu(T) = 0$, on voit que

$$(3) \qquad \aleph_0 \le \operatorname{ess\,nul} T = \operatorname{ess\,def} T.$$

Donc

$$(4) \qquad \dim E([0,\varepsilon[)H = \dim E^*([0,\varepsilon[)H.$$

Par conséquent,

$$\dim [T(H_\varepsilon^\perp)]^\perp = \dim E^*([0,\varepsilon[)H = \dim E([0,\varepsilon[)H = \dim H_\varepsilon.$$

Supposons maintenant que $\lambda > 0$. Alors par [5, Lemme 1] et le Théorème 3.1, on voit que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(5) \qquad \dim E(]0, \lambda+\varepsilon[)H = \dim E^*(]0, \lambda+\varepsilon[)H \ge \Im(T).$$

Comme

$$\dim E(\{0\})H \le \Im(T) \quad \text{et} \quad \dim E^*(\{0\})H \le \Im(T),$$

il vient

$$\dim E([0, \lambda+\varepsilon[)H = \dim E(]0, \lambda+\varepsilon[)H$$

et

$$\dim E^*([0, \lambda+\varepsilon[)H = \dim E^*(]0, \lambda+\varepsilon[)H.$$

D'où, de (5) il résulte que

$$\dim E([0, \lambda+\varepsilon[)H = \dim E^*([0, \lambda+\varepsilon[)H.$$

Par conséquent, $\dim H_\varepsilon = \dim [T(H_\varepsilon^\perp)]^\perp$. $\blacksquare$

Démonstration du Théorème 3.7. (i) Si $\operatorname{ind}(T) \in J$, soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T avec U une co-isométrie et $\operatorname{ind}(U) = \operatorname{ind}(T)$ (voir [16, Problème 106]). A chaque $\varepsilon > 0$, on associe le sous-espace $H_\varepsilon = E([0,\varepsilon[)H$. Soit $L_\varepsilon = E([0,\varepsilon[) \oplus |T|_{|H_\varepsilon^\perp}$. Alors, il est facile de voir que L_ε

est inversible, ce qui implique que $UL_\varepsilon \in \bigcup_{\beta\in J}(G_- \cap I_\beta)$. Or, $\|T - UL_\varepsilon\| \leq \||T| - L_\varepsilon\| \leq 2\varepsilon$, et par suite

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta\in J}(G_- \cap I_\beta)\Big) = 0.$$

Supposons maintenant que $\operatorname{ind}(T) \notin J$. Soit $\zeta \in J$. Cette fois on pose $H_\varepsilon = E([0, \mu(T)+\varepsilon[)H$. Comme, d'après le Lemme 3.8, H_ε et $[T(H_\varepsilon^\perp)]^\perp$ ont la même dimension, on peut trouver une co-isométrie $W : H_\varepsilon \to [T(H_\varepsilon^\perp)]^\perp$ d'indice ζ.

Définissons maintenant $L_\varepsilon = \varepsilon W \oplus T_{|H_\varepsilon^\perp} \in B(H)$. Une vérification de routine montre que $L_\varepsilon \in G_-$ et $\operatorname{ind}(L_\varepsilon) = \operatorname{ind}(W) = \zeta$, ce qui implique que $L_\varepsilon \in \bigcup_{\beta\in J}(G_- \cap I_\beta)$. D'autre part, comme

$$\|T - L_\varepsilon\| \leq \|T_{|H_\varepsilon}\| + \varepsilon\|W\| \leq \mu(T) + 2\varepsilon,$$

il vient que

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta\in J}(G_- \cap I_\beta)\Big) \leq \mu(T).$$

Montrons maintenant l'inégalité inverse. On peut supposer que $\mu(T) > 0$ (sinon l'inégalité est évidente). On va distinguer deux cas.

• Si $\min\{\tau(T), \tau(T^*)\} > 0$, alors, d'après le Théorème 3.1 on a $\tau(T) = \tau(T^*)$, et par le Lemme 3.5, on voit que $\mu(T) = m_e(T)$. Ainsi, en s'appuyant sur [26, Théorème 4.2.5] (avec $\alpha = \aleph_0$), il est aisé de prouver que

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta\in J}(G_- \cap I_\beta)\Big) \geq m_e(T) = \mu(T).$$

• Si $\min\{\tau(T), \tau(T^*)\} = 0$, tout d'abord, par le Lemme 3.3, on conclut que $\operatorname{ind}_{\Im(T)}(T) = \operatorname{ind}(T) = \pm\Im(T)$. Ensuite, en utilisant [26, Théorème 4.2.5], on obtient

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta\in J}(G_- \cap I_\beta)\Big) \geq \max\{m_{\Im(T)}(T), m_{\Im(T)}(T^*)\} = \mu(T).$$

(ii) Notons $\delta(T) = \max\{m_\beta(T), m_\beta(T^*)\}$; alors $\delta(T) \geq \mu(T)$. A chaque $\varepsilon > 0$, on associe le sous-espace $H_\varepsilon = E([0, \delta(T)+\varepsilon[)H$. Dans un premier temps, on va prouver que $\dim H_\varepsilon = \dim [T(H_\varepsilon^\perp)]^\perp \geq \beta$. On va distinguer deux cas.

Si $\delta(T) = 0$, alors par [8, Théorème 3.7], on voit que $\dim H_\varepsilon \geq \beta$ et donc d'après le Lemme 3.8, on constate que $\dim H_\varepsilon = \dim [T(H_\varepsilon^\perp)]^\perp \geq \beta$.

Si $\delta(T) > 0$, supposons que $0 < \varepsilon < \delta(T)$; alors par [8, Lemme 3.6], on a

$$\dim E(]\delta(T) - \varepsilon, \delta(T) + \varepsilon[)H \geq \beta \quad \text{ou} \quad \dim E^*(]\delta(T) - \varepsilon, \delta(T) + \varepsilon[)H \geq \beta,$$

ce qui donne d'après [5, Lemme 1]

$$\dim E(]\delta(T) - \varepsilon, \delta(T) + \varepsilon[)H = \dim E^*(]\delta(T) - \varepsilon, \delta(T) + \varepsilon[)H \geq \beta.$$

Ceci entraîne que $\dim H_\varepsilon \geq \beta$ et donc par le Lemme 3.8 on observe que

$$\dim H_\varepsilon = \dim [T(H_\varepsilon^\perp)]^\perp \geq \beta.$$

Maintenant, on sait qu'il existe une co-isométrie $W : H_\varepsilon \to [T(H_\varepsilon^\perp)]^\perp$ d'indice β. Posons $L_\varepsilon = \varepsilon W \oplus T_{|H_\varepsilon^\perp}$. Alors on voit aisément que $L_\varepsilon \in G_- \cap I_\beta$ et que $\|T - L_\varepsilon\| \leq \delta(T) + 2\varepsilon$, ce qui donne

$$\operatorname{dist}(T, G_- \cap I_\beta) \leq \delta(T). \tag{1}$$

Inversement, pour tout $L \in G_- \cap I_\beta$, on a $\operatorname{ind}(L) = \beta \neq \operatorname{ind}(T)$ et $\operatorname{ind}_\beta(T) = 0$, $\operatorname{ind}_\beta(L) = \beta$. Donc, d'après [26, Théorème 4.2.5], on doit avoir

$$\|T - L\| \geq \delta(T), \quad \forall L \in G_- \cap I_\beta,$$

ce qui implique que

$$\operatorname{dist}(T, G_- \cap I_\beta) \geq \delta(T). \tag{2}$$

De (1) et (2) on conclut que $\operatorname{dist}(T, G_- \cap I_\beta) = \delta(T)$. Ceci achève la preuve du Théorème 3.7. ∎

Le corollaire qui suit résulte immédiatement du Théorème 3.7 par passage à l'adjoint.

COROLLAIRE 3.9. *Soit $T \in B(H)$.*

(i) *Pour $J \subseteq \Theta_-(T)$,*

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta\in J}(G_+ \cap I_\beta)\Big) = \begin{cases} \mu(T) & \text{si } \operatorname{ind}(T) \notin J, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) *Pour β un cardinal vérifiant $\Im(T) < \beta \leq \dim H$,*

$$\operatorname{dist}(T, G_+ \cap I_{-\beta}) = \max\{m_\beta(T), m_\beta(T^*)\}.$$

On montre de la même façon le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.10. *Soit $T \in B(H)$.*

(i) *Pour $J \subseteq \Theta(T) \cup \Theta_-(T)$,*

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta\in J} I_\beta\Big) = \begin{cases} \mu(T) & \text{si } \operatorname{ind}(T) \notin J, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) *Pour β vérifiant $\Im(T) < |\beta| \leq \dim H$,*

$$\operatorname{dist}(T, I_\beta) = \max\{m_{|\beta|}(T), m_{|\beta|}(T^*)\}, \quad \text{où} \quad |\beta| = \begin{cases} \beta & \text{si } \beta \geq 0, \\ -\beta & \text{si } \beta < 0. \end{cases}$$

Rappelons qu'un opérateur $T \in B(H)$ à image fermée est dit *Fredholm* si $\max\{\dim N(T), \dim N(T^*)\}$ est fini. On note par $\mathcal{F}$ cette classe d'opérateurs.

Pour β un cardinal vérifiant $\beta \leq \dim H$, on note F^β (resp. $F^{-\beta}$) l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm d'indice β (resp. $-\beta$).

On montre de la même manière le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.11. *Soit* $T \in B(H)$.

(i) *Pour* $J \subseteq \Theta(T) \cup \Theta_-(T)$,

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta \in J} F^\beta\Big) = \begin{cases} \mu(T) & \text{si } \operatorname{ind}(T) \notin J, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) *Pour* β *vérifiant* $\Im(T) < |\beta| \le \dim H$,

$$\operatorname{dist}(T, F^\beta) = \max\{m_{|\beta|}(T), m_{|\beta|}(T^*)\}.$$

COROLLAIRE 3.12. *Pour* $T \in B(H)$,

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{F}) = \begin{cases} \tau(T^*) & \text{si } \operatorname{ind}(T) \ge \aleph_0, \\ 0 & \text{si } \operatorname{ind}(T) \text{ est fini}, \\ \tau(T) & \text{si } \operatorname{ind}(T) \le -\aleph_0. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\beta = \operatorname{ind}(T)$.

• Si β est fini, alors $F^\beta \subseteq \mathcal{F}$ et par le Corollaire 3.11, on constate que

$$0 \le \operatorname{dist}(T, \mathcal{F}) \le \operatorname{dist}(T, F^\beta) = 0.$$

• Si $\beta \ge \aleph_0$, alors il est facile de voir que $\Im(T) = \operatorname{ess\,nul} T$. Donc, en tenant compte du Théorème 3.1, on conclut que $\tau(T) = 0$. En conséquence, par [5, Corollaire 8], on obtient

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{F}) \le \operatorname{dist}(T, G) = \tau(T^*).$$

Inversement, pour tout $L \in \mathcal{F}$, on voit que $\operatorname{ind}_\beta(L) = 0$. Or, $\operatorname{ind}_\beta(T) = \operatorname{ind}(T) \ne 0$, d'où en utilisant [26, Théorème 4.2.5] et le Lemme 3.3, on obtient $\|T - L\| \ge m_\beta(T^*) = \tau(T^*)$. Donc

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{F}) \ge \tau(T^*).$$

• Si $\beta \le -\aleph_0$, tout simplement en utilisant le point précédent, on obtient

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{F}) = \operatorname{dist}(T^*, \mathcal{F}) = \tau(T). \ ■$$

Pour un opérateur T de $B(H)$, les distances de T à F_+ et $F_- = (F_+)^*$ sont données par les formules suivantes :

THÉORÈME 3.13.

(a) $$\operatorname{dist}(T, F_+) = \begin{cases} \tau(T^*) & \text{si } \operatorname{ind}(T) \ge \aleph_0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

(b) $$\operatorname{dist}(T, F_-) = \begin{cases} \tau(T) & \text{si } \operatorname{ind}(T) \le -\aleph_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. (a) Soit $\beta = \operatorname{ind}(T)$. Si $\beta \ge \aleph_0$, alors en utilisant le Corollaire 3.12, on obtient

$$\operatorname{dist}(T, F_+) \le \operatorname{dist}(T, \mathcal{F}) = \tau(T^*).$$

Montrons maintenant l'inégalité inverse. On peut supposer que $\tau(T^*) > 0$, car sinon l'inégalité est évidente. Comme $\operatorname{ind}(T) \ge \aleph_0$, on en déduit que $\Im(T) = \operatorname{ess\,nul} T$. D'où en utilisant le Théorème 3.1, on conclut que $\tau(T) = 0$. Donc d'après [26, Théorème 4.2.5] et le Lemme 3.3, on doit avoir pour tout $L \in F_+$,

$$\|T - L\| \ge m_\beta(T^*) = \tau(T^*).$$

Ceci prouve que $\operatorname{dist}(T, F_+) \ge m_\beta(T^*) = \tau(T^*)$. Donc

$$\operatorname{dist}(T, F_+) = \tau(T^*).$$

Si $\beta < \aleph_0$, comme $F^\beta \subseteq F_+$, d'après le Corollaire 3.11, on conclut que

$$0 \le \operatorname{dist}(T, F_+) \le \operatorname{dist}(T, F^\beta) = 0.$$

La preuve de (b) résulte immédiatement de (a) par dualité. ■

4. Sur la frontière de certaines classes d'opérateurs liées aux opérateurs semi-Fredholm. Dans le cas hilbertien séparable, S. Izumino et Y. Kato [20] ont montré qu'un opérateur T appartient à $\partial(\overline{G})$ si et seulement si T n'est pas semi-Fredholm (ceci est équivalent à dire que $m_e(T) = m_e(T^*) = 0$). La situation pour les espaces de Hilbert non séparables est un peu différente. De manière plus précise, la frontière de $\overline{G}$ est en générale incluse strictement dans le complémentaire des opérateurs semi-Fredholm, tout simplement parce que les opérateurs appartenant à $\partial(\overline{G})$ vérifient une condition plus forte donnée par

$$L \in \partial(\overline{G}) \Leftrightarrow \tau(L) = \tau(L^*) = 0.$$

Il faut noter que dans le cas hilbertien séparable, $\tau(T)$ est égale à $m_e(T)$ et donc le théorème qui suit étend le résultat de S. Izumino et Y. Kato [20] aux cas des espaces de Hilbert non séparables. Considérons l'ensemble $\Lambda = \{L \in B(H) : \tau(L) = \tau(L^*) = 0\}$.

THÉORÈME 4.1.

$$\partial(\overline{G}) = \{L \in B(H) : \tau(L) = \tau(L^*) = 0\} = \Lambda.$$

Démonstration. "$\subset$" D'abord, d'après [5, Corollaire 8], on voit sans difficulté les inclusions suivantes :

$$G \subseteq \mathcal{F} \cap I_0 \subseteq \operatorname{int}(\overline{G}) \subseteq \overline{G}.$$

Donc $T \notin \mathcal{F} \cap I_0$ pour tout opérateur T de $\partial(\overline{G})$. D'où d'après [5, Corollaire 8], on doit avoir $\operatorname{dist}(T, G) = \mu(T)$. Et comme $T \in \partial(\overline{G}) \subseteq \overline{G}$, on conclut que $\mu(T) = 0$. Par conséquent, $T \in \Lambda$.

"$\supset$" Si $T \in \Lambda$, alors par [5, Corollaire 8], on remarque que

$$0 \le \operatorname{dist}(T, G) \le \mu(T) = 0,$$

ce qui implique que $T \in \overline{G}$. Pour terminer la preuve du théorème, il suffit de prouver que $T \in \overline{\overline{G}^c}$.

Quitte à passer à l'adjoint on peut supposer que $\operatorname{ind}(T) \leq 0$. Soit $T = V|T|$ la décomposition polaire de T avec V une isométrie et $\operatorname{ind}(V) = \operatorname{ind}(T)$ (voir [16, Problème 106]). A chaque $\varepsilon > 0$, on associe l'idempotent $E_\varepsilon = E([0,\varepsilon[)$ et on pose $E_\varepsilon^\perp = I - E_\varepsilon$.

Soit $(e_j)_{j\in J}$ une base orthonormale de $E([0,\varepsilon[)H$ où J est un ensemble tel que $\operatorname{card}(J) = \dim E([0,\varepsilon[)H$. Compte tenu du fait que $\tau(T) = 0$, on conclut que $\operatorname{card}(J) = \dim E([0,\varepsilon[)H \geq \Im(T)$. Fixons j_0 de J et considérons une bijection $\varphi : J \to J \setminus \{j_0\}$.

Définissons maintenant W de $B(H)$ de la manière suivante :

$$W(x) = x \quad \text{si } x \in [E_\varepsilon(H)]^\perp = E_\varepsilon^\perp(H),$$
$$W(e_j) = e_{\varphi(j)} \quad \text{si } j \in J.$$

Alors, on vérifie facilement que W est une isométrie d'indice -1 et que

$$WE_\varepsilon^\perp = E_\varepsilon^\perp. \tag{1}$$

Soient $S_\varepsilon = (|T| - \varepsilon I)E_\varepsilon^\perp$ et $L_\varepsilon = VW(S_\varepsilon + \varepsilon I)$. On vérifie sans difficulté que

$$S_\varepsilon + \varepsilon I \in G \quad \text{et} \quad \|S_\varepsilon - |T|\,\| \leq \varepsilon, \tag{2}$$

$$E_\varepsilon^\perp S_\varepsilon = S_\varepsilon \quad \text{et} \quad WS_\varepsilon = S_\varepsilon. \tag{3}$$

Ceci implique que

$$N(L_\varepsilon) = \{0\} \quad \text{et} \quad \operatorname{ind}(L_\varepsilon) \leq -1.$$

Il en résulte que $L_\varepsilon \notin \mathcal{F} \cap I_0$. Ainsi par [5, Corollaire 8], on constate que $\operatorname{dist}(L_\varepsilon, G) = \mu(L_\varepsilon)$. D'autre part, comme $R(L_\varepsilon) = R(VW)$ est un fermé et $N(L_\varepsilon) = \{0\}$, on en déduit que $L_\varepsilon \in F_+$. Donc $m_e(T) > 0$ (cf. [2, Théorème 2]). Par conséquent $\mu(L_\varepsilon) \geq \tau(L_\varepsilon) \geq m_e(L_\varepsilon) > 0$. Maintenant par [5, Corollaire 8], on conclut que $L_\varepsilon \notin \overline{G}$, ce qui revient à dire que $L_\varepsilon \in \overline{G}^c$. Or, au moyen de (2) et (3) on conclut que $\|T - L_\varepsilon\| \leq 2\varepsilon$. Il en résulte que $T \in \overline{\overline{G}^c}$. ∎

L'auteur a montré dans le cas hilbertien séparable que pour tout sous-ensemble $J \subsetneq \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\aleph_0, \aleph_0\}$, $\operatorname{int}(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}) = \bigcup_{j\in J} F^j$ et $\partial(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}) = \partial(\bigcup_{j\in J} F^j) = \{T \in B(H) : m_e(T) = m_e(T^*) = 0\}$ (voir [25, Théorèmes 5 et 8]). On va prouver que les deux premières égalités précédentes subsistent même pour les espaces de Hilbert non séparables.

THÉORÈME 4.2. *Soit* $J \subsetneq \overline{\mathbb{Z}}$.

(i)
$$\operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big) = \bigcup_{j\in J} F^j,$$

(ii)
$$\partial\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big) = \partial\Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big) = \Lambda.$$

Démonstration. (i) L'inclusion $\bigcup_{j\in J} F^j \subseteq \operatorname{int}(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j})$ étant évidente, il suffit de montrer l'inclusion inverse. Soit $T \in \operatorname{int}(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j})$. Nous allons montrer que $\mu(T) > 0$. Si ce n'était pas le cas, comme $\mu(T) \geq \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}$ (voir Théorème 3.1), on conclurait que T n'est pas semi-Fredholm. Soit $m \in \overline{\mathbb{Z}} \setminus J$ (ceci est possible car $J \subsetneq \overline{\mathbb{Z}}$); alors par le Corollaire 3.11, on devrait avoir $T \in \overline{F^m}$ (car $\mu(T) = 0$). Puisque T n'est pas semi-Fredholm, on conclurait que $T \in \overline{F^m} \setminus F^m = \partial(F^m)$. Il en résulterait que $T \in \partial(F^m) \cap \operatorname{int}(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j})$. Donc $(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}) \cap F^m \neq \emptyset$, ce qui contredirait la continuité de l'indice. Par conséquent, $\mu(T) > 0$.

Maintenant par le Corollaire 3.11, on constate que T est un opérateur d'indice $j \in J$ (c'est-à-dire $T \in \bigcup_{j\in J} I_j$). Soit $n = \operatorname{ind}(T)$. Pour finir la preuve de la première assertion, on a besoin de distinguer trois cas.

- Si n fini, alors $\delta(T) = \min\{\tau(T), \tau(T^*)\} > 0$. Car si ce n'était pas le cas, on conclurait par le Corollaire 3.4 que $\operatorname{ind}(T) = \pm\Im(T)$. Cela reviendrait à dire que $\Im(T) = \pm n$, ce qui contredirait le fait que $\Im(T) \geq \aleph_0$. D'où $\mu(T) = \tau(T) = \tau(T^*) > 0$. En tenant compte du Lemme 3.5, on obtient

$$m_e(T) = m_e(T^*) = \mu(T) > 0.$$

Par conséquent,

$$T \in \mathcal{F} \cap \bigcup_{j\in J} I_j \subseteq \bigcup_{j\in J} F^j.$$

- Si $n = \aleph_0$, tout d'abord remarquons que $\dim N(T) \geq \dim N(T^*)$, d'où $\tau(T) \leq \tau(T^*)$. Donc $\tau(T) = 0$ et $\tau(T^*) = \mu(T) > 0$. Car si $\tau(T) > 0$, par le Lemme 3.5, on conclurait que T est Fredholm, ce qui contredirait le fait que $\operatorname{ind}(T) = \aleph_0$. Par conséquent, d'après le Corollaire 3.4, $\operatorname{ind}(T) = \Im(T)$. Ceci implique que $\Im(T) = \aleph_0$ et en particulier $\tau(T^*) = m_e(T^*) > 0$. Donc $T \in F \cap I_{\aleph_0} = F^{\aleph_0} \subseteq F \cap \bigcup_{j\in J} I_j = \bigcup_{j\in J} F^j$.
- Si $n = -\aleph_0$, alors $\tau(T^*) \leq \tau(T)$ et on montre comme au point précédent que $m_e(T) = \mu(T) > 0$. Par conséquent, $T \in F^{-\aleph_0} \subseteq \bigcup_{j\in J} F^j$.

(ii) La première égalité résulte immédiatement de la première assertion.

Montrons la deuxième égalité. Soit $T \in \Lambda$ (c'est-à-dire $\mu(T) = 0$). D'abord comme $\mu(T) \geq \max\{m_e(T), m_e(T^*)\} \geq 0$, on en déduit que T n'est pas semi-Fredholm. En particulier $T \notin \bigcup_{j\in J} F^j$. D'autre part, d'après le Corollaire 3.11, on voit que $T \in \overline{\bigcup_{j\in J} F^j}$. Maintenant, en utilisant la première assertion on conclut que $T \in \partial(\bigcup_{j\in J} F^j)$. Ceci prouve que $\Lambda \subseteq \partial(\bigcup_{j\in J} F^j)$.

Montrons l'inclusion inverse. Si $T \in \partial(\bigcup_{j\in J} F^j)$, alors $\delta(T) = \min\{\tau(T), \tau(T^*)\} = 0$. Car si ce n'était pas le cas, on conclurait d'abord, par le Lemme 3.5, que T est Fredholm et ensuite, par le Corollaire 3.11, on constaterait que $T \in \bigcup_{j\in J} I_j$. Donc $T \in \mathcal{F} \cap \bigcup_{j\in J} I_j \subseteq \bigcup_{j\in J} F^j$. Ceci contredirait le fait que $T \in \partial(\bigcup_{j\in J} F^j)$. Par conséquent, $\delta(T) = 0$. On va montrer que $\mu(T) = 0$; pour cela on va distinguer trois cas.

• Si $\operatorname{ind}(T)$ est fini, supposons que $\mu(T) > 0$. Alors par les Corollaires 3.11 et 3.4, on conclurait que $\operatorname{ind}(T) = \pm\Im(T)$. Ceci contredirait le fait que $\Im(T) \geq \aleph_0$.

• Si $\operatorname{ind}(T) = \aleph_0$, alors $\tau(T) \leq \tau(T^*)$. On va prouver que $\tau(T^*) = 0$. Si ce n'était pas le cas, comme plus haut, on conclurait par le Corollaire 3.4 que $\aleph_0 = \operatorname{ind}(T) = \Im(T)$. Cela entraînerait que $m_e(T^*) = \tau(T^*) > 0$. Donc T est semi-Fredholm. D'autre part, comme $\mu(T) = m_e(T^*) > 0$ et $T \in \overline{\bigcup_{j\in J} F^j}$ d'après le Corollaire 3.11, on devrait avoir $\operatorname{ind}(T) \in J$. Il en résulterait que $T \in \bigcup_{j\in J} F^j$, ce qui contredirait le fait que $T \in \partial(\bigcup_{j\in J} F^j)$.

• Si $\operatorname{ind}(T) = -\aleph_0$ on montre comme au point précédent que $\tau(T) = \mu(T) = 0$.

Conclusion : Nous avons donc démontré que pour tout opérateur $T \in \partial(\bigcup_{j\in J} F^j)$ la quantité $\mu(T)$ est nécessairement nulle; cela revient à dire que $T \in \Lambda$. Ceci achève la preuve du Théorème 4.2. ■

Le corollaire suivant est une simple conséquence du Théorème 4.2, avec $J = \mathbb{Z}$.

COROLLAIRE 4.3. (i) $\operatorname{int}(\overline{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$.
(ii) $\partial(\overline{\mathcal{F}}) = \partial(\mathcal{F}) = \Lambda$.

Dans le cas hilbertien séparable, l'auteur a montré (voir [25]) que

$$\partial(\mathcal{F}) = \partial(\overline{F_+}) = \partial(F_+) = \{T \in B(H) : m_e(T) = m_e(T^*) = 0\}.$$

Il est donc naturel de se demander si ces égalités restent vraies pour les espaces de Hilbert non séparables. Le théorème suivant prouve qu'il n'en est rien.

THÉORÈME 4.4. (i) *$\partial(\overline{F_+}) \subsetneq \partial(F_+)$ et $\partial(\mathcal{F}) \neq \partial(F_+)$.*
(ii) *Pour $\alpha = \dim H$, on a $\Lambda \subsetneq \partial(F^\alpha)$ et $\Lambda \subsetneq \partial(F^{-\alpha})$.*
(iii) *Pour α et β tels que $\aleph_0 < \alpha < \beta \leq \dim H$, on a $\partial(F^\alpha) \not\subset \partial(F^\beta)$ et $\partial(F^\beta) \not\subset \partial(F^\alpha)$.*

Démonstration. (i) On va construire un opérateur T qui appartient à $\partial(F_+)$ mais n'appartient ni à $\partial(\mathcal{F})$ ni à $\partial(\overline{F_+})$.

Soit α un cardinal avec $\aleph_0 < \alpha \leq \dim H$. Soient M et N deux sous-espaces fermés de H tels que

$$\dim M = \alpha, \quad \dim N = \dim H, \quad M \oplus N = H.$$

Soient aussi M' et N' deux sous-espaces fermés de H tels que

$$\dim M' = \aleph_0, \quad \dim N' = \dim H, \quad M' \oplus N' = H.$$

Soit $U : N \to N'$ une isométrie surjective et définissons $T_\alpha \in B(H)$ comme suit : $T_\alpha = U$ sur N et $T_\alpha = 0$ sur M. Alors, $\dim N(T_\alpha) = \dim M = \alpha$, d'où $m_e(T_\alpha) = 0$. Puisque $R(T_\alpha) = N'$ est un fermé, il s'ensuit que $\dim N(T_\alpha^*) = \dim R(T_\alpha)^\perp = \dim N'^\perp = \dim M' = \aleph_0$. Donc $m_e(T_\alpha^*) = 0$. Par conséquent,

$$(1) \qquad m_e(T_\alpha) = m_e(T_\alpha^*) = 0 \quad (\Leftrightarrow T_\alpha \notin F).$$

D'autre part, il est clair que $\gamma(T_\alpha) = 1$, d'où $1 = \gamma(T_\alpha) = \inf\{\sigma(|T_\alpha|) \setminus \{0\}\}$ (voir Préliminaires). Ceci prouve que 0 est un point isolé de $\sigma(|T_\alpha|)$. D'où il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0, \varepsilon[$,

$$E_{T_\alpha}([0,\lambda[)H = N(|T_\alpha|) = N(T_\alpha) \quad \text{et} \quad E^*_{T_\alpha}([0,\lambda[)H = N(|T_\alpha^*|) = N(T_\alpha^*).$$

Par conséquent,

$$\operatorname{ess\,nul} T_\alpha = \dim N(T_\alpha) = \alpha \quad \text{et} \quad \operatorname{ess\,def} T_\alpha = \dim N(T_\alpha^*) = \aleph_0.$$

Donc $\tau(T_\alpha^*) \geq \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ et $\tau(T_\alpha) = 0$. Ceci implique que $T_\alpha^* \notin \Lambda$ et par conséquent, d'après le Corollaire 4.3, $T_\alpha^* \notin \partial(\mathcal{F})$.

D'autre part, comme $\operatorname{ind}(T_\alpha^*) = -\alpha$ et en utilisant le Théorème 3.13, on en déduit que $T_\alpha^* \in \overline{F_+}$. D'où en tenant compte de (1), on conclut que $T_\alpha^* \in \partial(F_+)$. Il en résulte que $\Lambda = \partial(\mathcal{F}) \neq \partial(F_+)$.

Montrons maintenant que $T_\alpha^* \in \operatorname{int}(\overline{F_+})$. Tout d'abord, d'après [26, Théorème 4.2.4], on constate que $m_\alpha(T_\alpha^*) > 0$. D'autre part, par [26, Théorème 4.2.5], on a

$$\operatorname{ind}(L) = \operatorname{ind}_\alpha(L) = \operatorname{ind}_\alpha(T_\alpha^*) = -\alpha, \quad \forall L \in \mathcal{B}(T_\alpha^*, m_\alpha(T_\alpha^*)).$$

Par le Théorème 3.13, on obtient $\mathcal{B}(T_\alpha^*, m_\alpha(T_\alpha^*)) \subseteq \overline{F_+}$. Par conséquent, $T_\alpha^* \notin \partial(\overline{F_+})$. Il en résulte que $\partial(\overline{F_+}) \subsetneq \partial(F_+)$.

(ii) D'abord, par le Corollaire 3.11 on conclut que $\Lambda \subseteq \overline{F^\alpha}$. Or, $\Lambda \cap F^\alpha = \emptyset$, par suite $\Lambda \subseteq \partial(F^\alpha)$ (car F^α est un ouvert). D'autre part, soit T_α l'opérateur défini dans (i). Puisque $\operatorname{ind}(T_\alpha) = \alpha$, et en tenant compte du Corollaire 3.11, il s'ensuit que $T_\alpha \in \overline{F^\alpha}$. Or, d'après (1), T_α n'est pas semi-Fredholm, par suite $T_\alpha \in \partial(F^\alpha)$. Finalement, comme $\mu(T_\alpha) = \tau(T_\alpha^*) > 0$, on en déduit que $T_\alpha \notin \Lambda$. Ceci prouve que $\Lambda \subsetneq \partial(F^\alpha)$.

Enfin, pour voir que $\Lambda \subsetneq \partial(F^{-\alpha})$, il suffit de remarquer que $\Lambda \subseteq \partial(F^{-\alpha})$, $T_\alpha^* \notin \Lambda$ et $T_\alpha^* \in \partial(F^{-\alpha})$.

(iii) Soient T_α et $T_\beta \in B(H)$ définis comme dans (i). Puisque $\operatorname{ind}(T_\alpha) = \alpha$ (resp. $\operatorname{ind}(T_\beta) = \beta$), par le Corollaire 3.11, on conclut que $T_\alpha \in \overline{F^\alpha}$ (resp. $T_\beta \in \overline{F^\beta}$). Or d'après (1), T_α et T_β ne sont pas semi-Fredholm, par suite $T_\alpha \in \partial(F^\alpha)$ (resp. $T_\beta \in \partial(F^\beta)$).

Par ailleurs, d'après le Corollaire 3.11, on a

$$\operatorname{dist}(T_\alpha, F^\beta) = \max\{m_\beta(T_\alpha), m_\beta(T_\alpha^*)\} \geq \tau(T_\alpha^*) > 0$$

et

$$\operatorname{dist}(T_\beta, F^\alpha) = \mu(T_\beta) = \tau(T_\beta^*) > 0.$$

Il en résulte que $T_\alpha \notin \partial(F^\beta)$ et $T_\beta \notin \partial(F^\alpha)$. Ceci prouve que $\partial(F^\alpha) \not\subset \partial(F^\beta)$ et $\partial(F^\beta) \not\subset \partial(F^\alpha)$. ∎

On montre de la même manière le corollaire suivant.

Corollaire 4.5. *Pour α et β tels que $\aleph_0 < \alpha < \beta \le \dim H$, on a*

$$\partial(F^\alpha) \not\subset \partial(F^{-\beta}), \quad \partial(F^{-\beta}) \not\subset \partial(F^\alpha),$$
$$\partial(F^{-\alpha}) \not\subset \partial(F^{\beta}), \quad \partial(F^{\beta}) \not\subset \partial(F^{-\alpha}),$$
$$\partial(F^{-\alpha}) \not\subset \partial(F^{-\beta}), \quad \partial(F^{-\beta}) \not\subset \partial(F^{-\alpha}).$$

Remerciements. Je tiens à remercier L. Burlando pour les discussions concernant les cardinaux $\aleph_0$-réguliers.

Références

[1] C. Apostol, *The reduced minimum modulus*, Michigan Math. J. 32 (1985), 279–294.
[2] R. H. Bouldin, *The essential minimum modulus*, Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), 513–517.
[3] —, *Closure of invertible operators on a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. 108 (1990), 721–726.
[4] —, *Distance to invertible operators without separability*, ibid. 116 (1992), 489–497.
[5] —, *Approximating Fredholm operators on a nonseparable Hilbert space*, Glasgow Math. J. 35 (1993), 167–178.
[6] —, *Generalization of semi-Fredholm operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 3757–3763.
[7] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique. Livre I. Théorie des ensembles. Chapitre* 3, *Ensembles ordonnés cardinaux, nombres entiers*, Hermann, Paris, 1967.
[8] L. Burlando, *Distance formulas on operators whose kernel has fixed Hilbert dimension*, Rend. Mat. 10 (1990), 209–238.
[9] L. A. Coburn and A. Lebow, *Components of invertible elements in quotient algebras of operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 359–365.
[10] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd ed., Springer, New York, 1990.
[11] G. Edgar, D. Ernest and S. G. Lee, *Weighing operator spectra*, Indiana Univ. Math. J. 21 (1971), 61–80.
[12] D. Ernest, *Operators with α-closed range*, Tôhoku Math. J. 24 (1972), 45–49.
[13] P. A. Fillmore, J. G. Stampfli and J. P. Williams, *On the essential numerical range, the essential spectrum, and a problem of Halmos*, Acta Sci. Math. (Szeged) 33 (1972), 179–192.
[14] S. Goldberg, *Unbounded Linear Operators*, McGraw-Hill, New York, 1966.
[15] B. Gramsch, *Eine idealstruktur Banachscher Operatoralgebren*, J. Reine Angew. Math. 225 (1967), 97–115.
[16] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, D. Van Nostrand, 1967.

[17] R. E. Harte and M. Mbekhta, *On generalized inverses in C^*-algebras*, Studia Math. 103 (1992), 71–77.
[18] —, —, *Generalized inverses in C^*-algebras II*, ibid. 106 (1993), 129–138.
[19] D. A. Herrero, *Approximation of Hilbert Space Operators*, Vol. I, Pitman, Boston, 1982.
[20] S. Izumino and Y. Kato, *The closure of invertible operators on a Hilbert space*, Acta Sci. Math. (Szeged) 49 (1985), 321–327.
[21] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin, 1966.
[22] —, *Perturbation theory for nullity, deficiency, and other quantities of linear operators*, J. Anal. Math. 6 (1958), 261–322.
[23] E. Luft, *The two-sided closed ideals of the algebra of bounded linear operators of Hilbert space*, Czechoslovak Math. J. 18 (1968), 595–605.
[24] M. Mbekhta, *Conorme et inverse généralisé dans les C^*-algèbres*, Canad. Math. Bull. 35 (1992), 515–522.
[25] H. Skhiri, *On the topological boundary of semi-Fredholm operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 1381–1389.
[26] —, *Opérateurs semi-Fredholm : structures et approximations*, Thèse de doctorat, Université de Lille 1, 1997.
[27] A. Ströh, *Regular liftings in C^*-algebras*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 42 (1994), 1–7.
[28] P. Y. Wu, *Approximation by invertible and noninvertible operators*, J. Approx. Theory 56 (1989), 267–276.

Bâtiment de Mathématiques M2
Université des Sciences et Technologies de Lille
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail: skhiri@gat.univ-lille1.fr

Received May 21, 1998 (4108)
Revised version December 7, 1998 and February 8, 1999