STUDIA MATHEMATICA 136 (1) (1999)

Sur la division et la composition dans des classes ultradifférentiables

par

JACQUES CHAUMAT (Orsay) et ANNE-MARIE CHOLLET (Lille)

Abstract. We generalize to some classes of ultradifferentiable jets or functions the classical Łojasiewicz Division Theorem and Glaeser Composition Theorem. The proof uses the desingularization results by Hironaka, Bierstone and Milman.

Introduction. On donne des généralisations à des classes de fonctions ou de jets ultradifférentiables des théorèmes classiques de division de Łojasiewicz [9] et de composition de Glaeser [7]. On montre, par exemple, qu'ils sont vrais pour l'intersection des classes de Gevrey alors qu'ils sont faux pour une classe de Gevrey "individuelle". Ce travail peut être considéré comme une suite de l'étude commencée dans [6].

Les preuves utilisent de manière cruciale des résultats de désingularisation [3], [4], [8]. On rappelle que M. F. Atiyah [1] et, indépendamment, I. N. Bernstein et S. I. Gelfand [2] ont, les premiers, utilisé le théorème d'Hironaka [8] dans ce contexte pour donner une preuve rapide et élégante du théorème de Łojasiewicz précité. Cette idée a été exploitée ultérieurement et en particulier par L. P. Bos et P. D. Milman dans [5] où figurent aussi des résultats "Gevrey" moins précis que ceux obtenus ici.

On peut remarquer que, contrairement aux preuves données dans les ouvrages de B. Malgrange [10] et de J. C. Tougeron [12], on n'utilise pas de résultats d'extension de jets de type "Whitney"; ainsi, les théorèmes obtenus subsistent pour des intersections de classes quasi-analytiques.

Comme cela apparaît déjà dans l'article de Glaeser [7], les résultats de composition présentés ici sont des conséquences de résultats de division. On commence donc par établir la proposition II.6 (division : cas réduit). On en déduit alors la proposition III.8 (composition : cas réduit); dans cette étape, les lemmes III.2 et III.4 jouent un rôle central. En suite, par désingularisation, on obtient le théorème IV.3 (composition : cas d'une bi-

1991 *Mathematics Subject Classification*: 26E10, 46E25, 46H10, 32B05.

jection “générique”) et le théorème IV.4 (division : cas général). Enfin, on établit le théorème IV.5 (composition : cas d’une submersion “générique”).

I. Définitions, notations et rappels

1. NOTATIONS. Soit $J = (j_1, \ldots, j_n)$ un multi-indice dans $\mathbb{N}^n$. On note $|J| = j = j_1 + \ldots + j_n$ la longueur de J et $J! = j_1! \ldots j_n!$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on pose $x^J = x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}$ et on note $|x|$ la norme euclidienne de x.

2. *Jets et fonctions.* Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Un *jet* F sur E est la donnée d’une suite $\{F^J(\zeta) : \zeta \in E,\ J \in \mathbb{N}^n\}$ de fonctions continues sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour un multi-indice L de longueur l de $\mathbb{N}^n$, on définit la L-ième dérivée du jet F par

$$D^L F = \frac{\partial^l F}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}} = \{F^{J+L}(\zeta) : \zeta \in E,\ J \in \mathbb{N}^n\}. \tag{2.1}$$

Si F et G sont deux jets sur E, on rappelle que le *jet produit* FG est défini par

$$\left\{(FG)^J(\zeta) = \sum_{K:K\le J} \frac{J!}{K!(J-K)!} F^K(\zeta) G^{J-K}(\zeta) : \zeta \in E,\ J \in \mathbb{N}^n\right\}. \tag{2.2}$$

Soit F un jet sur E. Pour tout ζ de E et tout entier p, on définit le *polynôme de Taylor* de F, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, par

$$T_\zeta^p F(x) = \sum_{J:|J|\le p} \frac{1}{J!}(x-\zeta)^J F^J(\zeta). \tag{2.3}$$

De même, pour tout entier p, pour tout multi-indice J avec $j \le p$, et tout (ζ, x) de $E \times E$, on définit le *reste dans la formule de Taylor* par

$$R_\zeta^{J,p} F(x) = F^J(x) - \sum_{K:|J+K|\le p} \frac{1}{K!}(x-\zeta)^K F^{J+K}(\zeta). \tag{2.4}$$

On rappelle qu’un jet F est un *jet de Whitney* sur E *de classe* C^∞ et, on note $F \in C^\infty(E)$, si on a, pour tout entier p et pour tout multi-indice J avec $j \le p$,

$$R_\zeta^{J,p} F(x) = o(|\zeta - x|^{p-j})$$

lorsque $|\zeta - x|$ tend vers 0 avec (ζ, x) dans $E \times E$.

Si f désigne une fonction de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^n$, on note, pour tout multi-indice L de longueur l et tout x de $\mathbb{R}^n$,

$$D^L f(x) = \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}}(x).$$

On sait, d’après le théorème d’extension de Whitney [10], [12], que, pour tout jet F de $C^\infty(E)$, il existe une fonction f de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^n$, à support compact, telle que, pour tout multi-indice L de $\mathbb{N}^n$ et tout ζ de E, on ait

$$F^L(\zeta) = D^L f(\zeta).$$

3. *Propriétés des suites.* Soit $M = (M_p)_{p\ge 0}$ une suite croissante de nombres réels strictement positifs vérifiant les deux conditions suivantes :

(H_1) M est logarithmiquement convexe,

(H_2) $M_p^{1/p}$ tend vers l’infini avec p.

On introduit la condition de régularité suivante : il existe une constante $A \ge 1$ telle que, pour tout entier p et tout entier q, on ait

(H_3) $M_{p+q} \le A^{p+q} M_p M_q$.

On note, pour tout réel $C \ge 1$ et pour toute application strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $(CM)^\varphi$ la suite définie par $((CM)^\varphi)_p = C^{\varphi(p)} M_{\varphi(p)}$ pour tout p entier. On note aussi (CM) la suite définie par $((CM))_p = C^p M_p$ pour tout entier p. Clairement, si la suite M vérifie une condition (H_i), la suite $(CM)^\varphi$ vérifie la même condition.

REMARQUE. Si M est une suite croissante de nombres réels strictement positifs, si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et si C_1 et C_2 sont deux réels supérieurs à 1, on a, pour tout entier p,

$$\begin{aligned} ((C_2(C_1M)^{\varphi_1})^{\varphi_2})_p &= C_2^{\varphi_2(p)} C_1^{\varphi_1(\varphi_2(p))} M_{\varphi_1(\varphi_2(p))} \\ &\le (C_2C_1)^{\varphi_1(\varphi_2(p))} M_{\varphi_1(\varphi_2(p))}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

On note, pour a un réel strictement positif, M^a la suite définie par $(M^a)_p = M_p^a$ pour tout entier p. Bien sûr, si la suite M vérifie une condition (H_i), la suite M^a vérifie la même condition.

On note h_M la fonction définie, pour tout $r > 0$, par

$$h_M(r) = \inf_{p\ge 0}(r^p M_p).$$

LEMME. *Soit M une suite vérifiant (H_1), (H_2) et (H_3). Soit a un réel strictement positif. Soit φ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ de la forme $\varphi(p) = ep + e'$ avec e et e' entiers, $e > 0$. Soit $C \ge 1$. On a, pour tout entier p,*

$$((CM^a)^\varphi)_p \le (C^{e'/a} A^{e'} M_{e'} h_M^{-1}(C^{-e/a} A^{-(q+1)2^q}))^a M_p^{(2^q+1)a}. \tag{3.2}$$

Ici q est l’entier tel que $2^q > e \ge 2^{q-1}$.

Preuve. En utilisant (H_3), on a, pour tout p,

$$M_{2^q p} \le A^{pq2^q} (M_p)^{2^q}; \tag{3.3}$$

de là, en utilisant (H_3) et la croissance de la suite M, on a, pour tout p,

$$M_{\varphi(p)} \le M_{2^q p+e'} \le A^{e'} M_{e'} A^{p(q+1)2^q} (M_p)^{2^q}. \tag{3.4}$$

On a, par définition, pour tout p,

$$(C^{-e/a} A^{-(q+1)2^q})^p M_p \ge h_M(C^{-e/a} A^{-(q+1)2^q}). \tag{3.5}$$

On déduit de là le résultat annoncé.

4. *Classes ultradifférentiables.* Soit $\{M_p\}_{p\ge 0}$ une suite vérifiant (H_1) et (H_2). Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction f de classe C^∞ sur $\mathcal{O}$ appartient à la classe $(M, \mathcal{O})$ si

$$\sup_{x\in\mathcal{O},\, |P|=p} \frac{|D^P f(x)|}{p! M_p} = \|f\|_{(M,\mathcal{O})} < \infty. \tag{4.1}$$

La classe $(M, \mathcal{O})$ est un espace de Banach et la classe de Carleman usuelle $C\{M, \mathcal{O}\}$ est la réunion croissante lorsque C tend vers l'infini de $((CM), \mathcal{O})$.

Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Un jet F sur E est un *jet de Whitney de classe* (M, E) s'il existe une constante $A_1 \ge 0$ telle que pour tout entier j, tout multi-indice J de longueur j et tout x de E, on ait

$$|F^J(x)| \le A_1 j! M_j, \tag{4.2}$$

et pour tout entier m, tout multi-indice J de longueur $j \le m$ et tout (ζ, x) de $E \times E$, on ait

$$|(R_\zeta^{J,m} F)(x)| \le A_1 j! M_{m+1} |x - \zeta|^{m+1-j}. \tag{4.3}$$

Bien sûr, la meilleure constante A_1 dans (4.2) et (4.3) définit une norme notée $\|F\|_{(M,E)}$ sur (M, E) et cet espace devient alors un espace de Banach.

On vérifie aisément que, si F et G sont deux jets sur E appartenant à (M, E), le produit FG est un jet sur E appartenant à $((2nM), E)$, et que l'on a

$$\|FG\|_{((2nM),E)} \le \|F\|_{(M,E)} \|G\|_{(M,E)}. \tag{4.4}$$

On note

$$\widehat{M}(\mathcal{O}) = \bigcap_{a>0} (M^a, \mathcal{O}) \quad \text{et} \quad J\widehat{M}(E) = \bigcap_{a>0} (M^a, E). \tag{4.5}$$

Ces deux espaces sont des algèbres de Fréchet.

5. *Jets et fonctions sur des cubes.* Soit n un entier strictement positif et soient I^+, I^- et I^0 trois parties de $\{1, \ldots, n\}$ éventuellement vides formant une partition de $\{1, \ldots, n\}$. On note I une telle partition de $\{1, \ldots, n\}$. On pose $Q(I^+, I^-, I^0, n) = Q(I, n)$ le sous-cube compact de $\mathbb{R}^n$ défini par $x = (x_1, \ldots, x_n) \in Q(I^+, I^-, I^0, n)$ si et seulement si $0 \le x_i \le 1$ pour tout $i \in I^+$, $-1 \le x_i \le 0$ pour tout $i \in I^-$, et $x_i = 0$ pour tout $i \in I^0$.

Si $I^+ \cup I^- = \emptyset$, on a $Q(I, n) = \{0\}$ et un jet F de $(M, Q(I, n))$ est simplement une famille de nombres complexes $\{F^P : P \in \mathbb{N}^n\}$ satisfaisant l'égalité

$$\sup_{|P|=p} \frac{|F^P|}{p! M_p} = \|F\|_{(M,\{0\})} < \infty. \tag{5.1}$$

Si $I^+ = \{1, \ldots, n\}$, on a $Q(I, n) = [0,1]^n$, et alors à un jet F de $(M, Q(I, n))$ est associée la fonction $F^{(0,\ldots,0)} = f$ de classe C^∞ sur $Q(I, n)$; si on pose

$$\sup_{x\in Q(I,n),\, |P|=p} \frac{|D^P f(x)|}{p! M_p} = \|f\|_{\{M,Q(I,n)\}}, \tag{5.2}$$

on a

$$\|f\|_{\{M,Q(I,n)\}} \le \|F\|_{(M,Q(I,n))} < \infty. \tag{5.3}$$

Réciproquement, on considère une fonction f de classe C^∞ sur $Q(I, n)$ satisfaisant l'inégalité $\|f\|_{\{M,Q(I,n)\}} < \infty$; on montre aisément, en utilisant la formule de Taylor, que le jet $F = \{F^P(x) = D^P f(x) : x \in Q(I, n),\ P \in \mathbb{N}^n\}$ appartient à $((2nM), Q(I, n))$ et que l'on a

$$\|F\|_{((2nM),Q(I,n))} \le \|f\|_{\{M,Q(I,n)\}}. \tag{5.4}$$

On suppose maintenant $\emptyset \subsetneq I^+ \subsetneq \{1, \ldots, n\}$ et $I^- = \emptyset$.

On écrit $x = (u, v)$ avec $u = (x_i, i \in I^+)$ et $v = (x_i, i \notin I^+)$; on associe, de même, à un multi-indice P de $\mathbb{N}^n$ son écriture sous la forme $P = (Q, R)$ avec $Q \in \mathbb{N}^\iota$ et $R \in \mathbb{N}^{n-\iota}$, où ι désigne le cardinal de I^+. A un jet F de $(M, Q(I, n))$ on associe une famille $f = \{f^R(u) = F^{(0,R)}((u, 0)) : u \in [0,1]^\iota,\ R \in \mathbb{N}^{n-\iota}\}$ de fonctions de classe C^∞ sur $[0,1]^\iota$; si on note

$$\sup_{y\in[0,1]^\iota,\, |(Q,R)|=p} \frac{|D^Q f^R(y)|}{p! M_p} = \|f\|_{\{M,[0,1]^\iota\}}, \tag{5.5}$$

on a

$$\|f\|_{\{M,[0,1]^\iota\}} \le \|F\|_{(M,Q(I,n))} < \infty. \tag{5.6}$$

Réciproquement, si $f = \{f^R(u) : u \in [0,1]^\iota,\ R \in \mathbb{N}^{n-\iota}\}$ est une famille de fonctions de classe C^∞ sur $[0,1]^\iota$ vérifiant $\|f\|_{\{M,[0,1]^\iota\}} < \infty$, alors le jet $F = \{F^P(x) = D^Q f^R(u) : x = (u, v) \in Q(I, n),\ P = (Q, R) \in \mathbb{N}^n\}$ appartient à $((2nM), Q(I, n))$ et on a encore l'inégalité

$$\|F\|_{((2nM),Q(I,n))} \le \|f\|_{\{M,[0,1]^\iota\}}. \tag{5.7}$$

Bien sûr, lorsque $I^- \ne \emptyset$, on a une description analogue pour tous les espaces de jets $(M, Q(I, n))$.

II. Division : "version réduite"

1. Lemme. *Soit f une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle $[0,1]$. Soit g une fonction continue sur $[0,1]$. Soit k un entier, $k>0$. On suppose que, pour tout x de $[0,1]$, on ait*

$$x^k g(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Alors g est de classe C^∞ sur $[0,1]$ et on a, pour tout entier p,

$$\sup_{x\in[0,1]} |g^{(p)}(x)| \le \frac{p!}{(k+p)!} \sup_{x\in[0,1]} |f^{(k+p)}(x)|. \tag{1.2}$$

Preuve. La formule de Taylor avec reste intégral fournit l'écriture suivante pour la fonction g et tout x de $[0,1]$:

$$g(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 f^{(k)}(xt)(1-t)^{k-1}\,dt. \tag{1.3}$$

En dérivant p fois par rapport à x, il vient

$$g^{(p)}(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 f^{(k+p)}(xt)t^p(1-t)^{k-1}\,dt. \tag{1.4}$$

On déduit de là que

$$\begin{aligned}|g^{(p)}(x)| &\le \frac{1}{(k-1)!}\sup_{t\in[-1,1]}|f^{(k+p)}(t)|\int_0^1 t^p(1-t)^{k-1}\,dt \\ &\le \frac{p!}{(k+p)!}\sup_{t\in[0,1]}|f^{(k+p)}(t)|.\end{aligned} \tag{1.5}$$

2. Lemme. *Soit I une partition de $\{1,\ldots,n\}$ telle que I^0 ne contienne pas 1. Soit M une suite croissante de nombres réels satisfaisant (H_1) et (H_2). Soit ω un entier strictement positif et soit G un jet sur $Q(I,n)$ tel que le jet $x_1^\omega G$ appartienne à $(M,Q(I,n))$. Alors le jet G appartient à $((4nM)^\varphi,Q(I,n))$ avec $\varphi(p)=p+\omega$, et on a*

$$\|G\|_{((4nM)^\varphi,Q(I,n))} \le \|x_1^\omega G\|_{(M,Q(I,n))}. \tag{2.1}$$

Preuve. On suppose que $I^-=\emptyset$ (ceci n'est pas une restriction, seulement une commodité pour la rédaction de la preuve). On note F le jet $x_1^\omega G$. On associe à F, en reprenant les notations du paragraphe I.5, la famille de fonctions $f=\{f^R(u): u\in[0,1]^\iota,\ R\in\mathbb{N}^{n-\iota}\}$; bien sûr, pour chaque multi-indice R de $\mathbb{N}^{n-\iota}$, on a $f^R(u)=x_1^\omega G^{(0,R)}((u,0))=x_1^\omega g^R(u)$ et les fonctions g^R sont continues. On peut donc appliquer le lemme 1 et on obtient

$$\sup_{u\in[0,1]^\iota}|D^{(q_1,q_2,\ldots,q_\iota)}g^R(u)| \le \frac{q_1!}{(\omega+q_1)!}\sup_{u\in[0,1]^\iota}|D^{(q_1+\omega,q_2,\ldots,q_\iota)}f^R(u)|. \tag{2.2}$$

On tire de là que

$$\|g\|_{\{(2M)^\varphi,[0,1]^\iota\}} \le \|f\|_{\{M,[0,1]^\iota\}}, \tag{2.3}$$

avec $\varphi(p)=p+\omega$, pour tout entier p. On utilise alors les inégalités I.(5.6) et I.(5.7) pour conclure.

3. Lemme. *Soit I une partition de $\{1,\ldots,n\}$ telle que I^0 contienne 1. Soit M une suite croissante de nombres réels satisfaisant (H_1) et (H_2). Soit ω un entier strictement positif et soit G un jet sur $Q(I,n)$ tel que le jet $x_1^\omega G$ appartienne à $(M,Q(I,n))$. Alors le jet G appartient à $((2M)^\varphi,Q(I,n))$ avec $\varphi(p)=p+\omega$, et on a*

$$\|G\|_{((2M)^\varphi,Q(I,n))} \le \|x_1^\omega G\|_{(M,Q(I,n))}. \tag{3.1}$$

Preuve. On suppose encore que $I^-=\emptyset$. On remarque que l'hypothèse sur I implique que $Q(I,n)$ est inclus dans $\Delta_1=\{x\in\mathbb{R}^n : x_1=0\}$. Soit K un multi-indice de $\mathbb{N}^n$, $K=(k_1,\ldots,k_n)$; la définition du produit de deux jets donne sur $Q(I,n)$

$$(x_1^\omega G)^K = \begin{cases} 0 & \text{si } k_1<\omega,\\ \dfrac{k_1!}{(k_1-\omega)!}G^{(k_1-\omega,k_2,\ldots,k_n)} & \text{si } k_1\ge\omega.\end{cases} \tag{3.2}$$

On peut réécrire ces formules sous la forme suivante :

$$G^J = \frac{(x_1^\omega G)^{J+(\omega,0,\ldots,0)}}{(j_1+1)\ldots(j_1+\omega)}, \tag{3.3}$$

pour tout multi-indice $J=(j_1,\ldots,j_n)$ de $\mathbb{N}^n$. On déduit de là

$$|G^J(x)| \le \frac{(j+\omega)!}{(j_1+1)\ldots(j_1+\omega)}M_{j+\omega}\|x_1^\omega G\|_{(M,Q(I,n))}. \tag{3.4}$$

Puisque l'on a

$$\frac{(j+\omega)!}{(j_1+1)\ldots(j_1+\omega)} \le \frac{(j+\omega)!}{\omega!} \le 2^{j+\omega}j!, \tag{3.5}$$

on a

$$|G^J(x)| \le j!2^{j+\omega}M_{j+\omega}\|x_1^\omega G\|_{(M,Q(I,n))}. \tag{3.6}$$

On considère maintenant un reste dans la formule de Taylor :

$$R_\zeta^{J,p}G(x) = G^J(x) - \sum_{K:|J+K|\le p}\frac{1}{K!}(x-\zeta)^K G^{J+K}(\zeta). \tag{3.7}$$

Ici on a $j=|J|\le p$ et x et ζ dans $Q(I,n)$, donc dans Δ_1. Cela signifie que, dans (3.7), si $K=\{k_1,\ldots,k_n\}$ avec $k_1\ne0$, on a $(x-\zeta)^K=0$; ainsi, les seuls termes non nuls proviennent de $k_1=0$. Il vient alors, en utilisant (3.3),

$$(3.8)\qquad R_\zeta^{J,p}G(x) = \frac{(x_1^\omega G)^{J+(\omega,0,\dots,0)}(x)}{(j_1+1)\dots(j_1+\omega)} - \sum_{K\,:\,|J+K|\le p,\,k_1=0} \frac{1}{K!}(x-\zeta)^K \frac{(x_1^\omega G)^{J+(\omega,k_2,\dots,k_n)}(\zeta)}{(j_1+1)\dots(j_1+\omega)}$$
$$= \frac{1}{(j_1+1)\dots(j_1+\omega)} R_\zeta^{J+(\omega,0,\dots,0),p+\omega}(x_1^\omega G)(x).$$

On obtient donc, puisque $x_1^\omega G$ appartient à $(M, Q(I,n))$,

$$(3.9)\qquad |R_\zeta^{J,p}G(x)| \le j!(2)^{p+\omega+1} M_{p+\omega+1}|x-\zeta|^{p+\omega+1-(j+\omega)}\|x_1^\omega G\|_{(M,Q(I,n))}.$$

Ceci achève la preuve du lemme.

4. LEMME. *Soit E un compact de $\mathbb{R}^n$ et M une suite satisfaisant (H_1) et (H_2). Soit a une fonction réelle-analytique sur E et G un jet sur E appartenant à (M,E). Il existe une constante $C(a)$, ne dépendant que de a, telle que, pour tout entier j non nul, on ait*

$$(4.1)\qquad \|a^j G\|_{((2nM),E)} \le h_M^{-1}(1/C(a))C(a)^j \|G\|_{(M,E)}.$$

Preuve. On considère un prolongement holomorphe de a à un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ contenant E. On note encore a ce prolongement. En utilisant la formule de Cauchy, on obtient qu'il existe une constante $C(a)$ telle que l'on ait

$$(4.2)\qquad \left|\frac{\partial^k(a^j)}{\partial z^K}(x)\right| \le k!C(a)^{k+j}$$

pour tout x de E, tout entier j non nul et tout multi-indice K de $\mathbb{N}^n$ de longueur k, et

$$(4.3)\qquad |R_\zeta^{K,p}(a^j)(x)| \le k!C(a)^{p+j+1}|x-\zeta|^{p+1-k}$$

pour tout x et tout ζ de E, tous entiers j et p non nuls et tout multi-indice K de longueur k vérifiant $k \le p$.

De là, en utilisant la définition de la fonction h_M, on obtient

$$(4.4)\qquad \|a^j\|_{(M,E)} \le h_M^{-1}(1/C(a))C(a)^j.$$

On conclut alors la preuve en utilisant l'inégalité I.(4.4) sur le produit de deux jets.

5. LEMME. *Soient E_1 et E_2 deux sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$. On suppose que, ou bien $E_1 \cap E_2$ est vide, ou bien il existe une constante c_1, $0 < c_1 \le 1$, et un ouvert borné U de $\mathbb{R}^n$ contenant $E_1 \cup E_2$ tels que, pour tout x de U, on ait*

$$(5.1)\qquad d(x,E_1) + d(x,E_2) \ge c_1 d(x, E_1\cap E_2).$$

Soit M une suite satisfaisant (H_1) et (H_2), F_1 un jet de (M,E_1) et F_2 un jet de (M,E_2) dont les restrictions à $E_1\cap E_2$ coïncident. Alors le jet F sur $E_1\cup E_2$ dont la restriction à E_1 est F_1 et la restriction à E_2 est F_2 appartient à $((C_1M), E_1\cup E_2)$ et on a

$$(5.2)\qquad \|F\|_{((C_1M),E_1\cup E_2)} \le \|F_1\|_{(M,E_1)} + \|F_2\|_{(M,E_2)}.$$

Ici la constante $C_1 \ge 1$ ne dépend que de c_1 et de la dimension n.

Preuve. Bien évidemment, la seule difficulté est l'estimation des restes dans la formule de Taylor lorsque l'intersection de E_1 et E_2 n'est pas vide et lorsque s est un entier, L un multi-indice de $\mathbb{N}^n$ vérifiant $l \le s$, ζ un point de E_1 et y un point de E_2. On peut écrire, suivant une formule classique, si z est un point arbitraire de $E_1\cap E_2$,

$$(5.3)\qquad R_\zeta^{L,s}F(y) = R_z^{L,s}F(y) + \sum_{K\,:\,k\le s-l}\frac{(y-\zeta)^K}{K!}R_z^{K+L,s}F(\zeta).$$

Compte tenu de la définition de F et de l'appartenance de F_2 à (M,E_2), la formule (5.3) conduit à la majoration

$$(5.4)\qquad |R_\zeta^{L,s}F(y)| \le \{\|F_2\|_{(M,E_2)} + \|F_1\|_{(M,E_1)}\}M_{s+1} \times\Big(l!|y-z|^{s+1-l} + \sum_{K\,:\,k\le s-l}\frac{|y-\zeta|^k}{K!}(k+l)!|\zeta-z|^{s+1-(k+l)}\Big).$$

On choisit pour z un point de $E_1\cap E_2$ vérifiant

$$(5.5)\qquad d(\zeta, E_1\cap E_2) = |\zeta - z|;$$

on en déduit, d'après (5.1),

$$(5.6)\qquad |\zeta - z| \le c_1^{-1}d(\zeta,E_2) \le c_1^{-1}|\zeta - y|.$$

On utilise alors l'égalité suivante :

$$(5.7)\qquad \sum_{K\,:\,k\le j}\frac{k!}{K!} = \sum_{k\le j} n^k = \frac{n^{j+1}-1}{n-1}.$$

On obtient

$$(5.8)\qquad |R_\zeta^{L,s}F(y)| \le \{\|F_2\|_{(M,E_2)} + \|F_1\|_{(M,E_1)}\}M_{s+1} \times l!(|z-y|^{s+1-l} + |y-\zeta|^{s+1-l}2^s(c_1^{-1}n)^{s+1-l}).$$

Ceci, compte tenu de (5.6), donne le résultat annoncé.

On déduit immédiatement des lemmes précédents la proposition suivante qui est une version réduite du théorème de division de Łojasiewicz [9] pour des classes ultradifférentiables.

6. PROPOSITION. *Soit I_s, $1 \le s \le t$, une famille de partitions de $\{1,\ldots,n\}$ et $E = \bigcup_{1\le s\le t} Q(I_s,n)$. Soit M une suite croissante de nombres réels satisfaisant (H_1) et (H_2). Soit Ω un multi-indice de $\mathbb{N}^n$ de longueur ω, j un entier et a une fonction réelle-analytique ne s'annulant pas sur E. Soit G un jet sur E tel que le jet $a^j x^\Omega G$ appartienne à (M,E). Alors le jet G appartient à $((C_2M)^\varphi, E)$ avec $\varphi(p) = p+\omega$, et on a*

$$(6.1)\qquad \|G\|_{((C_2M)^\varphi,E)} \le C_2^j \|a^j x^\Omega G\|_{(M,E)}.$$

La constante $C_2 \ge 1$ ne dépend que de E et de a.

III. Composition de jets : "cas réduit"

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ et α un réel strictement positif. On note $\alpha A + a = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha y + a,\ y \in A\}$ et aussi $\alpha A + 0 = \alpha A$.

Si $F = (F_1,\ldots,F_n)$ est une application réelle-analytique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie dans un pavé $P(0,r_0) = r_0]-1,1[^n$ de $\mathbb{R}^n$ et si g est une fonction de classe C^∞ au voisinage de $F(0)$, on peut écrire, pour tout multi-indice L de $\mathbb{N}^n$ de longueur $l \ge 1$, dans un voisinage de 0,

$$(1.1)\qquad \frac{\partial^l}{\partial u^L}(g\circ F)(x) = \sum_{K\in\mathbb{N}^n\,:\,1\le|K|=k\le l} A_{K,L}(x)\frac{\partial^k}{\partial z^K}(g)\circ F(x),$$

où les fonctions $A_{K,L}$ sont réelles-analytiques dans $P(0,r_0)$.

Bien sûr, si E est un compact dans le pavé $P(0,r_0)$ et si G est un jet sur $F(E)$, alors $G\circ F$ est un jet sur E et on a

$$(1.2)\qquad (G\circ F)^L(x) = \sum_{K\in\mathbb{N}^n\,:\,1\le|K|\le l} A_{K,L}(x)(G^K\circ F)(x).$$

On a donc aussi pour le jet dérivé $D^L(G\circ F)$

$$(1.3)\qquad D^L(G\circ F) = \sum_{K\in\mathbb{N}^n\,:\,1\le|K|\le l} A_{K,L}(D^KG)\circ F$$

au sens des jets sur E.

De plus, on a le lemme suivant qui se démontre par récurrence comme dans [11, proposition 2.5].

2. LEMME. *Il existe une constante $C_1 \ge 1$, ne dépendant que de F, telle que, pour tous multi-indices L, K et S et tout x de $P(0,r_0/2)$, on ait*

$$(2.1)\qquad \left|\frac{\partial^s}{\partial x^S}A_{K,L}(x)\right| \le C_1^{l+s+1}(l+s-k)!.$$

Ici, k, l et s désignent les longueurs de K, L et S.

Soit M une suite croissante de nombres réels strictement positifs et vérifiant les hypothèses (H_1) et (H_2). On suppose que E est inclus dans le pavé $\overline{P}(0,r_0/3) = (r_0/3)[-1,1]^n$. On utilise la formule (1.2) et le lemme 2; il existe donc une constante $C_2 \ge 1$, ne dépendant que de F, telle que, pour tout jet G sur $F(E)$ appartenant à $(M,F(E))$, le jet $G\circ F$ appartienne à $((C_2M),E)$ et

$$(2.2)\qquad \|G\circ F\|_{((C_2M),E)} \le C_2\|G\|_{(M,F(E))}.$$

3. On note JF la matrice jacobienne de F et Φ son déterminant jacobien. On suppose que Φ est non identiquement nul dans $P(0,r_0)$ et on note $\Sigma = \Phi^{-1}(0)$. Soit $x = \{x_1,\ldots,x_n\}$ un point de $P(0,r_0)\setminus\Sigma$ et soit g une fonction de classe C^∞ au voisinage de $F(x)$. On a

$$(3.1)\qquad \frac{\partial}{\partial z_p}(g\circ F)(x) = \sum_{q=1}^n \frac{\partial}{\partial u_q}(g)\circ F(x)\frac{\partial}{\partial z_p}(F_q)(x), \quad 1\le p\le n.$$

Puisque, par hypothèse, JF est inversible au point x, on a

$$(3.2)\qquad \frac{\partial}{\partial u_q}(g)\circ F(x) = \frac{1}{\Phi(x)}\sum_{p=1}^n T_{p,q}(x)\frac{\partial}{\partial z_p}(g\circ F)(x), \quad 1\le q\le n.$$

Les fonctions $T_{p,q}$, $1\le p\le n$, $1\le q\le n$, sont réelles-analytiques dans le pavé $P(0,r_0)$.

On obtient, en itérant le procédé, pour tout multi-indice L de $\mathbb{N}^n$ de longueur $l\ge 1$ et tout x de $P(0,r_0)\setminus\Sigma$,

$$(3.3)\qquad \frac{\partial^l}{\partial u^L}(g)\circ F(x) = \frac{1}{\Phi(x)^{2l-1}}\sum_{K\in\mathbb{N}^n\,:\,1\le|K|\le l} T_{K,L}(x)\frac{\partial^k}{\partial z^K}(g\circ F)(x),$$

où les fonctions $T_{K,L}$ sont réelles-analytiques dans le pavé $P(0,r_0)$. Bien sûr, la formule précédente est aussi vraie au sens des jets, c'est-à-dire,

$$(3.4)\qquad \Phi^{2l-1}(D^LG)\circ F = \sum_{K\in\mathbb{N}^n\,:\,1\le|K|\le l} T_{K,L}D^K(G\circ F).$$

On a un analogue du lemme 2 qui se démontre de la même façon [11, proposition 2.5].

4. LEMME. *Pour tous multi-indices K, L et S de $\mathbb{N}^n$, pour tout x de $P(0,r_0/2)$, les fonctions $T_{K,L}$ intervenant dans la formule (3.3) vérifient la propriété*

$$(4.1)\qquad \left|\frac{\partial^s}{\partial x^S}(T_{K,L})(x)\right| \le C_3^{l+s+1}(l+s-k)!.$$

Ici la constante $C_3 \ge 1$ ne dépend que de F.

5. LEMME. *Soit E un compact de $\overline{P}(0,r_0/3)$ et M une suite satisfaisant (H_1) et (H_2). Soit G un jet sur $F(E)$. On suppose que $G\circ F$ appartient à (M,E). Alors, pour tout multi-indice L avec $l\ge 1$, et tout multi-indice*

$K \le L$, le jet $T_{K,L}D^K(G \circ F)$ appartient à $((C_4M)^\varphi, E)$ avec $\varphi(p) = p + l$, et on a

$$\|T_{K,L}D^K(G \circ F)\|_{((C_4M)^\varphi,E)} \le C_4 l! \|G \circ F\|_{(M,E)}. \tag{5.1}$$

Ici la constante $C_4 \ge 1$ ne dépend que de F et de M.

P r e u v e. On remarque que, si un jet H appartient à (M, E), alors le jet $D^K H$ appartient à $((2M)^\varphi, E)$ avec $\varphi(p) = p + k$, et on a

$$\|D^K H\|_{((2M)^\varphi,E)} \le k! \|H\|_{(M,E)}. \tag{5.2}$$

On conclut alors comme dans la preuve du lemme II.4.

On suppose maintenant qu'il existe un multi-indice Ω de $\mathbb{N}^n$ de longueur ω et une fonction a réelle-analytique dans le pavé $P(0, r_0)$ et ne s'annulant pas tels que $\Phi(x) = x^\Omega a(x)$ pour tout x de $P(0, r_0)$. On suppose aussi que E est formé de la réunion d'un nombre fini de $(r_0/3)Q(I, n)$. En utilisant la formule (3.4), le lemme 5 et la proposition II.6, on obtient le lemme suivant.

6. Lemme. *Soit E un compact de $\overline{P}(0, r_0/3)$ formé de la réunion d'un nombre fini de $(r_0/3)Q(I, n)$ et M une suite satisfaisant (H_1) et (H_2). Soit G un jet sur $F(E)$. On suppose que $G \circ F$ appartient à (M, E). Alors, pour tout multi-indice L avec $l \ge 1$, le jet $(D^L G) \circ F$ appartient à $((C_5M)^\varphi, E)$ avec $\varphi(p) = p + (2l-1)\omega + l$, et on a*

$$\|(D^L G) \circ F\|_{((C_5M)^\varphi,E)} \le C_5^{2l-1} l! \|G \circ F\|_{(M,E)}. \tag{6.1}$$

La constante $C_5 \ge 1$ dépend de F, de E et de M.

7. *Remarque sur la régulière situation.* On rappelle que deux sous-ensembles sous-analytiques fermés d'un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ sont *régulièrement situés* [3]. En particulier, soit E un compact de $\overline{P}(0, r_0/3)$ formé de la réunion d'un nombre fini de $(r_0/3)Q(I, n)$ et soit F une fonction réelle-analytique dans $P(0, r_0)$; alors $E \times E$ et $\{(x, \xi) \in P(0, r_0) \times P(0, r_0) : F(x) = F(\xi)\}$ sont régulièrement situés.

Le résultat principal de cette partie est la proposition suivante.

8. Proposition. *Soit F une application réelle-analytique définie dans le pavé $P(0, r_0)$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et E un compact de $\overline{P}(0, r_0/3)$ formé de la réunion d'un nombre fini de $(r_0/3)Q(I, n)$. On suppose que*

(8.1) *le jacobien Φ de F s'écrive $\Phi(x) = x^\Omega a(x)$ dans $P(0, r_0)$ et que a ne s'annule pas.*

Soit M une suite croissante de nombres réels strictement positifs satisfaisant (H_1) et (H_2) et soit G un jet de Whitney sur $F(E)$ tel que $G \circ F$ appartienne à (M, E). Alors G appartient à $((C_6M)^\varphi, F(E))$ avec $\varphi(p) = e^1 p + e^2$, et on a

$$\|G\|_{((C_6M)^\varphi,F(E))} \le C_6 \|G \circ F\|_{(M,E)}. \tag{8.2}$$

Ici les entiers e^1 et e^2 ne dépendent que de F et de E; la constante $C_6 \ge 1$ dépend en outre de M.

P r e u v e. Dans cette preuve, les constantes $C_i \ge 1$, les constantes c_i, $0 < c_i < 1$, ne dépendent que de F, de M et de E, et les entiers e_i ne dépendent que de F et de E.

On remarque que, en appliquant le lemme 6 avec $p = 0$, on a immédiatement

$$|G^L(y)| \le C_5^{2l-1} l! \|G \circ F\|_{(M,E)} C_5^{(2l-1)\omega+l} M_{(2l-1)\omega+l} \tag{8.3}$$

pour tout y de $F(E)$ et tout multi-indice L de $\mathbb{N}^n$ avec $l \ge 1$. Ceci donne

$$|G^L(y)| \le C_7^{l+1} l! M_{e_1 l + e_2} \|G \circ F\|_{(M,E)} \tag{8.4}$$

pour tout y de $F(E)$ et tout multi-indice L de $\mathbb{N}^n$ avec $l \ge 1$, pour des constantes e_1, e_2 et C_7 convenables. Clairement cette inégalité est évidente pour $l = 0$.

On doit maintenant estimer les restes des formules de Taylor. Soient y et ζ deux points de $F(E)$, L un multi-indice de $\mathbb{N}^n$ de longueur l et s un entier tels que $l \le s$. Il existe deux points x et ξ de E tels que $y = F(x)$ et $\zeta = F(\xi)$. On peut alors écrire

$$R_\zeta^{L,s} G(y) = G^L \circ F(x) - \sum_{K \in \mathbb{N}^n : k \le s-l} \frac{(F(x) - F(\xi))^K}{K!} G^{L+K} \circ F(\xi). \tag{8.5}$$

On écrit, pour tout j, $1 \le j \le n$, un développement de F_j en série entière au point ξ; on obtient

$$F_j(x) - F_j(\xi) = \sum_{T \in \mathbb{N}^n : t \ge 1} b_{j,T}(\xi)(x - \xi)^T \quad \text{avec } |b_{j,T}(\xi)| \le C_8^t. \tag{8.6}$$

On a donc

$$(F(x) - F(\xi))^K = \sum_{T \in \mathbb{N}^n : t \ge k} b_{K,T}(\xi)(x - \xi)^T \quad \text{avec } |b_{K,T}(\xi)| \le C_9^{k+t}. \tag{8.7}$$

On obtient, en reportant la formule (8.7) dans (8.5),

$$\begin{aligned} R_\zeta^{L,s} G(y) &= G^L \circ F(x) \\ &\quad - \sum_{K : k \le s-l} \frac{1}{K!} \Big(\sum_{T : k \le t} b_{K,T}(\xi)(x - \xi)^T \Big) G^{K+L} \circ F(\xi) \\ &= G^L \circ F(x) \\ &\quad - \sum_{K : k \le s-l} \frac{1}{K!} \Big(\sum_{T : k \le t \le s-l} b_{K,T}(\xi)(x - \xi)^T \Big) G^{K+L} \circ F(\xi) + R_1 \\ &= R_\xi^{0,s-l}(G^L \circ F)(x) + R_1. \end{aligned} \tag{8.8}$$

On utilise le lemme 6 et I.(4.3); on obtient

$$(8.9)\qquad |R_\xi^{0,s-l}(G^L\circ F)(x)| \le |x-\xi|^{s-l+1}C_5^{2l-1}l!\|G\circ F\|_{(M,E)}C_5^{\varphi(s-l+1)}M_{\varphi(s-l+1)}$$

avec $\varphi(p)=p+(2l-1)\omega+l$.

Pour la majoration de R_1, on remarque tout d'abord, d'après (8.7), que l'on a

$$(8.10)\qquad \Big|\sum_{T:t>s-l} b_{K,T}(\xi)(x-\xi)^T\Big| \le \sum_{t>s-l} n^t C_9^{t+k}|x-\xi|^t \le 2C_9^k(nC_9)^{s-l+1}|x-\xi|^{s-l+1}$$

si $|x-\xi|\le(2nC_9)^{-1}$. On tire de là, d'après (8.4), que l'on a

$$(8.11)\qquad |R_1|\le|x-\xi|^{s-l+1}C_{10}^{s+1}l!M_{e_1s+e_2}\|G\circ F\|_{(M,E)}$$

si $|x-\xi|\le(2nC_9)^{-1}$.

De (8.8), (8.9) et (8.11), on déduit

$$(8.12)\qquad |R_\zeta^{L,s}G(y)|\le|x-\xi|^{s-l+1}C_{11}^{s+1}l!M_{e_3(s+1)+e_4}\|G\circ F\|_{(M,E)},$$

avec des constantes e_3, e_4 et C_{11} convenables, si $|x-\xi|\le(2nC_9)^{-1}$.

Toujours, d'après (8.4), on peut aisément montrer que l'on a

$$(8.13)\qquad |R_\zeta^{L,s}G(y)|\le C_{12}^{s+1}l!M_{e_1s+e_2}\|G\circ F\|_{(M,E)};$$

ainsi, si $|x-\xi|\ge(2nC_9)^{-1}$, quitte à changer C_{11}, l'inégalité (8.12) est encore valable.

On note $\Sigma_1=\{(x,\xi)\in P(0,r_0)\times P(0,r_0): F(x)=F(\xi)\}$. De la réelle-analyticité de F, en utilisant une inégalité de S. Łojasiewicz [9], [10], [12], on déduit qu'il existe une constante c_1, $0<c_1<1$, et un entier β tels que l'on ait, pour tout (x,ξ) de $P(0,r_0/2)\times P(0,r_0/2)$,

$$(8.14)\qquad |F(x)-F(\xi)|\ge c_1d((x,\xi),\Sigma_1)^\beta.$$

On utilise la remarque 7 et on obtient qu'il existe une constante c_2, $0<c_2<1$, et un entier γ tels que, pour tout $(x,\xi)\in E\times E$, il existe un couple de points $(x',\xi')\in E\times E$ vérifiant

$$(8.15)\qquad |F(x)-F(\xi)|\ge c_2(|x-x'|+|\xi-\xi'|)^\gamma \quad\text{et}\quad F(x')=F(\xi').$$

A un couple de points (y,ζ) de $F(E)\times F(E)$ on associe un couple de points (x,ξ) de $E\times E$ tels que $F(x)=y$ et $F(\xi)=\zeta$. Au couple (x,ξ) ainsi choisi, on associe aussi le couple de points (x',ξ') vérifiant (8.15) ainsi que le point $z=F(x')=F(\xi')$ de $F(E)$. Soit s un entier et L un multi-indice de $\mathbb{N}^n$ vérifiant $l\le s$. On peut écrire

$$(8.16)\qquad R_\zeta^{L,s}G(y)=R_z^{L,s}G(y)+\sum_{K:k\le s-l}\frac{(y-\zeta)^K}{K!}R_z^{K+L,s}G(\zeta).$$

D'après (8.12), on obtient

$$(8.17)\qquad |R_\zeta^{L,s}G(y)|\le|x-x'|^{s-l+1}C_{11}^{s+1}l!M_{e_3(s+1)+e_4}\|G\circ F\|_{(M,E)} + C_{11}^{s+1}M_{e_3(s+1)+e_4}\|G\circ F\|_{(M,E)} \times\sum_{K:k\le s-l}\frac{|y-\zeta|^k}{K!}|\xi-\xi'|^{s-k-l+1}(l+k)!.$$

On déduit immédiatement de (8.9), (8.14), (8.15) et (8.17) l'inégalité suivante:

$$(8.18)\qquad |R_\zeta^{L,s}G(y)|\le(|x-x'|+|y-\zeta|+|\xi-\xi'|)^{s-l+1} \times C_{13}^{s+1}l!M_{e_3(s+1)+e_4}\|G\circ F\|_{(M,E)} \le|y-\zeta|^{(s-l+1)/\gamma}C_{14}^{s+1}l!M_{e_3(s+1)+e_4}\|G\circ F\|_{(M,E)}.$$

Soit L un multi-indice de $\mathbb{N}^n$, m et s deux entiers tels que $l\le m\le s$. On peut écrire, pour y et ζ dans $F(E)$,

$$(8.19)\qquad R_\zeta^{L,m}G(y)=R_\zeta^{L,s}G(y)-\sum_{K:m+1\le l+k\le s}\frac{(y-\zeta)^K}{K!}G^{K+L}(\zeta),$$

et on a, d'après (8.4), puisque $F(E)$ est compact,

$$(8.20)\qquad \Big|\sum_{K:m+1\le k+l\le s}\frac{(y-\zeta)^K}{K!}G^{K+L}(\zeta)\Big| \le|y-\zeta|^{m+1-l}l!C_{15}^{s+1}M_{e_1s+e_2}\|G\circ F\|_{(M,E)}.$$

On choisit dans la formule (8.19) $s=\gamma(m+1-l)+l-1$. De (8.18) et (8.20), on déduit

$$(8.21)\qquad |R_\zeta^{L,m}G(y)|\le|y-\zeta|^{m-l+1}C_{16}^{m+1}l!M_{e_5(m+1)+e_6}\|G\circ F\|_{(M,E)}.$$

Ici les entiers e_5, e_6 ne dépendent que de F et de la géométrie de E; la constante C_{16} dépend en outre de M. Ceci achève la preuve du théorème.

Comme corollaire de la proposition précédente et du lemme I.3, on a la version suivante du théorème de composition de Glaeser [7].

9. Corollaire. *Soit F une application réelle-analytique définie dans le pavé $P(0,r_0)$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et E un compact de $\overline{P}(0,r_0/3)$ formé de la réunion d'un nombre fini de $(r_0/3)Q(I,n)$. On suppose que*

(9.1) *le jacobien Φ de F s'ecrive $\Phi(x)=x^\Omega a(x)$ dans $P(0,r_0)$ et que a ne s'annule pas.*

Soit M une suite croissante de nombres réels strictement positifs satisfaisant (H_1), (H_2) et (H_3). Alors la sous-algèbre de $J\widehat{M}(E)$ formée des jets de la forme $G\circ F$ où G est un jet de $J\widehat{M}(F(E))$ est fermée.

On rappelle que $J\widehat{M}(E)$ a été défini dans I.(4.5).

10. Remarque. Clairement, la proposition 8 et le corollaire 9 restent vrais sous les hypothèses suivantes, un peu plus générales, portant sur l'application F et le compact E:

(10.1) F est réelle-analytique dans une réunion finie de pavés ouverts $P(b_i, r_i)$ deux à deux disjoints;

(10.2) pour chaque i, dans $P(b_i, r_i)$, le jacobien Φ de F s'écrit $\Phi(x) = x^{\Omega_i} a_i(x)$ et a_i ne s'annule pas;

(10.3) $E \cap P(b_i, r_i)$ est formé de la réunion d'un nombre fini de $r'_i Q(I,n) + b_i$ avec $r'_i < r_i$, pour tout i.

IV. Composition et division : le cas général

1. Définitions. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et M une suite croissante de nombres réels satisfaisant (H_1), (H_2) et (H_3). On note $\widehat{M}(\mathcal{O}, \mathrm{loc})$ la classe des fonctions g qui appartiennent localement à $\widehat{M}$, c'est-à-dire, telles que, pour tout point x de $\mathcal{O}$, il existe un sous-ouvert $\mathcal{O}_x$ de $\mathcal{O}$ contenant x, relativement compact dans $\mathcal{O}$ et tel que $f \in \widehat{M}(\mathcal{O}_x)$.

Soit E un sous-ensemble relativement fermé dans $\mathcal{O}$. On note $J\widehat{M}(E, \mathrm{loc})$ la classe des jets G sur E qui appartiennent localement à $J\widehat{M}$, c'est-à-dire, tels que, pour tout x de E, il existe un sous-ouvert $\mathcal{O}_x$ de $\mathcal{O}$ contenant x, d'adhérence $\overline{\mathcal{O}}_x$ compacte dans $\mathcal{O}$ et tel que $G \in J\widehat{M}(\overline{\mathcal{O}}_x \cap E)$.

2. *Désingularisation.* Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit f une fonction réelle-analytique de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}$ non identiquement nulle dans chaque composante connexe de $\mathcal{O}$ et soit E un sous-ensemble sous-analytique et fermé dans $\mathcal{O}$. Soit K un sous-ensemble compact de $\mathcal{O}$. La version du théorème de désingularisation donnée dans [3] et [4] permet de construire une famille finie de pavés ouverts $P(b_i, 1) = b_i +]-1, 1[^n$, $1 \le i \le s$, deux à deux disjoints, et une application réelle-analytique $\mathbb{F}$ de $\bigcup_{1 \le i \le s} P(b_i, 1)$ dans $\mathcal{O}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(2.1) $\mathbb{F}(\bigcup_{1 \le i \le s} P(b_i, 1/4)) \supset K$;

(2.2) pour chaque i, $1 \le i \le s$, dans $P(b_i, 1)$, le jacobien de $\mathbb{F}$ s'écrit $(x - b_i)^{\Lambda_i} \gamma_i(x)$ avec $\Lambda_i \in \mathbb{N}^n$ et γ_i réelle-analytique, ne s'annulant pas;

(2.3) pour chaque i, $1 \le i \le s$, dans $P(b_i, 1)$, la fonction $f \circ \mathbb{F}$ s'écrit $(x - b_i)^{\widetilde{\Lambda}_i} \widetilde{\gamma}_i(x)$ avec $\widetilde{\Lambda}_i \in \mathbb{N}^n$ et $\widetilde{\gamma}_i$ réelle-analytique, ne s'annulant pas;

(2.4) pour chaque i, $1 \le i \le s$, $\mathbb{F}^{-1}(E) \cap \overline{P}(b_i, 1/4)$ est la réunion, éventuellement vide, d'un nombre fini de $(1/4)Q(I,n) + b_i$.

3. Théorème de composition. *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et F une application réelle-analytique de $\mathcal{O}$ dans un ouvert $\mathcal{O}'$ de $\mathbb{R}^n$ dont le déterminant jacobien Φ est non identiquement nul dans chaque composante connexe de $\mathcal{O}$. Soit E un sous-ensemble sous-analytique fermé de $\mathcal{O}$ dont l'image $E' = F(E)$ est fermée dans $\mathcal{O}'$. On suppose que, pour tout compact K' de E', il existe un compact K de E tel que $F(K) = K'$. Soit M une suite croissante de nombres réels satisfaisant (H_1), (H_2) et (H_3). Alors la sous-algèbre de $J\widehat{M}(E, \mathrm{loc})$ formée des jets de la forme $G \circ F$ avec G dans $J\widehat{M}(E', \mathrm{loc})$ est fermée dans $J\widehat{M}(E, \mathrm{loc})$.*

Preuve. Soit K' un compact de E'. Il existe un compact K de E tel que $F(K) = K'$. On applique la procédure de désingularisation à $\mathcal{O}$, au jacobien Φ de F, à E et au compact K. On en déduit immédiatement qu'il existe une famille finie de pavés $P(b_i, 1)$, $1 \le i \le s$, deux à deux disjoints, et une application réelle-analytique $\mathbb{F}$ de $\bigcup_{1 \le i \le s} P(b_i, 1)$ dans $\mathcal{O}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\mathbb{F}\Big(\bigcup_{1 \le i \le s} P(b_i, 1/4)\Big) \supset K. \tag{3.1}$$

Le déterminant jacobien de $F \circ \mathbb{F}$ est, dans chaque pavé $P(b_i, 1)$, de la forme

$$(x - b_i)^{\Omega_i} a_i(x), \tag{3.2}$$

et la fonction a_i ne s'annule pas dans $P(b_i, 1)$.

De plus $\mathbb{F}^{-1}(E) \cap \overline{P}(b_i, 1/4)$ est formé de la réunion, éventuellement vide, d'un nombre fini de $(1/4)Q(I,n) + b_i$.

On note $E_1 = \mathbb{F}^{-1}(E) \cap \bigcup_{1 \le i \le s} \overline{P}(b_i, 1/4)$ et $F_1 = F \circ \mathbb{F}$. Bien sûr, on a $F_1(E_1) \supset K'$.

Soit G un jet sur E' tel que $G \circ F$ appartienne à $J\widehat{M}(E, \mathrm{loc})$. Soit a un réel strictement positif. On applique l'inégalité (2.2) du paragraphe III.2 à $G \circ F$, $\mathbb{F}$, E_1 et M^a; on obtient que le jet $G \circ F \circ \mathbb{F} = G \circ F_1$ appartient à $((C_1 M^a), E_1)$ et on a

$$\|G \circ F_1\|_{((C_1 M^a), E_1)} \le C_1 \|G \circ F\|_{(M^a, \mathbb{F}(E_1))}, \tag{3.3}$$

où $C_1 \ge 1$ est une constante ne dépendant que de F_1 et de E_1.

On applique maintenant la remarque III.10 et la proposition III.8 au compact E_1, à l'application F_1 et à la suite $(C_1 M^a)$; le jet G appartient donc à $((C_2(C_1 M^a))^\varphi, F_1(E_1))$ avec $\varphi(p) = e^1 p + e^2$, et on a

$$\|G\|_{((C_2(C_1 M^a))^\varphi, F_1(E_1))} \le C_2 \|G \circ F_1\|_{((C_1 M^a), E_1)}. \tag{3.4}$$

Ici les entiers e^1 et e^2 dépendent de l'application F_1 et de la géométrie de E_1; la constante C_2 dépend en outre de $(C_1 M^a)$.

On note $\widetilde{K} = \mathbb{F}(E_1)$. On a $F(\widetilde{K}) = F \circ \mathbb{F}(E_1) = F_1(E_1)$ et donc, d'après (3.1), $K' \subset F(\widetilde{K}) \subset E'$. On utilise les inégalités I.(3.2), (3.3) et (3.4); on obtient alors que le jet G appartient à $((M^{e^3 a}), K')$ et on a

$$\|G\|_{((M^{e^3 a}),K')} \le C_3 \|G\circ F\|_{((M^a),\widetilde{K})}, \tag{3.5}$$

la constante C_3 ne dépendant pas de G et l'entier e^3 ne dépendant ni de G, ni de a, ni de M.

Etant donnés un réel strictement positif a et un compact K' de E', on a donc construit un compact $\widetilde{K}$ de E vérifiant $F(\widetilde{K}) \supset K'$, un entier e^3 et une constante C_3 tels que, pour tout jet G sur E' tel que $G\circ F$ appartienne à $J\widehat{M}(E,\mathrm{loc})$, on ait

$$\|G\|_{((M^{e^3 a}),K')} \le C_3 \|G\circ F\|_{((M^a),\widetilde{K})}, \tag{3.6}$$

l'entier e^3 ne dépendant pas de a.

Ceci, clairement, achève la preuve du théorème.

4. Théorème de division. *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, g une fonction réelle-analytique dans $\mathcal{O}$ et E un sous-ensemble sous-analytique et fermé dans $\mathcal{O}$. Soit M une suite croissante de nombres réels satisfaisant (H_1), (H_2) et (H_3). Alors l'idéal engendré par g dans $J\widehat{M}(E,\mathrm{loc})$ est fermé.*

Preuve. Bien sûr, on peut, sans restreindre la généralité, supposer que $\mathcal{O}$ est connexe et que g est non identiquement nulle dans $\mathcal{O}$. On utilise le résultat de désingularisation décrit dans le paragraphe 2. Soit K un sous-ensemble compact de E. Il existe une famille finie de pavés ouverts $P(b_i,1)$, $1\le i\le s$, deux à deux disjoints, et une application $\mathbb{F}$ réelle-analytique de $\bigcup_{1\le i\le s} P(b_i,1)$ dans $\mathcal{O}$ vérifiant les propriétés (2.1)–(2.4). On note $K_1 = \mathbb{F}^{-1}(E)\cap\bigcup_{1\le i\le s}\overline{P}(b_i,1/4)$; bien sûr, on a $K\subset\mathbb{F}(K_1)\subset E$.

Soit G un jet sur E tel que gG appartienne à $J\widehat{M}(E,\mathrm{loc})$ et soit a un réel strictement positif; gG appartient à $(M^a,\mathbb{F}(K_1))$ et donc, en utilisant les résultats du paragraphe III.2, on obtient que $(gG)\circ\mathbb{F}$ appartient à $((C_1M^a),K_1)$ avec

$$\|(gG)\circ\mathbb{F}\|_{((C_1M^a),K_1)} \le C_1\|gG\|_{(M^a,\mathbb{F}(K_1))}, \tag{4.1}$$

la constante C_1 ne dépendant que de $\mathbb{F}$, de K_1, de M et de a.

On a $(gG)\circ\mathbb{F} = (g\circ\mathbb{F}).(G\circ\mathbb{F})$. Donc, dans chaque pavé P_i, on peut, compte tenu de (2.3), appliquer la proposition II.6. On obtient que $G\circ\mathbb{F}$ appartient à $((C_2(C_1M^a))^{\varphi_1},K_1)$ avec $\varphi_1(p) = e^1p+e^2$, et on a

$$\|G\circ\mathbb{F}\|_{((C_2(C_1M^a))^{\varphi_1},K_1)} \le C_2\|(gG)\circ\mathbb{F}\|_{((C_1M^a),K_1)}. \tag{4.2}$$

Ici les entiers e^1 et e^2 dépendent de $\widetilde{\Lambda}_i$, $1\le i\le r$, et de K_1; la constante C_2 dépend en outre de (C_1M^a).

On peut maintenant, d'après (2.1) et la remarque III.10, appliquer la proposition III.8. On obtient que G appartient à $((C_3(C_2(C_1M^a))^{\varphi_1})^{\varphi_2}$, $\mathbb{F}(K_1))$ avec $\varphi_2(p) = e^3p+e^4$, et on a

$$\|G\|_{((C_3(C_2(C_1M^a))^{\varphi_1})^{\varphi_2},\mathbb{F}(K_1))} \le C_3\|G\circ\mathbb{F}\|_{((C_2(C_1M^a))^{\varphi_1},K_1)}. \tag{4.3}$$

Ici les entiers e^3 et e^4 ne dépendent que de K_1 et de $\mathbb{F}$.

On peut, comme précédemment, utiliser l'inégalité I.(3.2) et on obtient ainsi le résultat suivant. Etant donné un sous-ensemble compact K de E et un réel strictement positif a, il existe un sous-ensemble compact $\widetilde{K}$ de E contenant K, un entier e^5 et une constante C_4 tels que, pour tout jet G sur E tel que gG appartienne à $J\widehat{M}(E,\mathrm{loc})$, on ait

$$\|G\|_{(M^{e^5 a},K)} \le C_4\|gG\|_{(M^a,\widetilde{K})}. \tag{4.4}$$

Ici l'entier e^5 ne dépend que de g et de $\widetilde{K}$, alors que la constante C_4 dépend en outre de M et de a.

On déduit, de là, le théorème 4.

Bien évidemment, on peut aussi obtenir un théorème de composition valable pour des submersions. Sa preuve consiste en une modification simple des arguments développés dans la partie III; elle n'est donc pas donnée ici.

5. Théorème de composition. *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et F une application réelle-analytique de $\mathcal{O}$ dans un ouvert $\mathcal{O}'$ de $\mathbb{R}^p$ dont l'ensemble des points réguliers est dense dans $\mathcal{O}$. Soit E un sous-ensemble sous-analytique fermé de $\mathcal{O}$ dont l'image $E' = F(E)$ est fermée dans $\mathcal{O}'$. On suppose que, pour tout compact K' de E', il existe un compact K de E tel que $F(K) = K'$. Soit M une suite croissante de nombres réels satisfaisant (H_1), (H_2) et (H_3). Alors la sous-algèbre de $J\widehat{M}(E,\mathrm{loc})$ formée des jets de la forme $G\circ F$ avec G dans $J\widehat{M}(E',\mathrm{loc})$ est fermée dans $J\widehat{M}(E,\mathrm{loc})$.*

V. Commentaires et exemples

1. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et E un fermé de $\mathcal{O}$. On introduit l'espace $J(E)$ des jets sur E; on rappelle qu'un jet G sur E est la donnée d'une famille $\{G^L(x) : x\in E,\ L\in\mathbb{N}^n\}$ de fonctions continues sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$. Sous les hypothèses du théorème IV.4, on a en fait montré que

$$(g.J(E))\cap J\widehat{M}(E,\mathrm{loc}) = g.J\widehat{M}(E,\mathrm{loc}). \tag{1.1}$$

De même, sous les hypothèses du théorème IV.3, on a montré que

$$F^*(J(F(E)))\cap J\widehat{M}(E,\mathrm{loc}) = J\widehat{M}(F(E),\mathrm{loc}). \tag{1.2}$$

2. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et M une suite croissante de nombres réels positifs satisfaisant (H_1) et (H_2). On note $\check{M}(\mathcal{O}) = \bigcup_{a>0}(M^a,\mathcal{O})$. On introduit, de même, les espaces $\check{M}(E)$, $\check{M}(\mathcal{O},\mathrm{loc})$ et $\check{M}(E,\mathrm{loc})$. On peut facilement se convaincre que les théorèmes IV.3, IV.4 et la remarque 1 restent vrais pour ces espaces.

3. Un exemple classique de suite M satisfaisant les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) est la suite définie par $M_p = p!$ pour tout entier p. On obtient que $\widehat{M}(\mathcal{O})$ est l'intersection des classes de Gevrey sur $\mathcal{O}$; de même, $\check{M}(\mathcal{O})$ est la réunion des classes de Gevrey sur $\mathcal{O}$. On a ainsi obtenu des généralisations des théorèmes de division de Łojasiewicz et composition de Glaeser dans la réunion et l'intersection de classes de Gevrey.

4. On peut se demander si les théorèmes de division et de composition sont vrais pour une classe de Gevrey "individuelle". Les exemples suivants montrent qu'il n'en est rien.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit α un réel strictement positif. Avec les notations introduites dans I, si la suite M est définie par $M_p = p!^\alpha$ pour tout entier p, la classe de Gevrey–Beurling $BG^{1+\alpha}(\mathcal{O})$ est égale à $\bigcap_{C>0}((CM),\mathcal{O})$; de même, la classe de Gevrey–Carleman $CG^{1+\alpha}(\mathcal{O})$ est égale à $\bigcup_{C>0}((CM),\mathcal{O})$.

On considère, sur l'intervalle $[0,1[$, la fonction g définie par

$$g(x) = \exp(-1/|x|^{1/\alpha}) ;$$

cette fonction appartient à $CG^{1+\alpha}([0,1[)$.

On note F la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par $F(x) = x^2$; la fonction $f = g \circ F$ appartient à $CG^{1+\alpha/2}(]-1,1[)$. Ces résultats sont optimaux.

On considère maintenant, pour ε strictement positif, la fonction paire f_ε définie sur $]-1,1[$ par

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le \varepsilon, \\ f(x-\varepsilon) & \text{si } \varepsilon \le x \le 1. \end{cases}$$

On peut remarquer que f_ε tend vers f dans $CG^{1+\alpha/2}(]-1,1[)$ lorsque ε tend vers 0, que, pour chaque ε, la fonction g_ε, définie sur $[0,1[$ par $g_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x^{1/2})$, appartient à $CG^{1+\alpha/2}([0,1[)$ et que l'on a $f_\varepsilon = g_\varepsilon \circ F$.

Ainsi le théorème de composition est faux dans les classes de Gevrey–Carleman.

On considère, sur $\mathcal{O} =]-1,1[\times]-1,1[$, la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \le 0, \\ \exp(-1/y^{1/\alpha}) & \text{si } y > 0; \end{cases}$$

cette fonction appartient à $CG^{1+\alpha}(]-1,1[\times]-1,1[)$.

Soit g la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = x^2 + y^3$. On peut remarquer que la fonction $h = f/g$ est bien définie et qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathcal{O}$. Un calcul immédiat à l'aide de la formule de Faa di Bruno montre que, pour tout k entier et tout (x,y), $y > 0$, on a

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} h(x,y) = f(x,y) \sum \frac{(-1)^q q! k!}{q_1! q_2!} (x^2+y^3)^{-(q+1)} (2x)^{q_1}$$

avec $q = q_1 + q_2$ et où la somme est faite sur tous les couples d'entiers (q_1,q_2) vérifiant $k = q_1 + 2q_2$.

On obtient donc, si $k = 2s$, si $x = 0$ et $y > 0$,

$$\frac{\partial^{2s}}{\partial x^{2s}} h(0,y) = \exp(-1/y^{1/\alpha})(-1)^s (2s)! y^{-3(s+1)}.$$

On déduit de là que

$$\sup_{(x,y)\in\mathcal{O}} \left| \frac{\partial^{2s}}{\partial x^{2s}} h(x,y) \right| \ge (2s)! C^s (2s)!^{3\alpha/2}$$

pour une constante C convenable.

Ainsi la fonction h n'appartient à $CG^{1+t\alpha}(\mathcal{O})$ pour tout $t < 3/2$.

On peut maintenant reprendre une idée déjà utilisée dans l'exemple précédent et introduire, pour $\varepsilon > 0$, la fonction f_ε définie sur $\mathcal{O}$ par

$$f_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \le \varepsilon, \\ f(x, y-\varepsilon) & \text{si } y > \varepsilon.. \end{cases}$$

On introduit aussi $h_\varepsilon = f_\varepsilon/g$. On vérifie aisément que f_ε tend vers f dans $CG^{1+\alpha}(\mathcal{O})$ lorsque ε tend vers 0; on vérifie aussi que h_ε appartient à $CG^{1+\alpha}(\mathcal{O})$. Ceci montre que le théorème de division est faux dans les classes de Gevrey–Carleman.

On peut facilement se convaincre, à partir des exemples précédents, que les théorèmes de division et de composition sont tout aussi faux pour les classes de Gevrey–Beurling.

5. On peut remarquer pour conclure que les classes considérées ici peuvent être quasi-analytiques. En effet, dans les preuves, on n'a pas fait usage de résultats d'extension de type "Whitney".

Bibliographie

[1] M. F. Atiyah, *Resolution of singularities and division of distributions*, Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 145–150.

[2] I. N. Bernstein and S. I. Gel'fand, *Meromorphic property of the function P^λ*, Funct. Anal. Appl. 3 (1969), 68–69.

[3] E. Bierstone and P. D. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, Publ. I.H.E.S. 67 (1988), 5–42.

[4] —, —, *A simple constructive proof of canonical resolution of singularities*, in: Effective Methods in Algebraic Geometry, Progr. Math. 94, Birkhäuser, 1991, 11–30.

[5] L. P. Bos and P. D. Milman, *Sobolev–Gagliardo–Nirenberg and Markov type inequalities on subanalytic domains*, Geom. Funct. Anal. 5 (1995), 853–923.

[6] J. Chaumat et A.-M. Chollet, *Propriétés de l'intersection des classes de Gevrey et de certaines autres classes*, Bull. Sci. Math. (1998), à paraître.

[7] G. Glaeser, *Fonctions composées différentiables*, Ann. of Math. 77 (1963), 193–209.

[8] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, ibid. 79 (1964), 109–326.

[9] S. Łojasiewicz, *Sur le problème de la division*, Studia Math. 8 (1959), 87–136.

[10] B. Malgrange, *Ideals of Differentiable Functions*, Oxford Univ. Press, 1966.

[11] V. Thilliez, *Sur les fonctions composées différentiables*, J. Math. Pures Appl. 76 (1997), 499–524.

[12] J. C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer, 1972.

U.R.A. C.N.R.S. 757
Université Paris-Sud
Mathématiques – Bât. 425
91405 Orsay Cedex, France
E-mail: jacques.chaumat@math.u-psud.fr

U.R.A. C.N.R.S. 751
Université de Lille
U.F.R. de Mathématique – Bât. M2
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail: chollet@aglae.univ-lille1.fr

Received July 23, 1998 (4156)
Revised version February 15, 1999

STUDIA MATHEMATICA 136 (1) (1999)

Induced stationary process and structure of locally square integrable periodically correlated processes

by

ANDRZEJ MAKAGON (Hampton, Va., and Wrocław)

Abstract. A one-to-one correspondence between locally square integrable periodically correlated (PC) processes and a certain class of infinite-dimensional stationary processes is obtained. The correspondence complements and clarifies Gladyshev's known result [3] describing the correlation function of a continuous periodically correlated process. In contrast to Gladyshev's paper, the procedure for explicit reconstruction of one process from the other is provided. A representation of a PC process as a unitary deformation of a periodic function is derived and is related to the correspondence mentioned above. Some consequences of this representation are discussed.

1. Introduction. Periodically correlated processes were introduced by Gladyshev in [3] and were defined as continuous functions $x:\mathbb{R}\to\mathcal{H}$, from the set of real numbers $\mathbb{R}$ into a complex separable Hilbert space $\mathcal{H}$, for which there exists a number $T>0$ (called the *period*) such that

(1) $$(x(t),x(s))=(x(t+T),x(s+T))\qquad\text{for all } s,t\in\mathbb{R}.$$

In the paper we will call such processes *Continuous Periodically Correlated* and abbreviate them CPC. If $x(t)$ is a CPC process then the mapping $V: x(t)\to x(t+T)$, $t\in\mathbb{R}$, extends linearly to a unitary operator V, called the *T-shift operator*, from the space $M_x=\overline{\operatorname{span}}\{x(t):t\in\mathbb{R}\}$ onto itself. If now W^t is any *continuous unitary representation* of $\mathbb{R}$ in some $\mathcal{K}\supseteq M_x$ such that $W^T=V$ on M_x, then the function $p(t)=W^{-t}x(t)$ is a continuous periodic function in $\mathcal{K}$ and $x(t)=W^tp(t)$. This gives the following theorem, which we will refer to as the *Structure Theorem for CPC Processes* (see also [8]).

THEOREM 1.1 (Structure Theorem for CPC Processes). *Let $T>0$. A function $x:\mathbb{R}\to\mathcal{H}$ is a CPC process with period T iff there are a Hilbert space $\mathcal{K}\supseteq\mathcal{H}$, a unitary representation W^t of $\mathbb{R}$ in $\mathcal{K}$, and a T-periodic*

1991 *Mathematics Subject Classification*: 60G12, 60G25, 43A65.
Key words and phrases: periodically correlated process, stationary process, imprimitivity theorem.