Publications citées.

[1] J. G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica 11 (1949), p. 41-70.

[2] — *Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire*, Studia Mathematica 12 (1951), p. 208-224.

(Reçu par la Rédaction le 10. 6. 1951)

Sur les séries de puissances dans le calcul opératoire

par

C. RYLL-NARDZEWSKI (Wrocław).

1. Soit

$$\Phi(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots \tag{1}$$

une série à rayon de convergence positif. Si $f=\{f(t)\}$ est une fonction (complexe de variable réelle) continue pour $t\geqslant 0$, la série

$$\Phi(f\lambda)=a_1f\lambda+a_2f^2\lambda^2+\ldots, \tag{2}$$

considérée comme une série d'opérateurs, est uniformément convergente dans tout cercle $|\lambda|\leqslant\varrho$ [1]).

Nous démontrerons ici deux théorèmes plus généraux.

2. Soit $\mathfrak{L}_0$ la classe des fonctions f (complexes de variable réelle $t\geqslant 0$) qui sont sommables dans tout intervalle fini $0\leqslant t\leqslant k$. Nous allons considérer $\mathfrak{L}_0$ comme un espace du type B_0 [2]), en posant

$$\|f\|_k=\int_0^k|f(t)|\,dt \quad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots$$

La pseudonorme $\|f\|_k$ jouit des propriétés suivantes:

1° $\|fg\|_k\leqslant\|f\|_k\cdot\|g\|_k$ [3]);

2° si $|g(t)|\leqslant M$ pour $0\leqslant t\leqslant k$, on a

$$\|g^\nu\|_k\leqslant\frac{1}{\nu!}(kM)^\nu \quad \text{pour} \quad \nu=1,2,\ldots$$

---

[1]) Voir J. G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Math. 11 (1950), p. 63, § 21.

[2]) Voir S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires (I)*, Studia Math. 10 (1948), p. 184-208.

[3]) Nous employons la notation de Mikusiński: $fg=\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right\}$.

Lemme 1. *Si $f \in \mathfrak{L}_0$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \|f^n\|_k = 0$$

pour tout k naturel.

Démonstration. Fixons k arbitrairement. Cela posé, on peut décomposer $f(t)$ en deux fonctions

$$f = g + h,$$

de manière que $|g(t)| \leqslant M$ pour $0 \leqslant t \leqslant k$ (M constant) et que $\|h\|_k \leqslant 1/3$. On a

$$f^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} g^\nu h^{n-\nu},$$

d'où, en vertu de 1° et 2°,

$$\|f^n\|_k \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{1}{\nu!} (kM)^\nu \frac{1}{3^{n-\nu}} < \sum_{\nu=0}^{n} 2^n \frac{(3kM)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{3^n} < \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{3kM}.$$

Théorème 1. *Si* (1) *a le rayon de convergence positif, la série* (2), *où $f \in \mathfrak{L}_0$, converge (au sens de la métrique introduite) uniformément dans tout cercle $|\lambda| \leqslant \varrho$, c'est-à-dire on a*

$$\|\alpha_1 f\lambda + \ldots + \alpha_n f^n \lambda^n - \Phi(f\lambda)\|_k \leqslant \varepsilon_{nk} \quad \textit{pour} \quad |\lambda| \leqslant \varrho,$$

où $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{nk} = 0$ *pour* $k = 1, 2, \ldots$

Démonstration. En vertu de l'hypothèse sur la convergence de (1), il existe un nombre A, tel que

$$|\alpha_n| \leqslant A^n \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots;$$

on a donc

$$\|\alpha_n f^n \lambda^n\|_k \leqslant \frac{1}{2^n} \|(2Af\varrho)^n\|_k \quad \text{pour} \quad |\lambda| \leqslant \varrho,$$

d'où le théorème.

Corollaire 1. *Si* (1) *a le rayon de convergence positif, la série* (2), *où $f \in \mathfrak{L}_0$, converge au sens opératoire uniformément dans tout cercle $|\lambda| \leqslant \varrho$.*

3. Une fonction f (complexe de variable réelle t) est dite *de variation V dans l'intervalle J*, lorsque

$$V = \sup \sum_{\nu=1}^{n} |f(t_\nu) - f(t_{\nu-1})|,$$

où $t_0, \ldots, t_n$ est une suite finie croissante de nombres de J.

Soit V_0 la classe des fonctions f (complexes de variable réelle $t \geqslant 0$) qui sont

(i) nulles au point $t = 0$,

(ii) continues à gauche,

(iii) à variation bornée dans tout intervalle fini.

La variation de $f \in V_0$ dans l'intervalle $\langle 0, t)$ sera désignée par $\mathrm{Var}_t(f)$. On a les formules, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\mathrm{Var}_t(\lambda f) = |\lambda| \mathrm{Var}_t(f) \qquad (\lambda \text{ complexe}),$$

$$\mathrm{Var}_t(f+g) \leqslant \mathrm{Var}_t(f) + \mathrm{Var}_t(g), \tag{3}$$

$$\sup_{0 \leqslant \tau < t} |f(\tau)| \leqslant \mathrm{Var}_t(f).$$

Si $f, g \in V_0$ posons généralement

$$f * g = \int_{\langle 0,t)} f(t-\tau)\, dg(\tau),$$

où l'intégrale est entendue au sens de Lebesgue-Stieltjes.

La fonction $f*g$ jouit évidement des propriétés (i) et (iii). De plus, on a, en vertu du théorème de Lebesgue sur l'intégration des suites,

$$\lim_{t_n \to t-} \int_{\langle 0,t_n)} f(t_n - \tau)\, dg(\tau) = \int_{\langle 0,t)} f(t-\tau)\, dg(\tau),$$

car f est continue à gauche. D'où la propriété (ii). On voit donc que $f*g \in V_0$.

Nous démontrerons que

$$\mathrm{Var}_t(f*g) \leqslant \mathrm{Var}_t(f) \cdot \mathrm{Var}_t(g). \tag{4}$$

En effet, si $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t$, on a

$$\left| \int_{\langle t_{\nu-1}, t_\nu)} f(t-\tau)\, dg(\tau) \right| \leqslant \sup_{\langle t_{\nu-1}, t_\nu)} |f(t-\tau)| \, [\mathrm{Var}_{t_\nu}(g) - \mathrm{Var}_{t_{\nu-1}}(g)]$$

pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

En sommant les n inégalités précédentes, on trouve facilement

$$\mathrm{Var}_t(f*g) \leqslant \sup_{\langle 0,t)} |f(\tau)| \cdot \mathrm{Var}_t(g),$$

d'où la proposition, en vertu de (3).

On a encore les formules suivantes:

(5) $$f*g=g*f,$$

(6) $$f*(g*h)=(f*g)*h.$$

Ces formules s'obtiennent aisément au moyen du calcul opératoire. En effet, faisons correspondre l'opérateur

$$s\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}$$

à toute fonction $f\in V_0$; cette correspondance est biunivoque. On a

(7) $$fg=l\cdot(f*g);$$

ce qui équivaut à l'égalité

$$\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau=\int_0^t dt\int_{\langle 0,t)} f(t-\tau)\,dg(\tau).$$

La formule (5) résulte aussitôt de (7). La formule (6) résulte de l'égalité

$$l^2[f*(g*h)]=fgh=l^2[(f*g)*h],$$

qui est une conséquence de (7).

Adoptons la notation suivante:

$$f_*^1=f \quad \text{et} \quad f_*^n=f_* f_*^{n-1} \quad \text{pour} \quad n=2,3,\ldots$$

Lemme 2. *Si $f\in V_0$ et $f(0+)<1$, on a*

(8) $$\lim \operatorname{Var}_t(f_*^n)=0$$

pour tout $t\geqslant 0$.

Démonstration. Soit δ un nombre positif, tel que

$$\operatorname{Var}_t(f)\leqslant\Theta<1 \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant\delta.$$

Posons

$$f=g+h,$$

où

$$g(t)=\begin{cases} f(t) & \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant\delta,\\ f(\delta) & \text{pour} \quad \delta<t<\infty.\end{cases}$$

On a évidemment $\operatorname{Var}_t(g)\leqslant\Theta$ pour tout $t\geqslant 0$, d'où, en vertu de (4),

$$\operatorname{Var}_t(g_*^n)\leqslant\Theta^n \quad \text{pour tout} \quad t\geqslant 0.$$

On a encore $h(t)=0$ pour $0\leqslant t\leqslant\delta$, d'où

$$h_*^n(t)=0$$

dans l'intervalle $0\leqslant t\leqslant n\delta$.

Cela étant, on peut écrire

$$\operatorname{Var}_{t_0}(f_*^n)\leqslant\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\operatorname{Var}_{t_0}(g_*^{n-\nu})\operatorname{Var}_{t_0}(h_*^{\nu}).$$

Si $n\geqslant n_0>t/\delta$, il s'ensuit

$$\operatorname{Var}_t(f_*^n)\leqslant\sum_{\nu=1}^{n_0}\binom{n}{\nu}\Theta^{n-\nu}\operatorname{Var}_t(h_*^{\nu}),$$

d'où (8).

Théorème 2. *Si le rayon de convergence R de* (1) *est positif, la série*

(9) $$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda^n g_*^n,$$

où $g\in V_0$, converge uniformément dans tout domaine

$$0\leqslant t\leqslant t_0, \qquad |\lambda|\leqslant q<\frac{R}{|g(0+)|}.$$

La somme de cette série est encore une fonction de V_0.

Démonstration. Soit $|g(0+)|<\beta<R/q$. En vertu du lemme 2, on a

$$\operatorname{Var}_{t_0}\left(\frac{g}{\beta}\right)_*^n\leqslant M \quad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots$$

Donc, en vertu de (3),

$$|a_n\lambda^n g_*^n|\leqslant\operatorname{Var}_{t_0}(a_n\lambda^n g_*^n)\leqslant|a_n(\lambda\beta)^n|M\leqslant M|a_n(\beta q)^n|$$

pour $0\leqslant t\leqslant t_0$, d'où le théorème.

4. Pour adapter le théorème précédent à la théorie des opérateurs, considérons la classe des opérateurs $d=sg$, où $g\in V_0$; ces opérateurs seront dits *densités*[4]). En particulier, tout nombre et toute fonction $f\in\mathfrak{L}_0$ est une densité.

[4]) Cette notion correspond à celle de distribution de masse de Laurent-Schwarz, cette masse étant distribuée sur la demi-droite $t\geqslant 0$.

Si $d_1 = sg_1$ et $d_2 = sg_2$ sont deux densités, leur somme et leur produit le sont encore:

$$d_1 + d_2 = s(g_1 + g_2), \qquad d_1 d_2 = s(g_1 * g_2).$$

Remarquons encore que $d = sg$ $(g \in V_0)$ entraîne

$$d^n = sg_*^n. \tag{10}$$

Théorème 3. *Si le rayon de convergence R de* (1) *est positif, le rayon de convergence de la série* (2), *où $f = sg$ est une densité, et il est $R/|g(0+)|$. Cette dernière série converge uniformément dans tout cercle $|\lambda| \leqslant \varrho < R/|g(0+)|$.*

Démonstration du théorème 3 (partie 1). En multipliant (2) par l on obtient, en vertu de (10), la série (9). D'où la convergence uniforme pour $|\lambda| \leqslant \varrho$.

Corollaire 2. *Si $f = sg$ est une densité et si $g(0+) \neq 0$, alors $1/f$ est encore une densité et l'on a $1/f = sg_1$, où $g(0+)g_1(0+) = 1$.*

Démonstration. On peut écrire $f = g(0+) + sg_0$, où g_0 est encore une fonction de V_0, telle que $g_0(0+) = 0$. On a donc

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g(0+) + sg_0} = \frac{1}{g(0+)} - \frac{sg_0}{g(0+)^2} + \frac{(sg_0)^2}{g(0+)^3} - \ldots,$$

ce qui rend la proposition évidente, en vertu des théorèmes 2 et 3.

Corollaire 3. *Si $f = sg$ est une densité et si $|g(0+)| > 1$, la suite f^{n_k} est divergente (au sens opératoire), pourvu que $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$.*

Démonstration. En vertu du corollaire 2 et du lemme 2, on trouve facilement $\lim\limits_{k\to\infty} (1/f)^{n_k} = 0$. Or, on a $f^{n_k}(1/f)^{n_k} = 1$, la suite f^{n_k} ne peut donc pas converger.

Démonstration du théorème 3 (partie 2). Si $|\lambda| > p > R/|g(0+)|$, on a

$$|\alpha_{n_k}| \, |pg(0+)|^{n_k} > m > 0 \tag{11}$$

pour une suite d'indices n_k, convenablement choisie. On peut écrire

$$\alpha_{n_k} \lambda^{n_k} f^{n_k} = \alpha_{n_k} [pg(0+)]^{n_k} \cdot \left(\frac{\lambda f}{pg(0+)} \right)^{n_k}.$$

Or, la densité $\lambda f / pg(0+)$ satisfait à l'hypothèse du corollaire 3, donc la suite $\alpha_{n_k} \lambda^{n_k} f^{n_k}$ diverge, en vertu de (11). Par conséquent la série (2) ne peut pas converger.

Remarque. Le corollaire 1 du théorème 1 peut être aussi déduit du théorème 3. En effet, toute fonction $f \in \mathfrak{L}_0$ est une densité $f = sg$, où g est une fonction absolument continue et nulle pour $t = 0$.

(Reçu par la Rédaction le 10. 6. 1951)