against 1° of lemma 1; this contradiction yields (ii). To prove (iii) let us suppose (5) and $F(z)+f(z)$ not singular. Lemma 2 assures the existence of $f_1(z)$ with $r(F+f)<r(F+f+f_1)$; comparing with (5) we get $r(F+g)>r(H)$, where g means the ordinary series $f+f_1$; the last inequality contradicts (i) and thus (iii) is established.

(Reçu par la Rédaction le 6. 10. 1951)

Sur la convergence des séries de puissances de l'opérateur différentiel

par

C. RYLL-NARDZEWSKI (Wrocław).

1. Considérons la série

$$\gamma_0+\gamma_1 s\lambda+\gamma_2 s^2\lambda^2+\ldots, \tag{1}$$

où γ_n sont des nombres complexes, s l'opérateur différentiel[1]) et λ une variable complexe.

Pour la convergence de cette série, on a le critère suivant:

S'il existe un nombre $\delta>1$, tel que

$$\limsup_{n\to\infty}(n^n)^\delta|\gamma_n|<\infty, \tag{2}$$

la suite (1) *converge pour tout λ complexe. Si*

$$\limsup_{n\to\infty} n^n|\gamma_n|>0, \tag{3}$$

la suite (2) *diverge pour tout λ complexe non nul.*

Démonstration. Soit $1<1/\alpha<\beta<\delta$. Posons pour t réel

$$f(t)=\int_J \exp(zt-z^\alpha)\,dz,$$

où l'intégrale est prise le long de l'axe imaginaire J. On a

$$f^n(t)=\int_J z^n\exp(zt-z^\alpha)\,dz \qquad (n=0,1,2,\ldots), \tag{4}$$

car chacune des intégrales (4) converge uniformément pour tout t, ce qui résulte de l'inégalité

---

[1]) Voir [1], p. 47.

$$|z^n \exp(zt-z^\alpha)| \leqslant |z|^n \exp\left(-|z|^\alpha \cos\frac{\alpha\pi}{2}\right). \tag{5}$$

De plus, on a $f^{(n)}(0)=0$ pour $n=0,1,2,\ldots$ [2]).
L'inégalité (5) entraîne

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant \frac{2}{\alpha}\left(\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right)^{-\frac{n+1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right).$$

En multipliant (1) par $q=\{q(t)\}$, on a

$$\{\gamma_0 f(t)+\gamma_1 f'(t)\lambda+\ldots\}.$$

Lorsque (2), cette série converge pour tout λ complexe uniformément par rapport à $t\geqslant 0$, car

$$|\gamma_n f^{(n)}(t)| \leqslant A_n = \frac{2}{\alpha}\left(\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right)(n^n)^{-\beta}$$

pour les grandes valeurs de n et la suite $A_1\lambda+A_2\lambda^2+\ldots$ converge pour tout $\lambda>0$. D'où la première partie du théorème.

Supposons maintenant que l'inégalité (3) ait lieu et qu'il existe une fonction $f=\{f(t)\}$ $(0\leqslant t<+\infty)$ non identiquement nulle dans un entourage du point $t=0$, telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n s^n \lambda f$ converge fortement[3]) pour une valeur $\lambda=\lambda_0\neq 0$. La fonction $f(t)$ est alors indéfiniment dérivable et l'on a $f^{(n)}(0)=0$ pour $n=0,1,2,\ldots$ On a de plus

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n \lambda_0^n f^{(n)}(t)=0, \tag{6}$$

uniformément dans tout intervalle fini.

En vertu de la formule de Maclaurin on peut donc écrire

$$f(t)=[\gamma_n \lambda^n f^{(n)}(\Theta t)]\frac{1}{n^n\gamma_n}\left(\frac{3t}{\lambda_0}\right)^n \frac{n^n}{3^n n!} \qquad (0<\Theta<t),$$

d'où, en tenant compte des relations (3) et (6), il vient $f(t)\equiv 0$ pour $0\leqslant t\leqslant|\lambda_0|/3$.

---

[2]) Voir [2], p. 211-212.
[3]) Voir [1], p. 50.

2. Considérons maintenant le développement formel

$$e^{s^\alpha\lambda}=1+\frac{1}{1!}s^\alpha\lambda+\frac{1}{2!}s^{2\alpha}\lambda^2+\ldots \tag{7}$$

On sait que cette série converge pour tout λ complexe, lorsque $\alpha\leqslant 0$ [4]) et qu'elle diverge pour λ complexe, lorsque $\alpha\geqslant 1$ [5]).

Que devient la série pour les valeurs restantes de α?

Le théorème précédent permet de démontrer que la série (7) converge pour tout λ complexe, lorsque $0<\alpha<1$.

Supposons d'abord que $\alpha=p/q$, où p,q sont des nombres naturels et $p<q$. Alors la série (7) peut s'écrire comme la somme de n séries

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} s^{\nu p/q}\lambda^\nu\left[\frac{1}{\nu!}+\frac{1}{(q+\nu)!}s^p\lambda^q+\frac{1}{(2q+\nu)!}s^{2p}\lambda^{2q}+\ldots\right],$$

dont chacune est convergente, en vertu du théorème précédent.

Si α est irrationnel, choisissons un β_0 rationnel de manière à avoir $0<\alpha<\beta_0<1$. Il existe une fonction $f=\{f(t)\}$, continue pour $t\geqslant 0$, telle que les termes de la série

$$f+\frac{1}{1!}s^{\beta_0}f\lambda+\frac{1}{2!}s^{2\beta_0}f\lambda^2+\ldots$$

soient des fonctions continues pour $t\geqslant 0$ et que cette série converge fortement, quel que soit λ complexe.

On a pour $n=1,2,\ldots,$

$$|s^{n\alpha}f|=|s^{n\beta_0}f\cdot s^{-n(\beta_0-\alpha)}|\leqslant|s^{n\beta_0}f|\,l^{n(\beta_0-\alpha)}$$
$$\leqslant|s^{n\beta_0}f|(l^{(\beta_0-\alpha)}+l^{2(\beta_0-\alpha)}+\ldots),$$

la dernière série étant évidemment convergente. Or, cela entraîne la convergence forte de la série

$$f+\frac{1}{1!}sf\lambda+\frac{1}{2!}s^{2\alpha}f\lambda^2+\ldots,$$

d'où la proposition.

---

[4]) Voir [1], p. 210.
[5]) Voir [2], p. 215-221.

Publications citées.

[1] J. G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica 11 (1949), p. 41-70.

[2] — *Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire*, Studia Mathematica 12 (1951), p. 208-224.

(Reçu par la Rédaction le 10. 6. 1951)

Sur les séries de puissances dans le calcul opératoire

par

C. RYLL-NARDZEWSKI (Wrocław).

1. Soit

$$\Phi(z)=a_1z+a_2z^2+\dots \tag{1}$$

une série à rayon de convergence positif. Si $f=\{f(t)\}$ est une fonction (complexe de variable réelle) continue pour $t\geqslant 0$, la série

$$\Phi(f\lambda)=a_1f\lambda+a_2f^2\lambda^2+\dots, \tag{2}$$

considérée comme une série d'opérateurs, est uniformément convergente dans tout cercle $|\lambda|\leqslant\varrho$ [1]).

Nous démontrerons ici deux théorèmes plus généraux.

2. Soit $\mathfrak{L}_0$ la classe des fonctions f (complexes de variable réelle $t\geqslant 0$) qui sont sommables dans tout intervalle fini $0\leqslant t\leqslant k$. Nous allons considérer $\mathfrak{L}_0$ comme un espace du type B_0 [2]), en posant

$$\|f\|_k=\int_0^k|f(t)|\,dt \quad \text{pour} \quad k=1,2,\dots$$

La pseudonorme $\|f\|_k$ jouit des propriétés suivantes:

1° $\|fg\|_k\leqslant\|f\|_k\cdot\|g\|_k$ [3]);

2° si $|g(t)|\leqslant M$ pour $0\leqslant t\leqslant k$, on a

$$\|g^\nu\|_k\leqslant\frac{1}{\nu!}(kM)^\nu \quad \text{pour} \quad \nu=1,2,\dots$$

---

[1]) Voir J. G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Math. 11 (1950), p. 63, § 21.

[2]) Voir S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires (I)*, Studia Math. 10 (1948), p. 184-208.

[3]) Nous employons la notation de Mikusiński: $fg=\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right\}$.