Since (7) implies

$$|U(x_n,t)|\leqslant\|x\|\, VD'_t(:,v),$$

for almost every t there exists a subsequence $\{x_{n_i}\}$ and a function $U(x,\tau)\in M$ such that

$$\int_a^b U(x_{n_i},\tau)\varphi_j(\tau)\,d\tau\to\int_a^b U(x,\tau)\varphi_j(\tau)\,d\tau \qquad \text{for} \quad j=1,2,\ldots$$

Since $x_{n_i}(t)\to x(t)$, we get

$$\lambda_j\int_a^b x_{n_i}(\tau)\varphi_j(\tau)\,d\tau\to\lambda_j\int_a^b x(\tau)\varphi_j(\tau)\,d\tau=\int_a^b U(x,\tau)\varphi_j(\tau)\,d\tau,$$

i. e.

$$\lambda_j\int_a^b x(\tau)\varphi_j(\tau)\,d\tau=\int_a^b U(x,\tau)\varphi_j(\tau)\,d\tau.$$

(Reçu par la Rédaction le 10. 8. 1952)

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ МАЗУРА-ОРЛИЧА ИЗ ТЕОРИИ СУММИРОВАНИЯ

М. Альтман (Варшава).

Пусть дана последовательность функций $\{a_n(t)\}$ определённых на некотором множестве чисел T. Этой последовательности можно поставить в соответствие некоторый, так называемый *континуальный*, метод суммирования последовательностей чисел следующим образом.

Пусть t_∞ предельная точка множества T, а $x=\{\xi_k\}$ какая нибудь последовательность чисел. Если ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\,\xi_k$$

сходятся для любого $t\in T$ отличного от t_∞, причём их суммы

$$A_t(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\xi_k$$

стремятся к пределу, $\xi=A(x)=A_{t_\infty}(x), t\to t_\infty$, то будем говорить, что последовательность $x=\{\xi^k\}$ *суммируется континуальным методом* A к этому пределу.

Частным случаем континуальных методов являются методы суммирования, задаваемые бесконечными матрицами, если например в качестве T возьмём множество натуральных чисел.

Континуальный метод A называется *перманентным*, если он суммирует всякую сходящуюся последовательность к тому же пределу, к которому она сходится.

Для того, чтобы континуальный метод был перманентным, необходимо и достаточно выполнение следующих трёх условий, аналогичных условиям, налагаемым на матрицы Тэплица

1^0 $a_n(t)\to 0$, когда $t\to t_\infty$ $(n=1,2,\ldots)$.

2° Существует константа N такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(t)|\leqslant N$$

в некоторой окрестности точки t_∞.

3° $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\to 1$, когда $t\to t_\infty$.

С. Мазур и В. Орлич [1] доказали следующую теорему:

Пусть каждая ограниченная последовательность, суммируемая тэплицевой матрицей A, суммируется и тэплицевой матрицей B. Тогда каждая ограниченная последовательность, суммируемая матрицей A, суммируется матрицей B к тому же пределу, что и матрицей A.

Эту теорему доказал тоже, но значительно позже и совершенно другим методом, А. Л. Брудно [2], который впервые опубликовал доказательство этой теоремы.

Пользуясь методом Мазура и Орлича [1]), можно эту теорему обобщить на один класс континуальных методов, к которому принадлежат известные классические методы суммирования, определяемые как раз последовательностями функций.

Ограничимся случаем, когда множество T является интервалом $\langle a,b\rangle$, а функции $\{a_m(t)\}$ вещественны и непрерывны в T. Не умаляя общности, будем считать, что $t_\infty=b$.

Пусть $\varepsilon(t)$ произвольная неотрицательная функция, обладающая тем свойством, что $\varepsilon(t)\to 0$, когда $t\to t_\infty$.

Если условие 2° выполнено для всего интервала $\langle a,b\rangle$, то для каждого фиксированного $t\epsilon\langle a,b\rangle$, $t\neq t_\infty$, существует индекс $m(t)$ такой, что

$$\sum_{m(t)+1}^{\infty}|a_m(t)|\leqslant\varepsilon(t).$$

Таким образом, для функции $\varepsilon(t)$ можно различными способами определить функцию $m(t)$, областью значений которой служат натуральные числа.

Определение. Континуальный метод A *обладает свойством* (α), если существует неотрицательная функция $\varepsilon(t)$ сходящаяся к 0, когда $t\to t_\infty$, для которой можно подобрать функцию $m(t)$ неубывающую при $t<t_\infty$, и невозрастающую при $t>t_\infty$, причём достаточно определить её в некоторой окрестности точки t_∞.

1. Обозначим через $C(a,b)$ пространство всех вещественных функций, определённых и непрерывных в $\langle a,b\rangle$. Следующая теорема принадлежит С. Мазуру [3]:

Если последовательность элементов $\{x_n\}\subset C(a,b)$ сходится слабо к элементу $x_0\epsilon C(a,b)$, то для любого $\varepsilon>0$ и каждого натурального числа p существуют числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ такие, что $\alpha_i\geqslant 0$, $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=1$, $\alpha_i=0$ для $i=1,2,\ldots,p$ и

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i-x_0\right\|<\varepsilon$$

(*норма* $\|x\|=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$).

2. Пусть континуальный метод A, задаваемый последовательностью функций $\{a_n(t)\}$ непрерывных в интервале $\langle a,b\rangle$, обладает свойством (α). Для него построим континуальный метод $\tilde{A}$ следующим образом:

Пусть $t_i\epsilon\langle a,b\rangle$ $(i=1,2,\ldots)$, будут точками разрыва функции $m(t)$, $t\epsilon\langle a,b\rangle$, $t\neq t_\infty=b$. Эти точки являются изолированными точками, а t_∞ есть их единственной предельной точкой. Расположим их в возрастающую последовательность $t_1<t_2<\ldots$ Этим точкам соответствуют индексы $m(t_i)$. Отрезок $\langle a,t_1\rangle$ делим на части точками $S_1,S_2,\ldots,S_{m(t_1)}$ так, чтобы $a_k(S_k)\neq 0$ $(k=1,2,\ldots,m(t_1))$.

Построим непрерывные функции $\tilde{a}_1(t),\tilde{a}_2(t),\ldots,\tilde{a}_{m(t_1)}(t_1)$ следующим образом:

Положим функцию $\tilde{a}_k(t)=0$ для $a\leqslant t\leqslant S_{k-1}$, линейно для $S_{k-1}\leqslant t\leqslant S_k$, где $k=1,2,\ldots,m(t_1)$. Если некоторые из функций $a_k(t)$ во всем интервале $\langle a,t_1\rangle$ тождественно равны нулю, например, $a_l(t)=0$ для $a\leqslant t\leqslant t_1$, то положим $\tilde{a}_l(S_l)=1$, а в некоторой окрестности точки S_l определим $\tilde{a}_l(t)$ линейно. В остальных точках интервала $\langle a,t_1\rangle$ положим $\tilde{a}_l(t)=0$. Соответствующие окрестности точек S_l мы должны так подобрать, чтобы они между собой не пересекались. В интервале $\langle S_k,b\rangle$ положим функцию $\tilde{a}_k(t)=a_k(t)$.

Теперь рассмотрим функции

$$a_{m(t_1)+1}(t),\quad a_{m(t_1)+2}(t),\ \ldots,\ a_{m(t_2)}(t).$$

[1]) С этим методом я познакомился на семинаре у проф. Мазура.

Для них построим непрерывные функции

$$\tilde{a}_{m(t_1)+1}(t), \quad \tilde{a}_{m(t_1)+2}, \quad \ldots, \quad \tilde{a}_{m(t_2)}(t).$$

В интервале $\langle a, t_1\rangle$ положим $\tilde{a}_i(t)=0$ $\big(i=m(t_1)+1, m(t_1)+2, \ldots, m(t_2)\big)$, а в интервале $\langle t_1, t_2\rangle$ опять выберем соответствующие точки $S_{m(t_1)+1}, S_{m(t_1)+2}, \ldots, S_{m(t_2)}$ такие, чтобы $a_i(S_i)\neq 0$. В интервале $\langle t_1, t_2\rangle$ определим эти функции с помощью функций $a_i(t)$ путём проведения для них соответсвующих видоизменений, подобным образом, как это сделано для предыдущих функций, причём для функций $a_j(t)$, исчезающих в интервале $\langle t_1, t_2\rangle$ положим $\tilde{a}_j(S_j)=1/2$. В интервале $\langle S_i, b\rangle$ положим функцию $\tilde{a}_i(t)=a_i(t)$. Итак, например, в интервале $\langle a, t_k\rangle$ положим функции $\tilde{a}_i(t)=0$ $\big(i=m(t_k)+1, m(t_k)+2, \ldots, m(t_{k+1})\big)$. Для функций $a_p(t)$, исчезающих в интервале $(t_k, t_{k+1}\rangle$ положим $\tilde{a}_p(S_p)=1/k$. В интервале $(t_k, t_{k+1}\rangle$ функции $\tilde{a}_i(t)$ определим с помощью соответственно видоизменённых функций $a_i(t)$, а в интервале $\langle S_i, b\rangle$ положим функцию $\tilde{a}_i(t)=a_i(t)$ $\big(i=m(t_k)+1, m(t_k)+2, \ldots, m(t_{k+1})\big)$.

Примечание. В случае, когда $a<t_\infty<b$, функции $\tilde{a}_n(t)$ строим аналогичным образом для интервала $\langle t_\infty, b\rangle$ с помощью функций $a_n(t)$.

Рассмотрим теперь континуальный метод $\tilde{A}$, соответствующий функциям $\tilde{a}_m(t)$.

Континуальные методы $\tilde{A}$ и A эквивалентны в поле ограниченных последовательностей чисел, т. е. они суммируют те же самые ограниченные последовательности и к одинаковым значениям.

Доказательство следует немедленно из свойства (α).

Положим

$$\tilde{A}_t(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_m(t)\,\xi_m;$$

$$A_t(x)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m(t)\,\xi_m=\sum_{m=1}^{m(t)}a_m(t)\,\xi_m+\sum_{m=m(t)+1}^{\infty}a_m(t)\,\xi_m.$$

Пусть t, достаточно близкое t_∞, принадлежит интервалу $\langle S_{m(t_k)+i}, S_{m(t_k)+i+1}\rangle$. Тогда

$$\tilde{A}_t(x)=\sum_{m=1}^{m(t)}\tilde{a}_m(t)\,\xi_m+\sum_{m=m(t)+1}^{m(t_k)+i}\tilde{a}_m(t)\,\xi_m+\theta_l(t)\,a_l(S_l)\,\xi_l+\vartheta_p(t)\,\xi_p,$$

где $l=m(t_k)+i+1$, $m(t_k)<p<m(t_{k+1})$, $|\theta_l(t)|\leqslant 1$, $0\leqslant\vartheta_p(t)\leqslant 1/k$, следовательно, последние три слагаемых стремятся к нулю, когда $t\to t_\infty$.

Функция

$$\tilde{A}_t(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_m(t)\,\xi_m$$

при любом фиксированном $x=\{\xi_m\}$ непрерывна относительно $t\,\epsilon\langle a, b\rangle$, $t\neq t_\infty$.

Обозначим через $\tilde{A}^*$ поле[2]) континуального метода $\tilde{A}$. *Если в поле* $\tilde{A}^*$ *введём норму*

$$\|x\|=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|\tilde{A}_t(x)|,$$

то оно превратится в полное пространство Банаха.

Доказательство. Пусть $\|x_p-x_q\|\to 0$, когда $p, q\to\infty$, где $x_p=\{\xi_m^p\}$, следовательно

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|\tilde{A}_t(x_p)-\tilde{A}_t(x_q)|\to 0, \quad \text{когда} \quad p, q\to\infty.$$

Возьмём счётное и всюду плотное в $\langle a, b\rangle$ множество, содержащее все точки деления S_k и обозначим его через $\{r_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Из предыдущего следует, что

$$\sup_n|A_{r_n}(x_p)-A_{r_n}(x_q)|\to 0, \quad \text{когда} \quad p, q\to\infty$$

и

$$\tilde{A}_{r_n}(x_p)=\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_m(r_n)\,\xi_m^p \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Матрица (a_{nm}), где $a_{nm}=\tilde{a}_m(r_n)$, имеет конечные строки. Кроме того, она обладает ещё следующим свойством:

Из условия

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\,\xi_m=0 \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

следует $\xi_m=0$ для $m=1, 2, \ldots$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ произвольная система чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{k}a_{nm}\lambda_n=0 \qquad (m=1, 2, \ldots).$$

[2]) *Полем метода* называется совокупность всех числовых последовательностей, суммируемых этим методом.

Тогда также
$$\sum_{n=1}^{k}\tilde{A}_{r_n}(x_p)\lambda_n=0 \quad \text{для} \quad p=1,2,\ldots$$
Так как, при фиксированном n и $p\to\infty$, $\tilde{A}_{r_n}(x_p)\to\eta_n$ и
$$\sup_n|\tilde{A}_{r_n}(x_p)-\eta|\to 0, \quad \text{когда} \quad p\to\infty,$$
следовательно
$$\sum_{n=1}^{k}\eta_n\lambda_n=0.$$
На основании теоремы Тэплица система уравнений
$$\eta_n=\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{nm}\xi_m$$
имеет решение, т. е. для $x_0=\{\xi_m^0\}$
$$\eta_n=\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_m(r_n)\,\xi_m^0.$$
Положим
$$\tilde{A}_t(x_0)=\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_m(t)\,\xi_m^0, \quad \text{где} \quad x_0=\{\xi_m^0\}.$$
Из предыдущего следует

(1) $$\sup_n|\tilde{A}_{r_n}(x_p)-\tilde{A}_{r_n}(x_0)|\to 0,$$

когда $p\to\infty$. Так как функция $\tilde{A}_t(x_0)$ непрерывна в каждой точке $t\neq t_\infty$ и существует функция $g(t)$ непрерывная на всем интервале $\langle a,b\rangle$ такая, что $g(t)=A_t(x_0)$ для $t\neq t_\infty$, в силу соотношения (1), следовательно, функция $A_t(x_0)$ непрерывна в точке $t=t_\infty$, если положим $A_{t_\infty}(x_0)=g(t_\infty)$ и $x_0\in\tilde{A}^*$, $\|x_p-x_0\|\to 0$, когда $p\to\infty$.

3. *Пусть континуальный метод A суммирует к нулю все последовательности, сходящиеся к нулю. Если последовательность $x=\{\xi_m\}$ ограничена и суммируется к нулю, то для всякого положительного ε и каждого натурального p существуют числа $a_1,a_2,\ldots,a_r$ такие, что $0\leqslant a_i\leqslant 1$ $(i=1,2,\ldots,r)$ и для $\bar{x}=\{\bar{\xi}_m\}$, где*

$$\bar{\xi}_m=\begin{cases}\xi_m & \text{для} \quad m=1,2,\ldots,p,\\ a_i\xi_{p+i} & \text{для} \quad i=1,2,\ldots,r,\\ 0 & \text{для} \quad m>p+r,\end{cases}$$
справедливо
$$\|\bar{x}-x\|<\varepsilon.$$

Доказательство. Можно считать, что выполнено условие
$$\sum_{m=1}^{\infty}|\tilde{a}_m(t)|\leqslant N,$$
так как в противном случае положим функции
$$\tilde{a}_m(t)=0 \qquad (m=1,2,\ldots)$$
вне некоторой окрестности точки t_∞ и проведём то же самое рассуждение из пункта 2. Так как
$$\tilde{A}_t(x)=\sum_{m=1}^{n}\tilde{a}_m(t)\,\xi_m,$$
то последовательность функций
$$y_n(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_m(t)\,\xi_m$$
сходится в каждой точке к функции $\tilde{A}_t(x)$, так как $A_{t_\infty}(x)=0$, $a_m(t_\infty)=0$, $m=1,2,\ldots$ Кроме того, последовательность x ограничена, следовательно, эта сходимость является слабой и на основании 1 существуют числа $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{p+r}$ такие, что $\beta_i=0$ $(i=1,2,\ldots,p)$,
$$\sum_{i=1}^{p+r}\beta_i=1$$
и
$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\sum_{i=1}^{p+r}\beta_i y_i(t)-\tilde{A}_t(x)\right|<\varepsilon.$$
Так как
$$\sum_{i=1}^{p+r}\beta_i y_i(t)=(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{p+r})\tilde{a}_1(t)\,\xi_1+(\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_{p+r})\tilde{a}_2(t)\,\xi_2+\ldots$$
$$\ldots+(\beta_{p+1}+\ldots+\beta_{p+r})\tilde{a}_{p+1}(t)\,\xi_{p+1}+\ldots+\beta_{p+r}\tilde{a}_{p+r}(t)\,\xi_{p+r}=$$
$$=\tilde{a}_1(t)\,\xi_1+\ldots+\tilde{a}_p(t)\xi_p+a_{p+1}(t)\,a_1\,\xi_{p+1}+\ldots+\tilde{a}_{p+r}(t)\,a_p\,\xi_{p+r},$$

следовательно, $a_i=\beta_{p+i}+\ldots+\beta_{p+r}$ $(i=1,2,\ldots,r)$, $0\leqslant a_i\leqslant 1$ и мы получили, что $\sup_t|A_t(\bar{x})-A_t(x)|<\varepsilon$, т. е. $\|\bar{x}-x\|<\varepsilon$, где $\bar{x}=\{\bar{\xi}_m\}$.

Теорема. *Пусть континуальные методы A и B суммируют к нулю все последовательности, сходящиеся к нулю, причём каждая ограниченная последовательность, суммируемая методом A к нулю, суммируется также методом B. Если, кроме того, метод A обладает свойством (α), то каждая ограниченная последовательность, суммируемая методом A к нулю, суммируется также методом B к нулю.*

Доказательство. Для метода A построим континуальный метод $\tilde{A}$, как указано в пункте 2. Методы A и $\tilde{A}$ эквивалентны в поле ограниченных последовательностей. Пусть $x=\{\xi_m\}$ ограниченная последовательность, суммируемая методом A к нулю. Согласно п. 3 существуют последовательности

$$x_1=a_1\xi_1, a_2\xi_2,\ldots,a_{n_1}\xi_{n_1},0,0,\ldots,$$

$$x_2=\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n_1},a_{n_1+1}\xi_{n_1+1},\ldots,a_{n_2},\xi_{n_2},0,0,\ldots,$$

$$x_3=\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n_2},a_{n_2+1}\xi_{n_2+1},\ldots,a_{n_3}\xi_{n_3},0,0,\ldots$$

такие, что $\|x_k-x\|\leqslant 1/2^k$, $0\leqslant a_n\leqslant 1$ $(k=1,2,\ldots)$.

Пуст $\{\lambda_n\}$ произвольная ограниченная последовательность. Ряд

$$\lambda_1x_1+\sum_{i=2}^{\infty}\lambda_i(x_i-x_{i-1})$$

сходится по норме в поле $\tilde{A}^*$, следовательно, его сумма $\bar{x}$ является последовательностью, суммируемой методом A. Последовательность $\bar{x}$ ограничена. В самом деле,

$$\lambda_1x_1+\sum_{i=2}^{\infty}\lambda_i(x_i-x_{i-1})=\lambda_1\{a_1\xi_1,\ldots,a_{n_1}\xi_{n_1},0,0,\ldots\}+$$

$$+\lambda_2\{(1-a_1)\xi_1,(1-a_2)\xi_2,\ldots,(1-a_{n_1})\xi_{n_1},a_{n_1+1}\xi_{n_1+1},\ldots,a_{n_2}\xi_{n_2},0,0,\ldots\}+$$

$$+\lambda_3\{0,\ldots,0,(1-a_1)\xi_{n_1+1},(1-a_{n_1+2})\xi_{n_1+2},\ldots,(1-a_{n_2})\xi_{n_2},$$

$$a_{n_2+1}\xi_{n_2+1},\ldots,a_{n_3}\xi_{n_3},0,0,\ldots\}+\ldots$$

$$=\{[\lambda_1a_1+\lambda_2(1-a_1)]\xi_1,\ldots,[\lambda_1a_{n_1}+\lambda_2(1-a_{n_1})]\xi_{n_1},$$

$$[\lambda_2a_{n_1+1}+\lambda_3(1-a_{n_1+1})]\xi_{n_1+1},\ldots,[\lambda_2a_{n_2}+\lambda_3(1-a_{n_2})]\xi_{n_2},\ldots\}.$$

Из условия теоремы следует суммируемость последовательности $\bar{x}$ методом B. Пусть метод B задан последовательностью функций $\{b_m(h)\}$, определённых на множестве T_B с предельной точкой h_∞. Для метода B построим континуальный метод $\tilde{B}$ следующим образом: Возьмём какую нибудь функцию $\eta(h)$, положительную и стремящуюся к нулю, когда $h\to h_\infty$. Для каждого $h\in T_B$ существует индекс $m(h)$ такой, что

$$\sum_{m=m(h)+1}^{\infty}|b_m(h)|\leqslant\eta(h).$$

Положим

$$b_m(h)=\begin{cases}0 & \text{для}\quad h\in T_B,\ m>m(h),\\ b_m(h) & \text{для}\quad m=1,2,\ldots,m(h).\end{cases}$$

Методы B и $\tilde{B}$ эквивалентны в поле ограниченных последовательностей. Положим

$$\tilde{B}_h(x)=\sum_{m=1}^{m(h)}\tilde{b}_m(h)\,\xi_m.$$

При фиксированном $h\in T_B$, $\tilde{B}_h(x)$ является линейным функционалом [3]) в поле $\tilde{A}^*$; отсюда вытекает равенство

$$\tilde{B}_h(\quad)=\lambda_1\tilde{B}_h(x_1)+\lambda_2\tilde{B}_h(x_2-x_1)+\lambda_3\tilde{B}_h(x_3-x_2)+\ldots$$

Пусть дана произвольная последовательность $h_n\to h_\infty$, когда $n\to\infty$ Ей соответствует метод

$$\tilde{B}_{h_n}(\bar{x})=\lambda_1\tilde{B}_{h_n}(x_1)+\lambda_2\tilde{B}_{h_n}(x_2-x_1)+\lambda_3\tilde{B}_{h_n}(x_3-x_2)+\ldots,$$

который суммирует все ограниченные последовательности $\{\lambda_i\}$. Этот метод задан матрицей

$$\begin{array}{lll}\tilde{B}_{h_1}(x_1), & \tilde{B}_{h_1}(x_2-x_1), & \tilde{B}_{h_1}(x_3-x_2),\ldots\\ \tilde{B}_{h_2}(x_1), & \tilde{B}_{h_2}(x_2-x_1), & \tilde{B}_{h_2}(x_3-x_2),\ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \tilde{B}_{h_n}(x_1), & \tilde{B}_{h_n}(x_2-x_1), & \tilde{B}_{h_n}(x_3-x_2),\ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\end{array}$$

[3]) Непрерывность функционала $\tilde{B}_h(x)$ следует из того, что $\|x_n\|\to 0$, когда $n\to\infty$, $x_n=\{\xi_i^n\}$, влечёт за собой $\xi_i^n\to 0$, когда $n\to\infty$ для $i=1,2,\ldots$

столбцы которой стремятся к нулю, так как метод B суммирует к нулю все последовательности, сходящиеся к нулю. На основании теоремы I. Шура [4] $\tilde{B}_{h_n}(\bar{x})\to 0$, когда $n\to\infty$, отсюда в частности также $\tilde{B}_{h_n}(x)\to 0$, когда $n\to\infty$, следовательно, $B_{h_n}(x)\to 0$, когда $n\to\infty$. Из этой теоремы немедленно вытекает следующая

Теорема. *Пусть A континуальный и перманентный метод, заданный последовательностью функций непрерывных в некотором интервале, обладающий свойством* (α). *Если континуальный и перманентный метод B суммирует все ограниченные последовательности, суммируемые методом A, то каждая ограниченная последовательность, суммируемая методом A, суммируется методом B к тому же пределу, что и методом A.*

Для исследования классических методов суммирования полезным является следующее

Примечание. Если существуют две последовательности $t_1<t_2<\ldots<t_n<\ldots$ и $\bar{t}_1>\bar{t}_2>\ldots>\bar{t}_n>\ldots$ $(t_n,\bar{t}_n\in T)$, стремящиеся к t_∞, когда $n\to\infty$, такие, что ряды

$$\sum_{m=p}^{\infty}|a_m(t)|,\qquad \text{при}\quad p\to\infty,$$

сходятся к нулю равномерно в каждом из интервалов

$$\langle t_i,t_{i+1},\rangle,\qquad \langle \bar{t}_i,\bar{t}_{i+1}\rangle,$$

принадлежащих некоторой окрестности t_∞, то континуальный метод A обладает свойством (α).

Примеры. 1. Метод Абеля. Последовательность $x=\{\xi_m\}$ называется *суммируемой методом Абеля к пределу ξ*, если

$$\lim_{t\to 1}(1-t)\sum_{m=0}^{\infty}t^m\xi_m=\xi.$$

2. Метод Бореля. Последовательность $x=\{\xi\}$ называется *суммируемой методом Бореля к пределу ξ*, если

$$\lim_{t\to\infty}e^{-t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\,\xi_m=\xi.$$

3. Метод Риманна. Последовательность $x=\{\xi\}$ называется *суммируемой* (R,k) *к пределу ξ*, если

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\sin mt}{mt}\right)^k\xi_m=\xi.$$

Все перечисленные методы обладают свойством (α), что немедленно вытекает из предыдущего примечания.

Цитированная литература

[1] S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les méthodes linéaires de sommation*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences 196 (1933), p. 32-34.

[2] А. Л. Брудно, *Суммирование ограниченных последовательностей матрицами*, Мат. Сборник, Т. 16 (58), Нр 2 (1945), p. 191-247.

[3] S. Mazur, *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Math. 4 (1933), p. 81.

[4] I. Schur, *Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen*, Jour. f. reine u. angew. Math. 151 (1921), p. 79-111.

(Reçu par la Rédaction le 3. 7. 1952)